LXX Московская математическая олимпиада

Окружной тур **8 класс** 28.01.2007

1. Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили $\mathbf{2007}$. Каким могло быть исходное число?

2. Числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ отличны от нуля и выполняются равенства: $\boldsymbol{a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=1}$. Докажите, что $\boldsymbol{ab+bc+ca=0}$.

3. Середину более длинной боковой стороны прямоугольной трапеции соединили с вершинами трапеции. При этом трапеция разделилась на три равнобедренных треугольника. Найдите величину острого угла трапеции.

4. Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Ему хочется пройтись до следующей остановки. Мальчик бегает вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии $\mathbf{2}$ км. До следующей остановки ровно километр. Имеет ли смысл идти, или есть риск упустить автобус?

5. На стороне $\boldsymbol{AC}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$ взята точка $\boldsymbol{D}$ так, что $\boldsymbol{AD : DC = 1 : 2}$. Докажите, что у треугольников $\boldsymbol{ADB}$ и $\boldsymbol{CDB}$ есть по равной медиане.

6. На некоторых клетках шахматной доски лежит по конфете. Известно, что в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) лежит чётное количество конфет (возможно, ни одной). Какое максимальное количество конфет может лежать на доске?

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 4.03.2007. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXX Московская математическая олимпиада

Окружной тур **8 класс** 28.01.2007

1. Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили $\mathbf{2007}$. Каким могло быть исходное число?

2. Числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ отличны от нуля и выполняются равенства: $\boldsymbol{a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=1}$. Докажите, что $\boldsymbol{ab+bc+ca=0}$.

3. Середину более длинной боковой стороны прямоугольной трапеции соединили с вершинами трапеции. При этом трапеция разделилась на три равнобедренных треугольника. Найдите величину острого угла трапеции.

4. Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Ему хочется пройтись до следующей остановки. Мальчик бегает вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии $\mathbf{2}$ км. До следующей остановки ровно километр. Имеет ли смысл идти, или есть риск упустить автобус?

5. На стороне $\boldsymbol{AC}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$ взята точка $\boldsymbol{D}$ так, что $\boldsymbol{AD : DC = 1 : 2}$. Докажите, что у треугольников $\boldsymbol{ADB}$ и $\boldsymbol{CDB}$ есть по равной медиане.

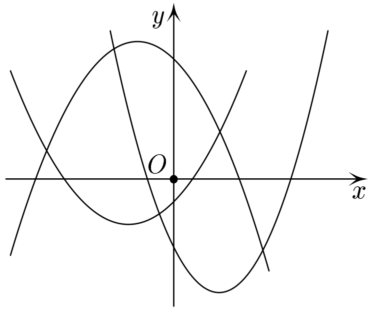
6. На некоторых клетках шахматной доски лежит по конфете. Известно, что в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) лежит чётное количество конфет (возможно, ни одной). Какое максимальное количество конфет может лежать на доске?

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 4.03.2007. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXX Московская математическая олимпиада

Окружной тур **9 класс** 28.01.2007

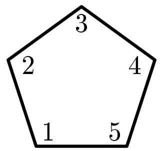
1. Существует ли натуральное число, кратное **2007**, сумма цифр которого равна **2007**?



2. На рисунке изображены графики трех квадратных трехчленов. Можно ли подобрать такие числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, чтобы это были графики трехчленов $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, $\boldsymbol{y = bx^2 + cx + a}$ и $\boldsymbol{y = cx^2 + ax + b}$?

3. Несколько школьников ходили за грибами. Школьник, набравший наибольшее количество грибов, собрал $\boldsymbol{\frac{1}{5}}$ общего количества грибов, а школьник, набравший наименьшее количество грибов, собрал $\boldsymbol{\frac{1}{7}}$ часть от общего количества. Сколько было школьников?

4. В выпуклом четырехугольнике $\boldsymbol{ABCD}$ выполняются равенства: $\boldsymbol{\angle CBD = \angle CAB}$ и $\boldsymbol{\angle ACD = \angle ADB}$. Докажите, что из отрезков $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{AD}$ и $\boldsymbol{AC}$ можно сложить прямоугольный треугольник.



