5 класс

1. Петя и Вася участвовали в велогонке. Все участники стартовали одновременно и показали на финише различное время. Петя финишировал сразу после Васи и оказался на десятом месте. Сколько человек участвовало в гонке, если Вася был пятнадцатым с конца?

Ответ: 23 человека.

Так как Петя оказался на десятом месте, а Вася финишировал перед ним, то Вася занял девятое место. Вася был пятнадцатым с конца, значит за ним финишировало еще четырнадцать человек. Следовательно, в гонке участвовало 23 человека.

Это же решение можно было оформить в виде таблицы:

Место	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Участник									В	П													
Место с конца									15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *только верный ответ*

2. Разделите круг тремя прямолинейными разрезами на: а) 4 части; б) 5 частей; в) 6 частей; г) 7 частей.

Ответ: например, см. рис. 5.2:

$+$ *верно решены все четыре пункта*

$\pm$ *верно решены любые три пункта*

$+/2$ *верно решены любые два пункта*

$\mp$ *верно решен только один пункт*

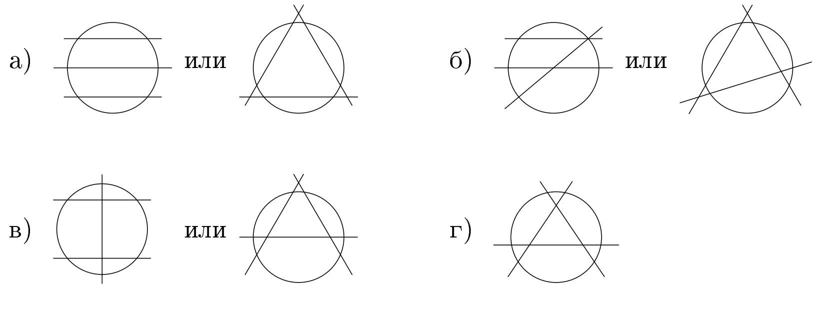


Рис. 5.2

3. Четырехзначное число начинается с цифры 6. Эту цифру переставили в конец числа. Полученное число оказалось на 1152 меньше исходного. Найдите исходное число.

Ответ: 6538.

Запишем условие задачи в виде ребуса, например: $-\begin{array}{cccc} 6 & A & B & C \\ A & B & C & 6 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}$. Тогда $C = 8$ и пример принимает вид: $-\begin{array}{cccc} 6 & A & B & 8 \\ A & B & 8 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}$. Следовательно, $B = 3$ и пример имеет следуюший вид: $-\begin{array}{cccc} 6 & A & 3 & 8 \\ A & 3 & 8 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}$. Поскольку произошел переход через разряд, то $A = 5$: $-\begin{array}{cccc} 6 & 5 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 8 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}$.

$+$ *приведен верный ответ и объяснено, как он получился*

$\pm$ *только верный ответ*

4. Коля и его сестра Маша пошли в гости. Пройдя четверть пути, Коля вспомнил, что они забыли дома подарок и повернул обратно, а Маша пошла дальше. Маша пришла в гости через 20 минут после выхода из дома. На сколько минут позже пришел в гости Коля, если известно, что они все время шли с одинаковыми скоростями?

Ответ: на 10 минут.

Так как Коля возвращался домой, то прошел «лишнюю» половину пути. Значит, время опоздания равно половине времени, потраченного на весь путь, то есть равно 10 минутам.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *только верный ответ*

5. На столе в ряд лежат четыре монеты. Среди них обязательно есть как настоящие, так и фальшивые (которые легче настоящих). Известно, что любая настоящая монета лежит левее любой фальшивой. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить тип каждой монеты, лежащей на столе?

Пронумеруем монеты слева направо. Так как среди монет есть обязательно настоящая и фальшивая, то первая монета настоящая, а четвертая — фальшивая. Необходимо определить вид второй и третьей монет. Настоящие монеты лежат левее фальшивых, значит возможны следующие случаи: 1) настоящая, настоящая, настоящая, фальшивая; 2) настоящая, настоящая, фальшивая, фальшивая; 3) настоящая, фальшивая, фальшивая, фальшивая.

Положим на левую чашу весов первую и четвертую монеты, а на правую чашу весов — вторую и третью монеты.

1) Если правая чаша перевесила, то на ней лежат только настоящие монеты, т. е. вторая и третья монеты — настоящие.

2) Если весы находятся в равновесии, то на каждой чаше лежат настоящая и фальшивая монеты, т. е. вторая монета — настоящая, а третья — фальшивая.

3) Если левая чаша перевесила, то на правой чаше лежат только фальшивые монеты, т. е. вторая и третья монеты — фальшивые.

