11 класс

1. Что больше: $\dfrac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}$ или $\dfrac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$?

Ответ: $\dfrac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$.

Первый способ. Рассмотрим разность данных чисел и преобразуем ее (используя формулу $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ и ее разновидность $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$):

$$\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ} - \frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ} = \frac{\sin 1^\circ\cdot\sin 4^\circ - \sin 2^\circ\cdot\sin 3^\circ}{\sin 2^\circ\cdot\sin 4^\circ} =$$
$$= \frac{(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ)-(\cos 1^\circ - \cos 5^\circ)}{2\sin 2^\circ\cdot\sin 4^\circ} = \frac{\cos 3^\circ - \cos 1^\circ}{2\sin 2^\circ\cdot\sin 4^\circ} = \frac{-2\sin 2^\circ\cdot\sin 1^\circ}{2\sin 2^\circ\cdot\sin 4^\circ} = -\frac{\sin 1^\circ}{\sin 4^\circ} < 0.$$

Следовательно, $\dfrac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ} < \dfrac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$.

Второй способ. Рассмотрим частное данных чисел и преобразуем его, используя ту же формулу:

$$\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ} : \frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ} = \frac{\sin 1^\circ\cdot\sin 4^\circ}{\sin 2^\circ\cdot\sin 3^\circ} = \frac{\cos 3^\circ - \cos 5^\circ}{\cos 1^\circ - \cos 5^\circ} < 1,$$

так как $\cos 1^\circ > \cos 3^\circ$. Последнее неравенство следует из того, что функция $y = \cos x$ убывает на $(0^\circ; 90^\circ)$.

Учитывая, что данные числа — положительные, получим, что $\dfrac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ} < \dfrac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$.

Отметим, что неравенство $\cos 1^\circ > \cos 3^\circ$ *можно было использовать и в первом способе решения, не доводя преобразования до конца.*

Третий способ. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin(x+\alpha)}$ на $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, где $\alpha = \dfrac{\pi}{180}$. На рассматриваемом промежутке функция дифференцируема и $f'(x) = \dfrac{\cos x\cdot\sin(x+\alpha) - \cos(x+\alpha)\cdot\sin x}{\sin^2(x+\alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin^2(x+\alpha)} > 0$. Следовательно, на $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ функция $f(x)$ возрастает. Данные числа являются значениями этой функции при $x = \dfrac{\pi}{180}$ и $x = \dfrac{3\pi}{180}$ соответственно, поэтому первое число меньше второго.

$+$ *полное обоснованное решение*
$\pm$ *верное решение с недочетами в обоснованиях*
$\mp$ *используется то, что* $\sin x \approx x$ *при малых значениях* x (*но не равенство типа* $\sin 3^\circ \approx 3^\circ$)
$-$ *только верный ответ*

2. Найдите все нечетные натуральные числа, большие 500, но меньшие 1000, у каждого из которых сумма последних цифр всех делителей (включая 1 и само число) равна 33.

Ответ: 729.

У нечетного числа все делители — нечетные. Так как сумма их последних цифр — нечетная, то делителей должно быть нечетное количество. Если число имеет нечетное количество делителей, то оно является квадратом натурального числа (иначе все делители числа разбиваются на пары).

Рассмотрим все квадраты нечетных чисел, лежащие в указанном промежутке: $23^2 = 529$; $25^2 = 625$; $27^2 = 729$; $29^2 = 841$; $31^2 = 961$. Заметим, что у искомого числа должно быть не менее пяти делителей, иначе сумма их последних цифр заведомо меньше, чем 33. Это означает, что из дальнейшего перебора можно исключить квадраты простых чисел 23, 29 и 31, которые имеют ровно три делителя. Тогда остается проверить два числа.

Делители числа 625: 1, 625, 5, 125, 25. Сумма их последних цифр равна 21.

Делители числа 729: 1, 729, 3, 243, 9, 81, 27. Сумма их последних цифр равна 33.

$+$ *полное обоснованное решение*
$\mp$ *только верный ответ* (*в частности, полученный неполным перебором*)

3. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC. Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ACM. Может ли отрезок AM оказаться медианой треугольника ABC?

Ответ: нет, не может.

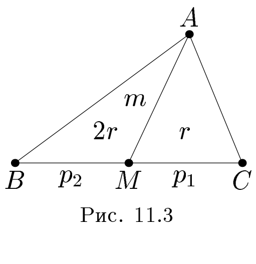

Рис. 11.3

Пусть $AM = m$ — медиана треугольника ABC, p_1 и r — полупериметр и радиус окружности, вписанной в треугольник ACM, а p_2 и $2r$ — полупериметр и радиус окружности, вписанной в треугольник ABM (см. рис. 11.3).

Площади треугольников ABM и ACM равны, следовательно $p_1\cdot r = p_2\cdot 2r$, то есть $p_1 = 2p_2$. Получим: $\dfrac{m + AC + CM}{2} = m + AB + BM$ $(*)$. Так как $BM = CM$, то $AC = m + 2AB + CM > m + CM$. Это противоречит неравенству треугольника для $\triangle AMC$: $AC < m + CM$.