5. Дан набор одинаковых правильных пятиугольников, при вершинах каждого из которых записаны натуральные числа от **1** до **5**, как показано на рисунке. Пятиугольники можно поворачивать и переворачивать. Их сложили в стопку (вершина к вершине), и оказалось, что при каждой из пяти вершин суммы чисел одинаковы. Сколько пятиугольников могло быть в этой стопке?

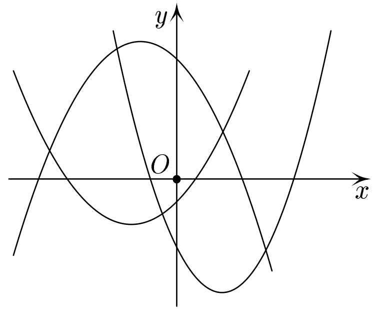
6. В выпуклом пятиугольнике $\boldsymbol{ABCDE}$ $\boldsymbol{\angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ}$. Найдите угол $\boldsymbol{ADB}$, если известно, что в данный пятиугольник можно вписать окружность.

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 4.03.2007. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXX Московская математическая олимпиада

Окружной тур **9 класс** 28.01.2007

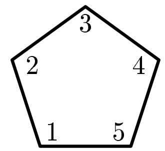
1. Существует ли натуральное число, кратное **2007**, сумма цифр которого равна **2007**?



2. На рисунке изображены графики трех квадратных трехчленов. Можно ли подобрать такие числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, чтобы это были графики трехчленов $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, $\boldsymbol{y = bx^2 + cx + a}$ и $\boldsymbol{y = cx^2 + ax + b}$?

3. Несколько школьников ходили за грибами. Школьник, набравший наибольшее количество грибов, собрал $\boldsymbol{\frac{1}{5}}$ общего количества грибов, а школьник, набравший наименьшее количество грибов, собрал $\boldsymbol{\frac{1}{7}}$ часть от общего количества. Сколько было школьников?

4. В выпуклом четырехугольнике $\boldsymbol{ABCD}$ выполняются равенства: $\boldsymbol{\angle CBD = \angle CAB}$ и $\boldsymbol{\angle ACD = \angle ADB}$. Докажите, что из отрезков $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{AD}$ и $\boldsymbol{AC}$ можно сложить прямоугольный треугольник.



5. Дан набор одинаковых правильных пятиугольников, при вершинах каждого из которых записаны натуральные числа от **1** до **5**, как показано на рисунке. Пятиугольники можно поворачивать и переворачивать. Их сложили в стопку (вершина к вершине), и оказалось, что при каждой из пяти вершин суммы чисел одинаковы. Сколько пятиугольников могло быть в этой стопке?

6. В выпуклом пятиугольнике $\boldsymbol{ABCDE}$ $\boldsymbol{\angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ}$. Найдите угол $\boldsymbol{ADB}$, если известно, что в данный пятиугольник можно вписать окружность.

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 4.03.2007. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXX Московская математическая олимпиада

Окружной тур **10 класс** 28.01.2007

1. Может ли вершина параболы $\boldsymbol{y = 4x^2 - 4(a+1)x + a}$ лежать во второй координатной четверти при каком-нибудь значении $\boldsymbol{a}$?

2. Сторону $\boldsymbol{AB}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$ продолжили за вершину $\boldsymbol{B}$ и выбрали на луче $\boldsymbol{AB}$ точку $\boldsymbol{A_1}$ так, что точка $\boldsymbol{B}$ — середина отрезка $\boldsymbol{AA_1}$. Сторону $\boldsymbol{BC}$ продолжили за вершину $\boldsymbol{C}$ и отметили на продолжении точку $\boldsymbol{B_1}$ так, что $\boldsymbol{C}$ — середина $\boldsymbol{BB_1}$. Аналогично, продолжили сторону $\boldsymbol{CA}$ за вершину $\boldsymbol{A}$ и отметили на продолжении точку $\boldsymbol{C_1}$ так, что $\boldsymbol{A}$ — середина $\boldsymbol{CC_1}$. Найдите площадь треугольника $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$, если площадь треугольника $\boldsymbol{ABC}$ равна $\mathbf{1}$.

