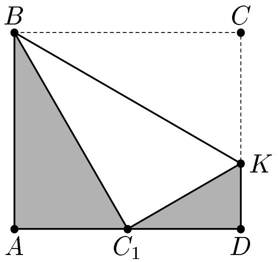
LXXI Московская математическая олимпиада

Окружной тур — 8 класс — 27.01.2008

1. Про числа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ известно, что $\boldsymbol{a = b + 1}$. Может ли оказаться так, что $\boldsymbol{a^4 = b^4}$?

2. Обозначим две какие-нибудь цифры буквами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{X}$. Докажите, что шестизначное число $\boldsymbol{XAXAXA}$ делится на $\boldsymbol{7}$ без остатка.

3. В 8 «Г» классе хватает двоечников, но Вовочка учится хуже всех. Педсовет решил, что либо Вовочка должен к концу четверти исправить двойки, либо его исключат. Если Вовочка исправит двойки, то в классе будет **24%** двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет **25%**. Какой процент двоечников в 8 «Г» сейчас?



4. Прямоугольный лист бумаги $\boldsymbol{ABCD}$ согнули так, как показано на рисунке. Найдите отношение $\boldsymbol{DK : AB}$, если $\boldsymbol{C_1}$ — середина $\boldsymbol{AD}$.

5. Шестнадцать футбольных команд из шестнадцати стран провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по одному матчу. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех странах, кроме своей родины?

6. На сторонах $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CA}$ равностороннего треугольника $\boldsymbol{ABC}$ выбраны точки $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ соответственно так, что $\boldsymbol{AP = CR}$. Точка $\boldsymbol{M}$ — середина отрезка $\boldsymbol{PR}$. Докажите, что $\boldsymbol{BR = 2AM}$.

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 9.03.2008. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

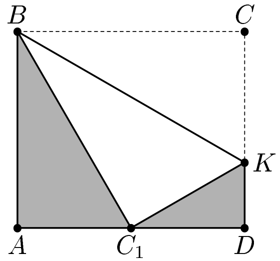
LXXI Московская математическая олимпиада

Окружной тур — 8 класс — 27.01.2008

1. Про числа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ известно, что $\boldsymbol{a = b + 1}$. Может ли оказаться так, что $\boldsymbol{a^4 = b^4}$?

2. Обозначим две какие-нибудь цифры буквами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{X}$. Докажите, что шестизначное число $\boldsymbol{XAXAXA}$ делится на $\boldsymbol{7}$ без остатка.

3. В 8 «Г» классе хватает двоечников, но Вовочка учится хуже всех. Педсовет решил, что либо Вовочка должен к концу четверти исправить двойки, либо его исключат. Если Вовочка исправит двойки, то в классе будет **24%** двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет **25%**. Какой процент двоечников в 8 «Г» сейчас?



4. Прямоугольный лист бумаги $\boldsymbol{ABCD}$ согнули так, как показано на рисунке. Найдите отношение $\boldsymbol{DK : AB}$, если $\boldsymbol{C_1}$ — середина $\boldsymbol{AD}$.

5. Шестнадцать футбольных команд из шестнадцати стран провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по одному матчу. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех странах, кроме своей родины?

6. На сторонах $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CA}$ равностороннего треугольника $\boldsymbol{ABC}$ выбраны точки $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ соответственно так, что $\boldsymbol{AP = CR}$. Точка $\boldsymbol{M}$ — середина отрезка $\boldsymbol{PR}$. Докажите, что $\boldsymbol{BR = 2AM}$.

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 9.03.2008. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXXI Московская математическая олимпиада

Окружной тур **9 класс** 27.01.2008

1. Пройдя $\boldsymbol{4/9}$ длины моста, пешеход заметил, что его догоняет машина, еще не въехавшая на мост. Тогда он повернул назад и встретился с ней у начала моста. Если бы он продолжил свое движение, то машина догнала бы его у конца моста. Найдите отношение скоростей машины и пешехода.

2. Существуют ли числа $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ такие, что уравнения $x^2+(p-1)x+q=0$ и $x^2+(p+1)x+q=0$ имеют по два различных корня, а уравнение $x^2+px+q=0$ не имеет корней?

3. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из точек B и C, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC.

4. В таблицу 4×4 записали натуральные числа. Могло ли оказаться так, что сумма чисел в каждой следующей строке на $\boldsymbol{2}$ больше, чем в предыдущей, а сумма чисел в каждом следующем столбце на $\boldsymbol{3}$ больше, чем в предыдущем?

5. M – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. На основании BC выбрана такая точка P, что $\angle APM=\angle DPM$. Докажите, что расстояние от точки C до прямой AP равно расстоянию от точки B до прямой DP.

6. Кольцевая дорога поделена столбами на километровые участки, и известно, что количество столбов чётно. Один из столбов покрашен в жёлтый цвет, другой — в синий, а остальные — в белый. Назовем расстоянием между столбами длину кратчайшей из двух соединяющих их дуг. Найдите расстояние от синего столба до жёлтого, если сумма растояний от синего столба до белых равна **2008** км.