$+$ *полное обоснованное решение*
$\pm$ *верное решение с недочетами в обоснованиях*

$+/2$ верно получено равенство $*$, после чего сразу сделан вывод (без явного использования неравенства треугольника)

$\mp$ верно получено равенство $*$, после чего сразу сделан неверный вывод

$-$ только верный ответ

4. Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(2007)$, если $f\left(\dfrac{1}{2007}\right) = 1$.

Ответ: -1.

Первый способ. При $y = 1$ данное равенство примет вид: $f(x) = f(x) + f(1)$, следовательно, $f(1) = 0$. Пусть $x = 2007$, $y = \dfrac{1}{2007}$, тогда $f(1) = f(2007) + f\left(\dfrac{1}{2007}\right)$, то есть $f(2007) = -f\left(\dfrac{1}{2007}\right) = -1$.

Второй способ. Рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$f\left(\frac{1}{2007}\right) = f\left(\frac{1}{2007^2}\cdot 2007\right) = f\left(\frac{1}{2007^2}\right) + f(2007) = f\left(\frac{1}{2007}\right) + f\left(\frac{1}{2007}\right) + f(2007).$$

Следовательно, $f(2007) = -f\left(\dfrac{1}{2007}\right) = -1$.

Отметим, что простейшей из функций, удовлетворяющих условию, является логарифмическая функция, которую можно задать формулой $f(t) = \log_{\frac{1}{2007}} t$. Но эта функция — далеко не единственная из возможных, так как не задано условие непрерывности функции f (либо ее монотонности).

$+$ полное обоснованное решение

$\mp$ верный ответ получен с помощью логарифма

$\mp$ получено только равенство $f(1) = 0$

$-$ только верный ответ

5. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$. Найдите наибольшую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

Ответ: $\arcsin\dfrac{1}{3}$.

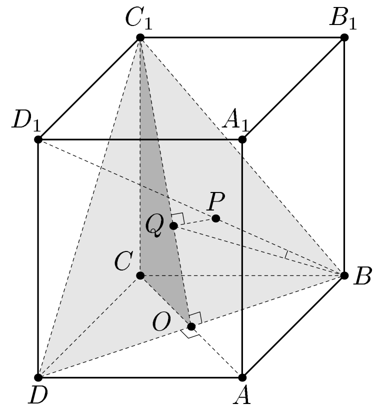

Рис. 11.5.1

Рассмотрим сечение BDC_1 данного параллелепипеда (см. рис. 11.5.1). Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Так как треугольник DC_1B — равнобедренный, то C_1O — его высота. Пусть P — точка пересечения диагоналей параллелепипеда, PQ — перпендикуляр к (BDC_1). Из того, что все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, следует, что точка P равноудалена от вершин треугольника DC_1B, поэтому Q — центр описанной около него окружности. Учитывая, что этот треугольник — остроугольный и равнобедренный, получим, что точка Q лежит на отрезке C_1O. Углом между (BD_1) и (BDC_1) будет являться острый угол α между (BD_1) и ее ортогональной проекцией на (BDC_1), то есть угол PBQ.

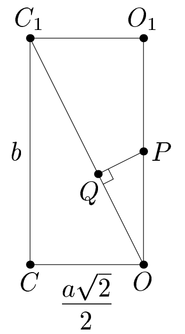

Рис. 11.5.2

Пусть $AB = a$, $AA_1 = b$. Тогда $PB = \dfrac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$. Длину PQ можно найти, рассмотрев, например, прямоугольник CC_1O_1O, где O_1 — точка пересечения диагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 11.5.2). Из подобия прямоугольных треугольников POQ и C_1OO_1 получим, что $\dfrac{PQ}{C_1O_1} = \dfrac{PO}{C_1O}$.

Так как $C_1O_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $C_1O = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} + b^2}$, то $PQ = \dfrac{\frac{b}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}} = \dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+2b^2}}$. Следовательно, $\sin\alpha = \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{ab}{\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}}$.

Величина острого угла α будет наибольшей т. и т. т., когда $\sin\alpha$ принимает наибольшее возможное значение. Для того, чтобы найти наибольшее значение полученного выражения, преобразуем его:

$$\sin\alpha = \frac{ab}{\sqrt{2a^4+2b^4+5a^2b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)+5}}.$$

Так как $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} \geqslant 2$, причем равенство достигается в случае $a = b$, то $\sin\alpha \leqslant \dfrac{1}{3}$ и наибольшее значение искомого угла $\alpha = \arcsin\dfrac{1}{3}$ соответствует тому, что данный параллелепипед является кубом.

Возможен также «векторно-координатный» способ решения, при котором вычисляется угол между направляющим вектором прямой BD_1 и нормалью к плоскости BDC_1. Этот угол дополняет искомый угол до 90°.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *верное решение с недочетами в обоснованиях*

$+/2$ *верный ход решения, но допущена негрубая вычислительная ошибка*

$+/2$ *верно и обоснованно вычислен искомый угол параллелепипеда, но не найдено его наибольшее значение*

$\mp$ *верный ответ, полученный из недоказанного предположения, что параллелепипед является кубом*

6. Решите уравнение: $(x^3-2)(2^{\sin x}-1)+(2^{x^3}-4)\sin x=0$.

Ответ: $\{\sqrt[3]{2}\}\bigcup\{\pi n \mid n\in Z\}$.

Из того, что функция $y=2^t$ возрастает, следует:

1) Если $\sin x>0$, то $2^{\sin x}-1>0$; если $\sin x<0$, то $2^{\sin x}-1<0$.

2) Если $x^3-2>0$, то $2^{x^3}-4>0$; если $x^3-2<0$, то $2^{x^3}-4<0$;

Следовательно, если $(x^3-2)(2^{\sin x}-1)>0$, то $(2^{x^3}-4)\sin x>0$; если $(x^3-2)(2^{\sin x}-1)<0$, то $(2^{x^3}-4)\sin x<0$; то есть знаки выражений $(x^3-2)(2^{\sin x}-1)$ и $(2^{x^3}-4)\sin x$ совпадают. Поэтому, каждое слагаемое в левой части уравнения должно обращаться в нуль, то есть данное уравнение равносильно совокупности: $x^3=2$ или $\sin x=0$.

$+$ *полное обоснованное решение*

$+/2$ *верная логика решения, но из равенства* $\sin x=0$ *сделан неверный вывод*: $x=2\pi n$, $n\in Z$.

$\mp$ *верный ответ, полученный из недоказанного предположения, что каждое слагаемое равно нулю*

7. Даны таблица 100×100 клеток и N фишек. Рассматриваются все расстановки фишек в клетки таблицы, удовлетворяющие условию: никакие две фишки не стоят в соседних клетках. При каком наименьшем N существует такая расстановка, что при перемещении любой из фишек в любую соседнюю клетку заданное условие нарушится? (*Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону*).

Ответ: при $N=100$.

Заметим, что существует такая расстановка ста фишек, при которой перемещение любой фишки в соседнюю клетку нарушает требуемое условие. Например, если все фишки стоят на клетках большой диагонали (см. рис. 11.7).

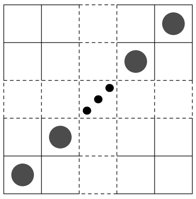

Рис. 11.7

Далее можно рассуждать двумя способами.

Первый способ. Назовем расстановку фишек «жесткой», если перемещение любой фишки в соседнюю клетку нарушает требуемое условие. Докажем, что любая расстановка, в которой меньше, чем сто фишек, не является «жесткой». Пусть это не так, и существует «жесткая» расстановка, в которой количество фишек меньше, чем количество столбцов (и меньше, чем количество строк). Тогда в таблице найдутся пустые столбцы, пусть их количество равно s. Два пустых столбца не могут быть соседними и пустой столбец не может быть крайним, так как в этих случаях в такие столбцы можно будет передвинуть фишку, не нарушая требуемого условия. Таким образом, слева от пустого столбца есть хотя бы одна фишка. Так как ее нельзя сдвинуть вправо в этот пустой столбце, то это означает, что в той же строке справа от пустого столбца стоит другая фишка. Таким образом, для каждой такой «левой» фишки найдется «правая» фишка, стоящая в той же строке. «Левых» фишек не может быть меньше, чем s, следовательно и «правых» фишек — не меньше, чем s. Поскольку всего фишек не больше, чем 99, то они занимают не более, чем $(99-s)$ строк, следовательно, не менее, чем $100-(99-s)=s+1$ строк останутся свободными. Так как $s+1>s$, то тем самым доказано, что свободных строк в таблице больше, чем свободных столбцов.

Поскольку столбцы и строки в таблице равноправны, то рассуждая аналогично, можно доказать, что количество пустых столбцов строго больше, чем количество пустых строк. Такое противоречие показывает, что наше предположение неверно, и любая расстановка, в которой меньше, чем сто фишек, «жесткой» не является.

Второй способ. Докажем, что меньше чем 100 фишками обойтись нельзя. Предположим, что можно обойтись не более, чем 99 фишками. Тогда по принципу Дирихле существует пустой столбец. Он разбивает доску на две части (при этом возможно, какая-то часть окажется пустой). Если в одной из этих частей нет фишек, то можно сдвинуть фишку из другой части, ближайшую к этому столбцу, в его направлении, тогда у нее не будет соседей.

Предположим теперь, что в каждой из двух частей, на которые разбивает доску пустой столбец, есть фишки. Тогда, по принципу Дирихле, в части с меньшим количеством фишек есть по крайней мере 2 подряд идущие пустые строки. Переместим в направлении этих строк фишку, ближайшую к ним и получим противоречие.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ответ и пример «жесткой» расстановки ста фишек*

$-$ *только верный ответ*