$+$ *полное решение*

$+/2$ *верно выбраны группы монет для взвешивания, но отсутствуют рассуждения по определению вида каждой монеты или потеряны какие-либо случаи*

6 класс

1. Дима пишет подряд натуральные числа: 123456789101112…. На каких местах, считая от начала, в первый раз будут стоять три цифры 5 подряд?

Ответ: 100, 101, 102.

До того, как было записано число 50, цифра 5 встречалась только в разряде единиц, поэтому даже двух пятерок подряд быть не могло. Три цифры 5 подряд в первый раз встретятся в сочетании …5354**555**657….

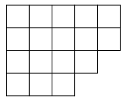
Номера мест, на которых стоят эти три цифры 5, можно вычислить, либо непосредственно выписав весь ряд, либо следующим образом: от 1 до 9 в ряду стоят 9 цифр, а от 10 до 54 — 45 двузначных чисел, то есть 90 цифр. Всего до первой нужной цифры 5 стоят 99 цифр. Таким образом, три цифры 5 стоят на 100, 101 и 102 местах.

+ *приведен верный ответ и любой вид подсчета мест*

$\pm$ *только верный ответ*

+/2 *верный ход решения, но есть ошибка в вычислениях*

2. Вырежьте из фигуры, изображенной на рисунке, одну клетку и разрежьте оставшуюся фигуру на четыре равные части.



Ответ: существует много различных решений. На рисунке 6.2 приведены два из них.

Рис. 6.2

+ *любое верное решение*

$\mp$ *верно отмечена клетка, которую можно вырезать, но не показано, как разрезать оставшуюся фигуру на четыре равные части*

3. За 2 секунды мама-кенгуру делает три прыжка, а кенгуренок — пять прыжков. Длина прыжка мамы-кенгуру 6 метров, а длина прыжка кенгуренка в 3 раза меньше. Мама с кенгуренком играют в догонялки: кенгуренок отпрыгивает на 12 прыжков, после чего мама начинает его догонять, а он прыгает дальше. За какое время мама его догонит?

Ответ: за 6 секунд.

Первый способ. За две секунды мама-кенгуру делает 3 прыжка, длина которых в три раза больше прыжка кенгуренка, то есть отпрыгивает на 9 прыжков кенгуренка. Значит, за две секунды расстояние между мамой и кенгуренком сокращается на 4 прыжка кенгуренка. Между ними было 12 прыжков кенгуренка, следовательно, маме понадобится 6 секунд, чтобы его догнать.

Второй способ. Из условия задачи следует, что мама-кенгуру за 2 секунды преодолевает 18 метров, а кенгуренок — 10 метров. Следовательно, за одну секунду мама преодолеет 9 метров, а кенгуренок — 5 метров. Между ними изначально было 12 прыжков кенгуренка, то есть, 24 метра. За 1 секунду расстояние между ними сокращается на 4 метра, следовательно, маме понадобится $24 : 4 = 6$ секунд для того, чтобы догнать кенгуренка.

Отметим, что в задаче есть избыточные данные: при решении задачи первым способом не используется длина прыжка мамы-кенгуру.

+! *школьник, верно решив задачу первым способом, указал на избыточность условия*

+ *любое верное обоснованное решение*

$\pm$ *верный ход решения, но есть ошибка в вычислениях*

$\mp$ *только какие-нибудь верные идеи по решению*

$\mp$ *только верный ответ*

4. Маша считает, что два арбуза тяжелее трех дынь, Аня считает, что три арбуза тяжелее четырех дынь. Известно, что одна из девочек права, а другая ошибается. Верно ли, что 12 арбузов тяжелее 18 дынь? Обоснуйте ответ. *Считается, что все арбузы весят одинаково и все дыни весят одинаково.*

Ответ: нет, не верно.

Машино высказывание равносильно тому, что шесть арбузов тяжелее девяти дынь. Анино высказывание — тому, что шесть арбузов тяжелее восьми дынь. Поэтому если права Маша, то права и Аня. Но обе они правы быть не могут по условию. Значит, Аня права, а Маша ошибается. То есть шесть арбузов тяжелее восьми дынь, но не тяжелее девяти. Следовательно, двенадцать арбузов тяжелее шестнадцати дынь, но не тяжелее восемнадцати.

+ *верное решение*

+/2 *верно обосновано только то, что Аня права, а Маша нет*

$-$ *приведён только верный ответ*

5. Люди заходят с улицы в метро равномерно. Пройдя через турникеты, они оказываются в небольшом зале перед эскалаторами. Двери на вход только что открылись, и сначала зал перед эскалаторами был пустой, а на спуск работал только один эскалатор. Один эскалатор не справлялся с толпой, так что за 6 минут зал наполовину заполнился. Тогда включили на спуск второй эскалатор, но толпа продолжала увеличиваться — ещё через 15 минут зал был полон. За какое время зал опустеет, если включить третий эскалатор?