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 9.03.2008. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXXI Московская математическая олимпиада

Окружной тур **9 класс** 27.01.2008

1. Пройдя $\boldsymbol{4/9}$ длины моста, пешеход заметил, что его догоняет машина, еще не въехавшая на мост. Тогда он повернул назад и встретился с ней у начала моста. Если бы он продолжил свое движение, то машина догнала бы его у конца моста. Найдите отношение скоростей машины и пешехода.

2. Существуют ли числа $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ такие, что уравнения $x^2+(p-1)x+q=0$ и $x^2+(p+1)x+q=0$ имеют по два различных корня, а уравнение $x^2+px+q=0$ не имеет корней?

3. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из точек B и C, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC.

4. В таблицу 4×4 записали натуральные числа. Могло ли оказаться так, что сумма чисел в каждой следующей строке на $\boldsymbol{2}$ больше, чем в предыдущей, а сумма чисел в каждом следующем столбце на $\boldsymbol{3}$ больше, чем в предыдущем?

5. M – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. На основании BC выбрана такая точка P, что $\angle APM=\angle DPM$. Докажите, что расстояние от точки C до прямой AP равно расстоянию от точки B до прямой DP.

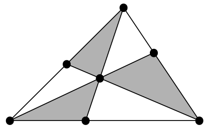
6. Кольцевая дорога поделена столбами на километровые участки, и известно, что количество столбов чётно. Один из столбов покрашен в жёлтый цвет, другой — в синий, а остальные — в белый. Назовем расстоянием между столбами длину кратчайшей из двух соединяющих их дуг. Найдите расстояние от синего столба до жёлтого, если сумма растояний от синего столба до белых равна **2008** км.

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 9.03.2008. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXXI Московская математическая олимпиада

Окружной тур 10 класс 27.01.2008

1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1;1)$. Сравните $a^5 + d^6$ и $c^6 - b^5$.



2. Биссектриса, медиана и высота некоторого треугольника, проведенные из трех разных вершин, пересекаются в одной точке и делят этот треугольник на шесть треугольников (см. рис.). Площади трех закрашенных треугольников равны. Верно ли, что исходный треугольник равносторонний?

3. Петя играет в игру-стрелялку. Если он наберет менее **1000** очков, то компьютер добавит ему **20%** от его результата. Если он наберет от **1000** до **2000** очков, то компьютер добавит ему **20%** от первой тысячи очков и **30%** от оставшегося количества очков. Если Петя наберет более **2000** очков, то компьютер добавит ему **20%** от первой тысячи очков, **30%** от второй тысячи и **50%** от оставшегося количества. Сколько призовых очков получил Петя, если по окончании игры у него было **2370** очков?

4. Точки A_1 и A_3 расположены по одну сторону от плоскости α, а точки A_2 и A_4 — по другую сторону. Пусть B_1, B_2, B_3 и B_4 — точки пересечения отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1 с плоскостью α соответственно. Найдите: $\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}$.

5. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что $(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27$.

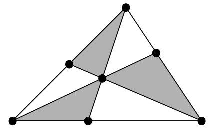
6. Клетчатая прямоугольная сетка $m \times n$ связана из веревочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную веревочку. Если не останется ни одного замкнутого веревочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть?

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 9.03.2008. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXXI Московская математическая олимпиада

Окружной тур 10 класс 27.01.2008

1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1;1)$. Сравните $a^5 + d^6$ и $c^6 - b^5$.



2. Биссектриса, медиана и высота некоторого треугольника, проведенные из трех разных вершин, пересекаются в одной точке и делят этот треугольник на шесть треугольников (см. рис.). Площади трех закрашенных треугольников равны. Верно ли, что исходный треугольник равносторонний?

3. Петя играет в игру-стрелялку. Если он наберет менее **1000** очков, то компьютер добавит ему **20%** от его результата. Если он наберет от **1000** до **2000** очков, то компьютер добавит ему **20%** от первой тысячи очков и **30%** от оставшегося количества очков. Если Петя наберет более **2000** очков, то компьютер добавит ему **20%** от первой тысячи очков, **30%** от второй тысячи и **50%** от оставшегося количества. Сколько призовых очков получил Петя, если по окончании игры у него было **2370** очков?

4. Точки A_1 и A_3 расположены по одну сторону от плоскости α, а точки A_2 и A_4 — по другую сторону. Пусть B_1, B_2, B_3 и B_4 — точки пересечения отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1 с плоскостью α соответственно. Найдите: $\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}$.

5. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что $(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27$.

6. Клетчатая прямоугольная сетка $m \times n$ связана из веревочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную веревочку. Если не останется ни одного замкнутого веревочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть?

Московская математическая олимпиада (городской тур) пройдет в МГУ 9.03.2008. Начало в 10.00. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo