8 класс

1. **Ответ:** да, существуют: 64 и 81.

Рассмотрим все двузначные числа, являющиеся квадратами целых чисел. Корни из чисел 16, 25 и 36 не могут быть извлечены указанным способом, так как квадратные корни из их последних цифр не являются целыми. Числа 49, 64 и 81 являются решениями.

Ответ в задаче не изменится, если не требовать, чтобы корень был целым. Действительно, если $\sqrt{10a+b} = a + \sqrt{b}$, *то* $10a + b = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$, *Так как в левой части равенства стоит целое число, то и число, стоящее в правой части, должно быть целым. Отсюда следует, что* $b = 0$, 1, 4 *или* 9, *то есть* $a + \sqrt{b}$ *— целое число.*

$+$ *верный ответ и верное обоснование*

$\mp$ *верный ответ без обоснования или обоснованный неполным перебором*

$-$ *неверный или неполный ответ*

2. **Ответ:** -4.

При $x \neq 0$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right) =$$

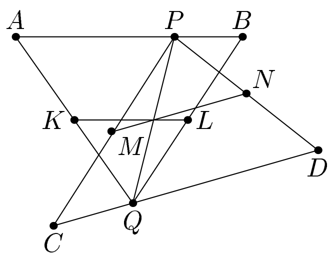
$$= \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2 = 2x^2\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right) = 4.$$

Решая уравнение $(x+2)^2 = 4$, получим, что $x = -4$ или $x = 0$. При $x = 0$ левая часть уравнения не имеет смысла.

$\pm$ *верное решение, но не отброшен посторонний корень*

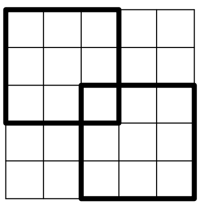
$\mp$ *верный ответ без решения*

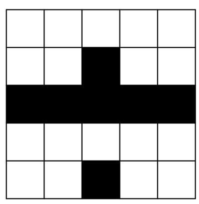
3. Из условия следует, что KL — средняя линия треугольника AQB, то есть, $KL \| AB$ (см. рисунок). По теореме Фалеса KL проходит через середину отрезка PQ. Аналогично, из того, что MN — средняя линия треугольника CPD следует, что и отрезок MN проходит через середину отрезка PQ.



4. **Ответ:** 7 клеток.

Покажем, что придётся закрасить не менее семи клеток. Рассмотрим два квадрата 3×3 (см. рисунок слева). В каждом из этих квадратов должно быть закрашено по четыре клетки. Так как их общая часть составляет одну клетку, то в них не может быть закрашено менее семи клеток.





Один из возможных примеров с семью закрашенными клетками приведён на рисунке справа.

$+$ *верный ответ, пример и обоснована оценка*

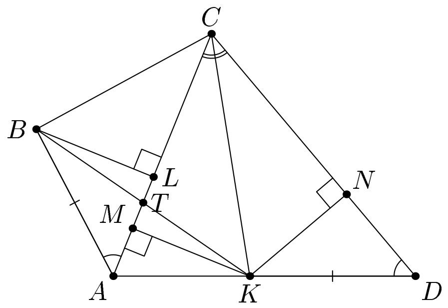
$+/2$ *верный ответ и обоснована оценка*

$\mp$ *верный ответ и пример, но не обоснована оценка*

$-$ *только верный ответ*

5. Рассмотрим случай, когда углы BAC и ADC острые (см. рисунок). Пусть T — точка пересечения прямой AC и отрезка BK. Проведём перпендикуляры KM и KN к прямым CA и CD соответственно. Так как CK — биссектриса треугольника, то $KM = KN$. Проведем также перпендикуляр BL к прямой AC. Тогда прямоугольные треугольники ABL и DKN равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $BL = KN = KM$. Поэтому прямоугольные треугольники BLT и KMT равны по катету и острому углу, откуда следует, что $BT = KT$, что и требовалось доказать.

Случаи, когда углы BAC и ADC прямые или тупые, рассматриваются аналогично.



+ *полностью рассмотрен случай острого или тупого угла, и указано, что остальные случаи разбираются аналогично*

± *рассмотрен только один случай (острого или тупого угла)*

6. Пусть к Пете пришло N гостей. Найдем, сколько конфет взял последний гость. Пусть к моменту подхода к вазе последнего гостя в ней было X конфет. Этот гость взял $\dfrac{X}{N+1} + N$ конфет, забрав при этом все конфеты, то есть $X = \dfrac{X}{N+1} + N$, откуда $X = N + 1$.

Аналогично, пусть к моменту подхода к вазе предпоследнего гостя в ней было Z конфет. Этот гость взял $\dfrac{Z}{N+1} + N - 1$ конфет, оставив при этом $N+1$ конфету, то есть $Z - \left(\dfrac{Z}{N+1} + N - 1\right) = N + 1$, откуда $Z = 2(N + 1)$. Таким образом, предпоследний гость также взял $N + 1$ конфету.

Рассуждая аналогично, можно доказать, что каждый гость взял по $N + 1$-й конфете.

Более строго это рассуждение можно провести следующим образом. Докажем индукцией по k следующее утверждение: «К моменту подхода к вазе $(N + 1 - k)$-го гостя в вазе находилось $k(N + 1)$ конфет». База индукции: $k = 1$ — доказана выше. Проведём шаг индукции. Пусть утверждение верно для $k = l$, докажем, что оно верно для $k = l + 1$. Пусть к моменту подхода к вазе $(N + 1 - l - 1)$-го гостя в ней было Y конфет. Он взял $\frac{Y}{N+1} + N - l$ конфет, после чего в вазе осталось $Y - \left(\dfrac{Y}{N+1} + N - l\right)$ конфет, что по предположению индукции равно $l(N + 1)$. Из уравнения $Y - \left(\dfrac{Y}{N+1} + N - l\right) = l(N + 1)$ получим, что $y = (l + 1)(N + 1)$. Утверждение доказано.

+ *решение задачи методом математической индукции или рассудением «с конца» без явных пробелов со словами «и так далее»*

∓ *доказано только, что если конфет было $N(N + 1)$, то утверждение задачи выполняется*

− *приведены только конкретные числовые примеры*