Ответ: за 1 час.

При одном включённом эскалаторе за минуту заполняется $\frac{1}{6}$ от половины зала. При двух включённых эскалаторах за минуту заполняется $\frac{1}{15}$ от половины зала. Разница $\frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10}$ показывает, какую часть от половины зала опустошает за минуту один эскалатор. Когда включат третий эскалатор, толпа начнёт убывать со скоростью $\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$ от половины зала за минуту. Следовательно, половина зала освободится через 30 минут, а весь зал — через 1 час.

$+$ *верное решение*

$\pm$ *верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка*

$+/2$ *верно найдена только «производительность» каждого эскалатора*

$+/2$ *задача решена на конкретном примере (введено конкретное количество людей и т. п.)*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

7 класс

1. В равенстве $(ay^b)^c = -64y^6$ замените a, b и c целыми числами, отличными от 1, так, чтобы получилось тождество.

Ответ: существует единственное решение: $(-4y^2)^3 = -64y^6$.

$+$ *приведен верный пример (доказывать единственность не требуется)*

2. После того, как Наташа съела треть персиков из банки, уровень компота понизился на одну четверть. На сколько (относительно нового уровня) понизится уровень компота, если съесть все оставшиеся персики?

Ответ: на две трети.

Поскольку треть персиков составляют одну четвертую объема банки, то все персики составляют три четвертых всего объема. Следовательно, после съедания всех персиков, уровень компота понизится на половину всей банки, то есть на две трети по сравнению с предыдущим уровнем.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *если обоснованно дан ответ «останется $\frac{1}{4}$ банки»*

$\mp$ *только верный ответ*

3. На столе лежат в ряд пять монет: средняя — орлом вверх, а остальные — решкой вверх. За одну операцию разрешается одновременно перевернуть ровно три монеты, лежащие рядом. Можно ли, выполнив такую операцию несколько раз, добиться того, чтобы все пять монет лежали орлом вверх?

Ответ: да, можно.

Сначала перевернём первые 3 монеты, тогда первые две будут лежать орлом вверх, а следуюшие три — решкой вверх. Теперь перевернем последние три монеты, в результате все пять монет лягут орлом вверх.

$+$ *полное решение*

$-$ *только верный ответ*

4. Подойдя к незнакомому одноподъездному дому и думая, что на каждом этаже по шесть квартир, Аня решила, что нужная ей квартира находится на четвертом этаже. Поднявшись на четвертый этаж, Аня обнаружила, что нужная ей квартира действительно находится там, несмотря на то, что на каждом этаже по семь квартир. Каким мог быть номер квартиры, в которую шла Аня?

Ответ: 22, 23 или 24.

Если на этаже — по шесть квартир, то на четвертом этаже будут квартиры с номерами: 19, 20, 21, 22, 23 и 24. Если на этаже — по семь квартир, то на четвертом этаже будут квартиры с номерами: 22, 23, 24, 25, 26, 27 и 28. Следовательно, Аня могла идти в одну из квартир: 22, 23 или 24.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *только верный ответ*

$-$ *приведен только неполный ответ*

5. На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Его требуется разбить на 5 частей одинаковой площади, проводя отрезки внутри квадрата только по линиям сетки. Может ли оказаться так, что суммарная длина проведенных отрезков не превосходит 16 клеток?

Ответ: да, может. Один из возможных примеров приведен на рисунке 7.5 (суммарная длина проведенных отрезков равна 16).

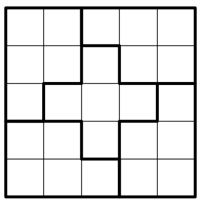


Рис. 7.5

$+$ *верное решение*

$-$ *только ответ*

8 класс

1. Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили 2007. Каким могло быть исходное число?

Ответ: любое натуральное число от 2010 до 2019.

Несложно убедиться, что искомое число должно быть четырехзначным. Пусть оно равно $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. Тогда $1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = 999a + 99b + 9c = 9(111a + 11b + c)$. Получим уравнение: $9(111a + 11b + c) = 2007 \Leftrightarrow 111a + 11b + c = 223$. Перебором убеждаемся, что $a > 1$ и $a < 3$, то есть, $a = 2$. Тогда $11b + c = 1$. Поскольку b и c — цифры, то $b = 0$ и $c = 1$. Отметим, что d может быть любой цифрой.

$+$ *верное обоснованное решение*

$+/2$ *верно найдены цифры a, b и c, но не указано, что цифра d может быть любой*

$\mp$ *верный ответ*

$-$ *неполный ответ без обоснования*

2. Числа a, b и c отличны от нуля и выполняются равенства: $a + \dfrac{b}{c} = b + \dfrac{c}{a} = c + \dfrac{a}{b} = 1$. Докажите, что $ab + bc + ca = 0$.

Умножив обе части равенства $a + \dfrac{b}{c} = 1$ на c, получим, что $ac + b = c$, откуда $ac = c - b$. Действуя аналогично, получим, что $ba = a - c$ и $cb = b - a$. Сложим полученные равенства: $ab + bc + ca = (a - c) + (b - a) + (c - b) = 0$, что и требовалось.

Отметим, что попытка решить систему трех уравнений с тремя переменными, вряд ли приведет к успеху.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *присутствует только идея рассмотрения трех равенств по отдельности*

3. Середину более длинной боковой стороны прямоугольной трапеции соединили с вершинами трапеции. При этом трапеция разделилась на три равнобедренных треугольника. Найдите величину острого угла трапеции.

Ответ: $72°$.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD и BC — ее основания ($AD > BC$), $AB \perp AD$. Тогда $CD > AB$, и $\angle ADC$ — искомый острый угол (см. рис. 8.3). Пусть M — середина CD, а MN — средняя линия трапеции. Тогда $MN \perp AB$, поэтому в треугольнике AMB высота совпадает с медианой, следовательно, $AM = MB$. Так как треугольник BCM равнобедренный, а $\angle BCM$ тупой, то $BC = CM = MD$. Поскольку треугольник AMD равнобедренный и $AD > BC$, то $AD = AM$.

$\angle MAD = 90° - \angle MAB = 90° - \angle MBA = \angle MBC = \alpha$. Тогда $\angle BCM = 180° - 2\alpha$ и $\angle ADM = \dfrac{180° - \alpha}{2}$. Так как $\angle BCM + \angle ADM = 180°$, то $180° - 2\alpha + \dfrac{180° - \alpha}{2} = 180°$, откуда $\alpha = 36°$. Тогда $\angle ADC = 72°$.

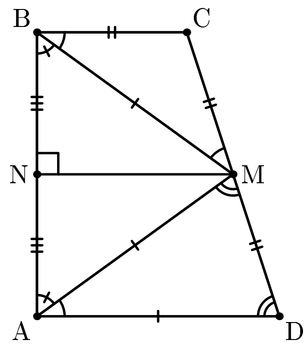


Рис. 8.3

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное решение, но не обосновано какие стороны являются основаниями равнобедренных треугольников*

$\mp$ *только верный ответ*

4. Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Ему хочется пройтись до следующей остановки. Мальчик бегает вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии 2 км. До следующей остановки ровно километр. Имеет ли смысл идти, или есть риск упустить автобус?

Ответ: имеет смысл идти.

Пусть мальчик пошел к следующей остановке и в какой-то момент заметил автобус. Скорость автобуса в четыре раза больше скорости мальчика, поэтому за одно и то же время автобус проезжает расстояние в четыре раза большее. Пусть мальчик пробежит x км, тогда автобус проедет $4x$ км. В случае, если они двигаются навстречу друг другу, до встречи с автобусом мальчик пробежит $\dfrac{2}{5}$ км (см. рис. 8.4.1). Это означает, что отойдя от остановки не более, чем на $\dfrac{2}{5}$ км, мальчик сможет успеть на автобус, побежав назад.

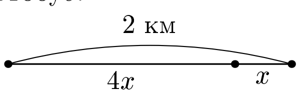


Рис. 8.4.1

В случае, если автобус догоняет мальчика, мальчик успеет пробежать $\dfrac{2}{3}$ км до момента, когда автобус его догонит (см. рис. 8.4.2). Это означает, что он сможет успеть на автобус, если до следующей остановки осталось не более $\dfrac{2}{3}$ км, то есть, если он успел пройти не менее $\dfrac{1}{3}$ км до момента, когда заметил автобус. Так как $\dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{5}$, то у мальчика всегда будет возможность успеть на автобус и имеет смысл идти.

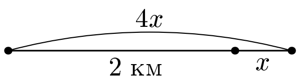


Рис. 8.4.2

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *приведены некоторые вычисления без пояснений и дан верный ответ*

$-$ *только верный ответ*

5. На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $AD : DC = 1 : 2$. Докажите, что у треугольников ADB и CDB есть по равной медиане.

Пусть K и M — середины BD и BC соответственно (см. рис. 8.5). Тогда по теореме о средней линии треугольника $KM || DC$ и $KM = \dfrac{1}{2}DC$, то есть $KM || AD$ и $KM = AD$. Это означает, что $AKMD$ — параллелограмм, а тогда $AK = DM$. Это и есть искомые равные медианы.

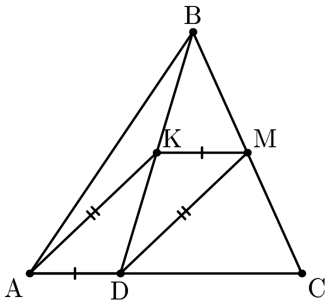


Рис.8.5

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верно указаны равные медианы в треугольниках, но отсутствует доказательство*

6. На некоторых клетках шахматной доски лежит по конфете. Известно, что в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) лежит чётное количество конфет (возможно, ни одной). Какое максимальное количество конфет может лежать на доске?

Ответ: 48.

Среди диагоналей доски есть такие, которые содержат нечётное количество клеток. Таких диагоналей шестнадцать: восемь белых и столько же чёрных (см. рис. 8.6.1). На каждой такой диагонали есть хотя бы одна пустая клетка, при этом никакие две диагонали общих клеток не имеют. Таким образом, пустых клеток не менее шестнадцати. Следовательно, клеток с конфетами не более 48. Пример для 48 конфет приведён на рисунке (см. рис. 8.6.2).

$+$ *верное обоснованное решение*

$+/2$ *приведена верная оценка количество конфет, но не приведен пример*

$\mp$ *приведен только пример*

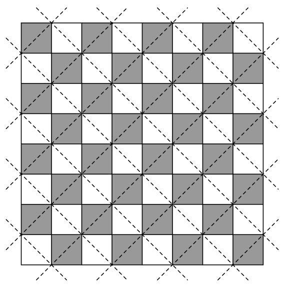


Рис. 8.6.1

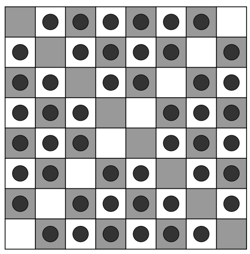


Рис. 8.6.2

9 класс

1. Существует ли натуральное число, кратное 2007, сумма цифр которого равна 2007?

Ответ: да, существует.

Заметим, что $2007 = 3^2 \cdot 223$. Поэтому число $200720072007\ldots2007$ (число 2007 повторяется 223 раза) удовлетворяет условию задачи.

Существуют и другие примеры.

$+$ *приведен верный пример*

$-$ *только верный ответ*

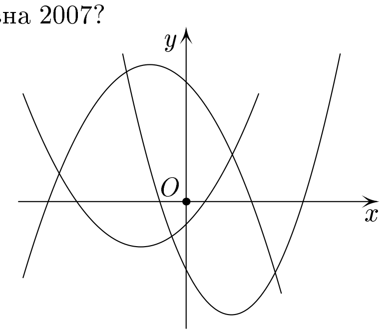


Рис. 9.2

2. На рисунке изображены графики трех квадратных трехчленов. Можно ли подобрать такие числа a, b и c, чтобы это были графики трехчленов $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ и $y = cx^2 + ax + b$?

Ответ: нет, нельзя.

Первый способ. У двух парабол "ветви" направлены вверх, а у одной — вниз, поэтому у двух трехчленов старший коэффициент положительный, а у одного — отрицательный. Следовательно, среди трех чисел a, b и c должны быть два положительных числа и одно отрицательное. С другой стороны, две из рассматриваемых парабол пересекают ось Oy в точках с отрицательными ординатами, а третья — в точке с положительной ординатой, поэтому у двух трехчленов свободный член отрицательный, а у одного — положительный. Следовательно, среди трех чисел a, b и c должны быть два отрицательных числа и одно положительное. Полученное противоречие показывает, что ситуация, описанная в условии задачи, невозможна.

Второй способ. Каждая из данных парабол должна проходить через точку с координатами $(1, a + b + c)$, что не соответствует условию (см. рис. 9.2).

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верно определены только знаки старших коэффициентов*

$-$ *только верный ответ*

3. Несколько школьников ходили за грибами. Школьник, набравший наибольшее количество грибов, собрал $\frac{1}{5}$ общего количества грибов, а школьник, набравший наименьшее количество грибов, собрал $\frac{1}{7}$ часть от общего количества. Сколько было школьников?

Ответ: шесть.

Первый способ. Пусть было собрано x грибов и было n школьников. Тогда каждый школьник собрал не менее, чем $\frac{x}{7}$ и не более, чем $\frac{x}{5}$ грибов. Значит, все школьники собрали не менее, чем $\frac{x}{7} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7}(n-2)$ грибов, но не более, чем $\frac{x}{7} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5}(n-2)$ грибов. Таким образом, выполняется неравенство: $\frac{x}{7} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7}(n-2) \leqslant x \leqslant \frac{x}{7} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5}(n-2)$. Упростив его, получим: $\frac{n}{7} + \frac{2}{35} \leqslant 1 \leqslant \frac{n}{5} - \frac{2}{35}$, то есть, $5\frac{2}{7} \leqslant n \leqslant 6\frac{3}{5}$. Учитывая, что n — целое, получим, что $n = 6$.