3. Определите, на какую наибольшую натуральную степень числа $\mathbf{2007}$ делится $\mathbf{2007!}$
(*Напомним, что* $\mathbf{2007! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007}$).

4. Пусть $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ — острые углы такие, что $\boldsymbol{\sin^2\alpha + \sin^2\beta < 1}$. Докажите, что $\boldsymbol{\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2(\alpha+\beta)}$.

5. В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. Каждая вершина и каждая точка пересечения диагоналей окрашены в синий цвет. Вася хочет перекрасить эти синие точки в красный цвет. За одну операцию ему разрешается поменять цвет всех окрашенных точек, принадлежащих либо одной из сторон либо одной из диагоналей на противоположный (синие точки становятся красными, а красные — синими). Сможет ли он добиться желаемого, выполнив какое-то количество описанных операций?

6. Петя может располагать три отрезка в пространстве произвольным образом. После того как Петя расположит эти отрезки, Андрей пытается найти плоскость и спроектировать на нее отрезки так, чтобы проекции всех трех были равны. Всегда ли ему удастся это сделать, если:
а) три отрезка имеют равные длины?
б) длины двух отрезков равны между собой и не равны длине третьего?

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 4.03.2007. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXX Московская математическая олимпиада

Окружной тур **10 класс** 28.01.2007

1. Может ли вершина параболы $\boldsymbol{y = 4x^2 - 4(a+1)x + a}$ лежать во второй координатной четверти при каком-нибудь значении $\boldsymbol{a}$?

2. Сторону $\boldsymbol{AB}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$ продолжили за вершину $\boldsymbol{B}$ и выбрали на луче $\boldsymbol{AB}$ точку $\boldsymbol{A_1}$ так, что точка $\boldsymbol{B}$ — середина отрезка $\boldsymbol{AA_1}$. Сторону $\boldsymbol{BC}$ продолжили за вершину $\boldsymbol{C}$ и отметили на продолжении точку $\boldsymbol{B_1}$ так, что $\boldsymbol{C}$ — середина $\boldsymbol{BB_1}$. Аналогично, продолжили сторону $\boldsymbol{CA}$ за вершину $\boldsymbol{A}$ и отметили на продолжении точку $\boldsymbol{C_1}$ так, что $\boldsymbol{A}$ — середина $\boldsymbol{CC_1}$. Найдите площадь треугольника $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$, если площадь треугольника $\boldsymbol{ABC}$ равна $\mathbf{1}$.

3. Определите, на какую наибольшую натуральную степень числа $\mathbf{2007}$ делится $\mathbf{2007!}$
(*Напомним, что* $\mathbf{2007! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007}$).

4. Пусть $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ — острые углы такие, что $\boldsymbol{\sin^2\alpha + \sin^2\beta < 1}$. Докажите, что $\boldsymbol{\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2(\alpha+\beta)}$.

5. В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. Каждая вершина и каждая точка пересечения диагоналей окрашены в синий цвет. Вася хочет перекрасить эти синие точки в красный цвет. За одну операцию ему разрешается поменять цвет всех окрашенных точек, принадлежащих либо одной из сторон либо одной из диагоналей на противоположный (синие точки становятся красными, а красные — синими). Сможет ли он добиться желаемого, выполнив какое-то количество описанных операций?

6. Петя может располагать три отрезка в пространстве произвольным образом. После того как Петя расположит эти отрезки, Андрей пытается найти плоскость и спроектировать на нее отрезки так, чтобы проекции всех трех были равны. Всегда ли ему удастся это сделать, если:
а) три отрезка имеют равные длины?
б) длины двух отрезков равны между собой и не равны длине третьего?

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 4.03.2007. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo