11 КЛАСС

1. Обозначим $t=x+\dfrac{b}{2a}$ и $D=b^2-4ac$. Тогда

$$ax^2+bx+c=a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right).$$

При $D\leqslant 0$ положим $p=\dfrac{\sqrt{-D}}{2a}$. Тогда

$$a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)=\frac{a}{2}((t-p)^2+(t+p)^2).$$

При $D>0$ положим $q=\dfrac{\sqrt{D}}{2a\sqrt{2}}$. Тогда

$$a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)=a(2(t+q)^2-(t+2q)^2).$$

2. а) О т в е т: да, верно.

Пусть a, b, c, d — четыре попарно скрещивающиеся прямые. Построим такие плоскости $\alpha\supset a$ и $\beta\supset b$, что α параллельна β (рис. 1). Аналогично, построим такие плоскости $\gamma\supset c$ и $\delta\supset d$, что γ параллельна δ. Рассмотрим произвольное направление $\overrightarrow{v}$, не параллельное никакой из этих плоскостей. Спроецируем прямую a на плоскость β вдоль этого направления. Обозначим через B точку пересечения проекции и прямой b, а через $A\in a$ её прообраз при проекции. Тогда прямая AB парал-

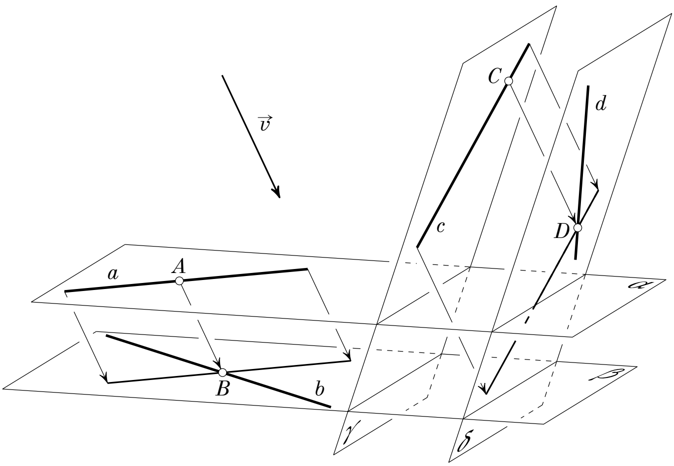

Рис. 1

лельна направлению $\overrightarrow{v}$. Аналогично строятся точки $C \in c$ и $D \in d$, для которых прямая CD параллельна направлению $\overrightarrow{v}$. Тогда прямая AB параллельна CD. Поэтому либо точки A, B, C и D лежат на одной прямой, либо четырёхугольник $ABCD$ — трапеция, либо четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Для всех направлений $\overrightarrow{v}$, кроме конечного числа, точки A, B, C и D не лежат на одной прямой.

Чтобы исключить случай параллелограмма, достаточно обеспечить неравенство $AB \neq CD$. Заметим, что $AB = \frac{p}{\sin \varphi}$ и $CD = \frac{q}{\sin \psi}$, где p — расстояние между плоскостями α и β, q — расстояние между плоскостями γ и δ, φ — угол между направлением $\overrightarrow{v}$ и плоскостью α, ψ — угол между направлением $\overrightarrow{v}$ и плоскостью γ.

Если плоскости α и γ не параллельны, то найдётся направление $\overrightarrow{v}$, для которого $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} < \frac{p}{q}$ (например, направление, почти параллельное плоскости α и перпендикулярное прямой пересечения плоскостей α и γ), и тогда $AB \neq CD$.

Если же все плоскости α, β, γ, δ параллельны, то $\varphi = \psi$ для любого направления $\overrightarrow{v}$, и для выполнения неравенства $AB \neq CD$ достаточно неравенства $p \neq q$, которого всегда можно добиться, переобозначив плоскости.

б) Ответ: нет, не верно.

Возьмём четыре параллельные плоскости, все попарные расстояния между которыми различны. В каждой из них проведём прямую таким образом, чтобы эти прямые попарно скрещивались. Докажем, что параллелограмма с вершинами на этих прямых не существует. Действительно, длины любых двух параллельных отрезков с концами на этих прямых пропорциональны расстояниям между соответствующими парами плоскостей, а значит, различны.

3. Первое решение. Число n можно записать в виде $n = 10^k(10a+b)+c$, где $0 \leqslant c < 10^k$, b — ненулевая цифра, которую вычёркиваем, a — число, образованное цифрами, стоящими левее b. Тогда после вычёркивания получится число $n_1 = 10^k a + c$. Их разность $n - n_1 = 10^k(9a+b)$. Чтобы выполнялось условие задачи, достаточно, чтобы числа $9a+b$ и $10^k a + c$ делились на d. Для этого подберём ненулевую цифру b так, чтобы число $d-b$ делилось на 9, и возьмём $a = \frac{d-b}{9}$. Тогда $d = 9a+b$. Пусть k — такое число, что $10^{k-1} > d$. Число $10^k a + 10^{k-1}$ разделим с остатком на d: $10^k a + 10^{k-1} = dq + r$, $0 \leqslant r < d$. Положим $c = 10^{k-1} - r > 0$. Тогда $10^k a + c = dq$ делится на d.

Второе решение (предложенное школьниками на олимпиаде). Рассмотрим для произвольного натурального k число $n_k = 10^k d - d$. Пусть l — количество знаков в десятичной записи числа d ($l = [\lg d] + 1$). Заметим, что при достаточно больших k (а именно, при $k > l$) десятичная запись числа n_k выглядит следующим образом: сначала идёт десятичная запись числа $d-1$, затем — серия девяток, и наконец — десятичная запись числа 10^l-d. Таким образом, при $k>l$ число n_k можно получить из числа n_{k+1} путём вычёркивания одной из девяток в центральной части десятичной записи. Очевидно также, что все числа n_k делятся на d.

4. Ответ: $\pi-2\alpha$ или $\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Пусть H — основание высоты, проведённой из вершины B, пусть указанный в условии диаметр d пересекает контур треугольника в точках H и O, а M — середина стороны AC. Медиана BM делит треугольник на две части одинаковой площади. Если диаметр d содержит отрезок BM, то $H=M$, треугольник ABC — равнобедренный, и $\angle B=\pi-2\alpha$ (рис. 2). В противном случае d и BM пересекаются в некоторой точке K, поскольку каждый из этих отрезков делит треугольник на две равновеликие части. Ясно, что площади треугольников BOK и MKH равны. Тогда площади треугольников BOH и BMH равны. Значит, отрезок BH параллелен OM (рис. 3). Поэтому отрезок OM — серединный перпендикуляр к хорде AC. Следовательно, он является частью диаметра окружности. Значит, точка O принадлежит двум различным диаметрам, поэтому она является центром окружности. Если точка O лежит на стороне BC, то $\angle A=\frac{\pi}{2}>\alpha$, что невозможно, а если O лежит на стороне AB, то $\angle C=\frac{\pi}{2}$ и $\angle B=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

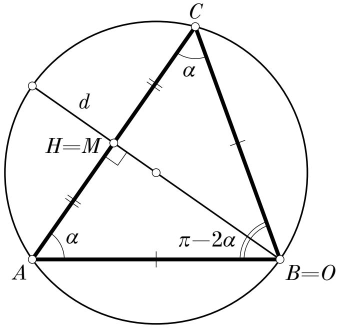

Рис. 2

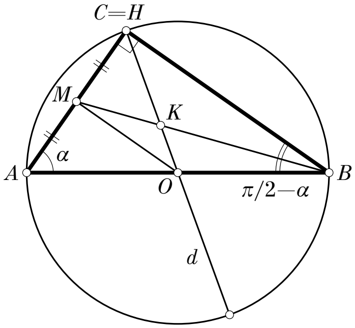

Рис. 3

5. Ответ: $2k_0$.

Обозначим через $N(F)$ число нулей функции F на промежутке $[0;2\pi)$, т. е. значений аргумента $x\in[0;2\pi)$, для которых $F(x)=0$. Тогда при $A_1=A_2=0$ получаем $N(\sin k_0x)=2k_0$. Действительно, нулями являются числа $x_n=\frac{\pi n}{k_0}$, где $n=0,\ 1,\ \ldots,\ 2k_0-1$.