Второй способ. Так как количество грибов — целое, то оно должно делиться на 5 и на 7, то есть, должно делиться на 35. Пусть было $35k$ грибов ($k \in N$). Тогда первый собрал $7k$ грибов, последний — $5k$ грибов, а остальные школьники собрали $23k$ грибов. Каждый из оставшихся школьников собрал не меньше, чем $5k$ грибов, но не больше, чем $7k$ грибов. Следовательно, оставшихся грибников больше, чем $\frac{23k}{7k} > 3$, но меньше, чем $\frac{23k}{5k} < 5$. Таким образом, их четверо, а всего было шесть школьников.

Отметим, что рассматриваемый случай возможен, например, если школьники собрали $5k$, $5k$, $6k$, $6k$, $6k$ *и* $7k$ *грибов соответственно.*

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *проведены верные выкладки, но отсутствуют пояснения*

$+/2$ *верно составлено неравенство или верно сделана оценка, но допущена вычислительная ошибка*

$\mp$ *верный ответ, полученный на основании частных случаев, либо верный ответ с проверкой*

$-$ *только верный ответ*

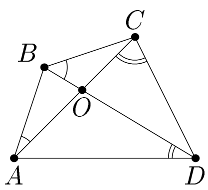


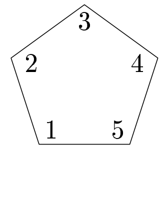
Рис. 9.4

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняются равенства: $\angle CBD = \angle CAB$ и $\angle ACD = \angle ADB$. Докажите, что из отрезков BC, AD и AC можно сложить прямоугольный треугольник.

Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle BOC$ (по двум углам). Следовательно, $\frac{BC}{OC} = \frac{AC}{BC}$, откуда $BC^2 = AC \cdot OC$. Аналогично, из подобия треугольников ACD и ADO, получим равенство $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AO}$, откуда $AD^2 = AC \cdot AO$. Сложим полученные равенства: $BC^2 + AD^2 = AC \cdot OC + AC \cdot AO = AC^2$. Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, из отрезков BC, AD и AC можно сложить прямоугольный треугольник.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верно указаны только подобные треугольники*



5. Дан набор одинаковых правильных пятиугольников, при вершинах каждого из которых записаны натуральные числа от 1 до 5, как показано на рисунке. Пятиугольники можно поворачи-

вать и переворачивать. Их сложили в стопку (вершина к вершине), и оказалось, что при каждой из пяти вершин суммы чисел одинаковы. Сколько пятиугольников могло быть в этой стопке?

Ответ: количество пятиугольников в стопке могло быть любым натуральным числом, кроме 1 и 3.

Сложим в стопку два пятиугольника, перевернув при этом один из них, и совместим их следующими цифрами: 1-5, 2-4, 3-3, 4-2 и 5-1. Тогда мы получим стопку, удовлетворяющую условию. Назовём её "двойкой".

Сложим в стопку пять пятиугольников, повёрнув их по отношению друг к другу так, чтобы совместились цифры 1-2-3-4-5, 2-3-4-5-1 и так далее. Тогда мы получим стопку, также удовлетворяющую условию. Назовём ее "пятёркой".

Любое чётное количество пятиугольников в стопке можно получить, последовательно складывая "двойки". Любое нечётное количество пятиугольников, большее трех, можно получить, из одной "пятёрки" и нужного количества "двоек".

Заметим, что стопка из одного пятиугольника условию не удовлетворяет.

Докажем, что нельзя составить стопку, удовлетворяющую условию, из трех пятиугольников. Действительно, в каждом пятиугольнике цифры, записанные при соседних вершинах, различаются либо на 1, либо на 4. Предположим, что в стопке из трех пятиугольников суммы чисел, записанных при двух соседних вершинах, оказались равными, то есть, $x_1+x_2+x_3=(x_1\pm a_1)+(x_2\pm a_2)+(x_3\pm a_3)$, где слева записана сумма чисел при одной из вершин, а справа — сумма чисел при соседней вершине (a_i может равняться только 1 или 4). Перебором убеждаемся в том, что это равенство верным быть не может (перебор можно сократить, используя идею четности).

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верное решение и ответ, но есть неточности в обоснованиях*

$+/2$ *верное решение, но не доказано, что нельзя составить стопку из трех пятиугольников*

$+/2$ *доказано, что из трех пятиугольников составить стопку нельзя, но не показано, как составить стопку в остальных случаях*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle A=\angle B=\angle D=90^\circ$. Найдите угол ADB, если известно, что в данный пятиугольник можно вписать окружность.

Ответ: 45°.

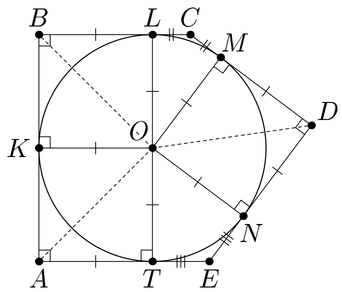


Рис. 9.6

Пусть O — центр окружности, вписанной в пятиугольник (см. рис. 9.6). Проведем перпендикуляры OK, OL, OM, ON и OT к сторонам AB, BC, CD, DE и EA соответственно. Так как проведенные отрезки являются радиусами окружности, то четырехугольники $AKOT$, $KBLO$ и $OMDN$ — равные квадраты.

Дальнейшее рассуждение можно провести двумя способами.

Первый способ. Диагонали OA, OB и OD рассмотренных квадратов равны, поэтому O — центр окружности, описанной около треугольника ADB. Следовательно, $\angle ADB=\frac{1}{2}\angle AOB=45^\circ$.

Второй способ. Сумма внутренних углов выпуклого пятиугольника равна $180^\circ\cdot 3=540^\circ$. Следовательно, $\angle AED+\angle BCD=540^\circ-270^\circ=270^\circ$. Из равенства сторон рассмотренных квадратов и свойства отрезков касательных (см. рис. 9.6) получим, что $AE=ED$ и $BC=CD$. Следовательно, треугольники AED и BCD — равнобедренные. Тогда $\angle EDA=\dfrac{180^\circ-\angle AED}{2}$ и $\angle CDB=\dfrac{180^\circ-\angle BCD}{2}$. Следовательно, $\angle EDA+\angle CDB= =180^\circ-\dfrac{\angle AED+\angle BCD}{2}=45^\circ$. Таким образом, $\angle ADB=45^\circ$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ответ получен из рассмотрения частного случая* $(DC=DE)$

$-$ *только верный ответ*

10 класс

1. Может ли вершина параболы $y = 4x^2 - 4(a+1)x + a$ лежать во второй координатной четверти при каком-нибудь значении a?

Ответ: нет, не может.

Координаты вершины параболы $x_0 = \dfrac{a+1}{2}$, $y_0 = 4\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)^2 - 4(a+1)\dfrac{a+1}{2} + a = -a^2 - a - 1 = -\Big(a+\dfrac{1}{2}\Big)^2 - \dfrac{3}{4}$. Так как $y_0 < 0$ при любых значениях a, то во второй координатной четверти вершина параболы находиться не может.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ответ получен на основании частных случаев*

$-$ *только верный ответ*

2. Сторону AB треугольника ABC продолжили за вершину B и выбрали на луче AB точку A_1 так, что точка B — середина отрезка AA_1. Сторону BC продолжили за вершину C и отметили на продолжении точку B_1 так, что C — середина BB_1. Аналогично, продолжили сторону CA за вершину A и отметили на продолжении точку C_1 так, что A — середина CC_1. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 1.

Ответ: 7.

Проведем отрезки B_1A, C_1B и A_1C (см. рис. 10.2). Они являются медианами треугольников CB_1C_1, AC_1A_1 и BA_1B_1 соответственно. Воспользуемся тем, что медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника. Поэтому площади треугольников CB_1A и C_1B_1A равны. Кроме того, так как AC — медиана треугольника BAB_1, то равны площади треугольников CB_1A и ABC. То есть, площадь треугольника CB_1C_1 в два раза больше площади треугольника ABC и равна 2. Аналогичными рассуждениями получим, что площадь каждого из треугольников AC_1A_1 и BA_1B_1 также равна 2. Следовательно, площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7.

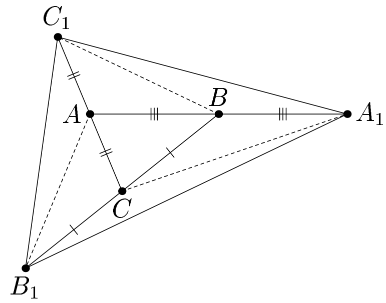


Рис. 10.2

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *только верный ответ*

3. Определите, на какую наибольшую натуральную степень числа 2007 делится 2007!
(*Напомним, что* $2007! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2005\cdot 2006\cdot 2007$).

Ответ: на девятую.

Разложим число 2007 на простые множители: $2007 = 3^2\cdot 223$. В разложении на простые множители числа 2007! показатель степени у числа 3 будет достаточно большим, так как множитель 3 входит в разложение каждого третьего числа. Множитель 223 входит только в разложение чисел вида $223p$, где p — натуральное число, не превосходящее 9. Таким образом, в разложение числа 2007! на простые множители число 223 войдет с показателем 9. Следовательно, число 2007! будет делиться на 2007^9, но не будет делиться на 2007^{10}.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *только верный ответ*

4. Пусть α и β — острые углы такие, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < 1$. Докажите, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2(\alpha+\beta)$.