Фиксируем произвольные числа A_1 и A_2 и докажем, что число нулей функции $F(x)=\sin k_0x+A_1\sin k_1x+A_2\sin k_2x$ на промежутке $[0;2\pi)$ не меньше $2k_0$. Пусть $f_m(x)=(\sin x)^{(m)}$. Заметим, что $\{f_m(x)\}$ — последовательность функций $\sin x$, $-\cos x$, $-\sin x$, $\cos x$, $\sin x$, ... (периодическая с периодом 4). Определим последовательность функций

$$F_m(x)=f_m(k_0x)+A_1\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^m f_m(k_1x)+A_2\left(\frac{k_0}{k_2}\right)^m f_m(k_2x), \quad m=0,\ 1,\ \ldots$$

Тогда $F_0=F$ и $F'_{m+1}=k_0F_m$. Ясно, что число 2π — период каждой из функций F_m (можно представить себе, что они являются функциями от точек единичной окружности длиной 2π). Строго между любыми двумя соседними (на окружности) нулями функции F_{m+1} есть хотя бы один ноль её производной (это естественное утверждение называется теоремой Ролля). Значит, $N(F_m)\geqslant N(F_{m+1})$. Поэтому достаточно доказать, что $N(F_M)\geqslant 2k_0$ для достаточно большого числа M.

Поскольку $\frac{k_0}{k_1}<1$, $\frac{k_0}{k_2}<1$, то существует достаточно большое число M вида $4m+3$, для которого

$$\left|A_1\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^M\right|+\left|A_2\left(\frac{k_0}{k_2}\right)^M\right|=\varepsilon<1.$$

Тогда

$$F_M\left(\frac{\pi n}{k_0}\right)=\cos(\pi n)+A_1\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^M\cos\left(\frac{k_1\pi n}{k_0}\right)+A_2\left(\frac{k_0}{k_2}\right)^M\cos\left(\frac{k_2\pi n}{k_0}\right).$$

Поэтому $F_M\left(\frac{\pi n}{k_0}\right)>1-\varepsilon>0$ для чётных n и $F_M\left(\frac{\pi n}{k_0}\right)<-1+\varepsilon<0$ для нечётных n. Значит, непрерывная функция F_M обязательно имеет ноль между любыми соседними точками $x_n=\frac{\pi n}{k_0}$, где $n=0,\ 1,\ \ldots,\ 2k_0$. Поэтому $N(F_M)\geqslant 2k_0$.

6. а) Ответ: $\frac{2}{3}$.

Предположим, что бойница имеет длину $s<\frac{2}{3}$. За то время, пока второй стражник проходит не занятый бойницей участок стены (длины $1-s$), первый стражник пройдёт расстояние $2(1-s)>s$. Т. е. найдётся такой момент времени в который ни один из стражников не находится возле бойницы.

Рассмотрим такой момент времени, в который первый стражник находится на $\frac{1}{3}$ впереди второго. Пусть бойница занимает тот участок стены между стражниками, который имеет длину $\frac{2}{3}$. Легко проверить, что тогда условия задачи выполнены.

б) Пусть суммарная длина бойниц равна s. Без ограничения общности, будем считать, что в начальный момент времени стражники находятся в одной точке, а за 1 час второй стражник делает ровно один обход вдоль стены. За этот час каждый стражник побывает возле бойниц в течение s часов (первый стражник пройдёт все бойницы дважды, но в два раза быстрее). Кроме того, найдётся такой промежуток времени, в течение которого они оба будут находиться возле одной и той же бойницы, содержащей точку их встречи. Поэтому суммарное время, проведённое двумя стражниками возле бойниц в течение часа, строго больше 1 часа. Т. е. $2s > 1$, и следовательно $s > \frac{1}{2}$.

в) Построим функцию $f(t)$, обладающую следующими свойствами:

1° $f(t)$ имеет период 1;

2° на отрезке $[0, 1]$ функция $f(t)$ обращается в ноль на конечном множестве отрезков с суммарной длиной меньшей s;

3° $f(t)\,f(2t) = 0$ для всех t.