1) Так как α и β — острые углы, то значения всех тригонометрических функций этих углов положительны. Из условия следует, что $\sin^2\alpha < 1 - \sin^2\beta = \cos^2\beta$ и $\sin^2\beta < 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$. Тогда $\sin\alpha < \cos\beta$ и $\sin\beta < \cos\alpha$, откуда $\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta$. Следовательно, $\cos(\alpha+\beta) > 0$ и $0 < \alpha+\beta < 90^\circ$.

2) Рассмотрим разность между правой и левой частью доказываемого неравенства:

$$\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \frac{1-\cos 2(\alpha+\beta)}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2} = \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta - (1+\cos 2(\alpha+\beta))}{2} =$$
$$= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) > 0$$

так как $\cos(\alpha-\beta) > \cos(\alpha+\beta)$ (функция $\cos x$ на рассматриваемом промежутке убывает).

Вторую часть доказательства можно провести иначе:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2(\alpha+\beta) \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha(\cos^2\beta - 1) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\beta(\cos^2\alpha - 1) > 0 \Leftrightarrow -2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) > 0 \Leftrightarrow 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) > 0.$$

Последнее неравенство выполняется, следовательно выполняется и доказываемое неравенство.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верно проведены рассуждения только в одной из двух частей доказательства*

5. В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. Каждая вершина и каждая точка пересечения диагоналей окрашены в синий цвет. Вася хочет перекрасить эти синие точки в красный цвет. За одну операцию ему

разрешается поменять цвет всех окрашенных точек, принадлежащих либо одной из сторон либо одной из диагоналей на противоположный (синие точки становятся красными, а красные — синими). Сможет ли он добиться желаемого, выполнив какое-то количество описанных операций?

Ответ: нет, не сможет.

Предположим, что такое возможно. Рассмотрим внутренний пятиугольник, образованный точками пересечений диагоналей исходного пятиугольника (см. рис. 10.5). Любая из разрешенных операций либо не изменяет цвет вершин этого пятиугольника, либо изменяет цвет ровно двух его вершин. Тем самым количество синих вершин внутреннего пятиугольника нечетно, то есть, перекрасить все указанные точки в красный цвет Вася не сможет.

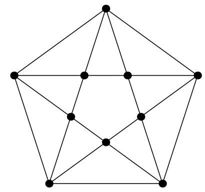


Рис. 10.5

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *задача не решена, но присутствует идея "четности"*

$-$ *только верный ответ*

6. Петя может располагать три отрезка в пространстве произвольным образом. После того как Петя расположит эти отрезки, Андрей пытается найти плоскость и спроектировать на нее отрезки так, чтобы проекции всех трех были равны. Всегда ли ему удастся это сделать, если:

а) три отрезка имеют равные длины?

б) длины двух отрезков равны между собой и не равны длине третьего?

Ответ: а) да, всегда; б) нет, не всегда.

а) Пусть Петя каким-либо образом расположил равные отрезки. Заметим, что параллельный перенос отрезка не меняет длину его проекции на любую плоскость. Поэтому Андрей может осуществить параллельный перенос Петиных отрезков таким образом, чтобы они имели общее начало O (см. рис. 10.6). Тогда искомой плоскостью является плоскость ABC, проходящая через другие концы отрезков. Таким образом, при ортогональном проектировании равных отрезков OA, OB и OC на эту плоскость их проекции $O'A$, $O'B$ и $O'C$ будут равны.

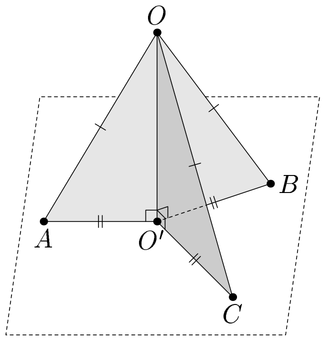


Рис. 10.6

Отметим, что если никакие два из исходных отрезков не были параллельными, то такая плоскость — единственная. Если же среди исходных отрезков были параллельные, то таких плоскостей много и можно проектировать на любую из них.

б) Если Петя расположит два неравных отрезка параллельно друг другу, а третий отрезок не параллельно им, то Андрей не сможет осуществить задуманное. Это следует из того, что при параллельном проектировании на любую плоскость сохраняется отношение длин параллельных отрезков (если проекции не являются точками). Если же проекции двух параллельных отрезков окажутся точками, то проекция третьего отрезка точкой не будет.

$+$ *верное обоснованное решение обоих пунктов*

$+/2$ *верное обоснованное решение любого из двух пунктов*

$\mp$ *задача не решена, но присутствует идея использования свойств параллельного проектирования*

$-$ *только верные ответы*