Выберем натуральное число n таким, чтобы $\frac{1}{2^n} < s - \frac{1}{2}$. Рассмотрим двоичную запись числа t из промежутка $[0, 1)$: $t = 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$ (все a_k равны 0 или 1). Пусть задано некоторое натуральное число q. Рассмотрим множество M_q чисел t из промежутка $[0, 1)$, для которых среди первых qn знаков после запятой в двоичном разложении t встречается набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ нулей}}$. Ясно, что M_q представляет собой объединение конечного числа промежутков.

Дополнение $[0,1)\setminus M_q$ содержится в множестве G_q тех чисел t из промежутка $[0, 1)$, для которых ни один из наборов вида $a_{kn+1}a_{kn+2}\ldots a_{(k+1)n}$ $(k = 0, 1, \ldots, q-1)$ не совпадает с набором $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ нулей}}$. Тогда суммарная длина промежутков, составляющих множество G_q, равна $g_q = \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)^q$. Поскольку $\frac{2^n-1}{2^n} < 1$, то g_q стремится к нулю при неограниченном росте q (если n фиксировано). Поэтому можно взять q настолько большим, чтобы $g_q < \frac{1}{2^{n+1}}$.

Множество M_q разобьём на два множества B_q и C_q. Здесь B_q — множество таких чисел t, что набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ нулей}}$ впервые встречается в двоичной записи числа t, начиная с нечётного места (т. е. для некоторого $k = 0, 1, 2, \ldots$ набор $a_{2k+1}a_{2k+2}\ldots a_{2k+n}$ совпадает с набором $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ нулей}}$, а при любом $j<2k+1$ для набора $a_j a_{j+1} \ldots a_{j+n-1}$ такого совпадения нет). Аналогично, C_q — множество таких чисел t, что набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$ впервые встречается, начиная с чётного места. Обозначим суммарную длину промежутков, составляющих множество B_q, через b_q, а суммарную длину промежутков, составляющих множество C_q, — через c_q.

Пусть число t содержится в B_q, тогда число $\frac{t}{2}$ содержится в C_q. Кроме того, если набор $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ первых цифр числа t' не совпадает с набором $\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$, то число $\frac{t'+1}{2}$ также содержится в C_q. Ясно, что $\frac{t}{2} \neq \frac{t'+1}{2}$. Отсюда получаем, что

$$c_q \geqslant \frac{b_q}{2} + \frac{1}{2}\left(b_q - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = b_q - \frac{1}{2^n}.$$

Имеем: $b_q < 1 - c_q \leqslant 1 + \frac{1}{2^n} - b_q$, т. е. $b_q < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$.

Положим $f(t)$ равной нулю на всех промежутках (включая их концы), составляющих объединение множеств B_q и G_q. Суммарная длина этих промежутков не превосходит

$$b_q + g_q < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} < s.$$

В остальных точках промежутка $[0, 1)$ положим $f(t)=1$, а затем продолжим $f(t)$ на $(-\infty, \infty)$ с периодом 1. Свойства 1° и 2° для функции f, очевидно, выполнены. Для доказательства свойства 3° заметим, что если $f(t)=1$ и $0 \leqslant t < 1$, то $t=0{,}a_1 a_2 \ldots$ содержится в множестве C_q, т. е. среди первых q знаков после запятой встречается набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$, причём он впервые встречается, начиная с чётного места. Тогда одно из чисел $2t$ или $2t-1$ равно $0{,}a_2 a_3 \ldots$, т. е. принадлежит множеству B_q. Получаем $f(2t)=0$ как только $f(t)=1$. Отсюда вытекает, что $f(t)\,f(2t)=0$ для любого t.

Как и раньше считаем, что в момент времени $t=0$ стражники находились в одной точке, а за отрезок времени $[0, 1]$ второй стражник делает ровно один обход вдоль стены. Пусть бойницы проделаны на тех участках стены, мимо которых проходит второй стражник в те отрезки времени, на которых $f(t)=0$. Тогда их суммарная длина будет меньше s. Так как для любого t имеем $f(t)\,f(2t)=0$, получаем, что в каждый момент времени по крайней мере один из стражников находится возле бойницы.