11 класс

Жюри олимпиады считает необходимым обратить внимание на неверное понимание некоторыми школьниками и учителями содержания задачи №4.

Отдельные участники олимпиады при решении четвертой задачи исходили из того, что постоянная функция не имеет точек экстремума. Видимо, они использовали определения точек экстремума, которые, к сожалению, попали в некоторые учебники для 10–11 классов, где точки экстремума определяются как точки строгого экстремума («x_0 является точкой максимума [минимума] функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 (кроме нее самой) выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ [$f(x) > f(x_0)$].) При этом точки нестрогого экстремума (минимума, максимума) в их этих учебниках вообще не рассматриваются.

Такой подход не соответствует общепринятому в классическом математическом анализе, приводит к потере, в частности, таких фундаментальных фактов как теорема о наличии экстремума у непрерывной функции, принимающей одинаковые значения на концах отрезка, и в итоге неверно формирует интуицию школьника в данной области.

Не случайно, некоторые иэ этих учебников не имеют грифа Министерства Образования!

Отметим, что методическая комиссия и жюри Московской математической олимпиады, руководствуются действующими программами по математике (в том числе на профильном и углубленном уровнях), традициями математического образования в России, традициями содержания заданий Московской математической олимпиады за более чем 70 лет ее существования, и не могут учесть особенностей изложения конкретных тем в каждом из учебников, обильно издаваемых в последнее время.

Рекомендуем учителям и учащимся, при подготовке к олимпиадам руководствоваться классическими трактовками математических понятий.

При проверке решений этой задачи жюри руководствовалось следующими дополнительными критериями:

Школьники, доказавшие, что непрерывная функция, заданная в условии, принимает на концах отрезка $[0;1]$ одинаковые значения, а потом сделавшие неверный вывод об отсутствии у нее точек экстремума, получили оценку $\pm$.

Школьники, которые сразу написали, что постоянная функция $f(x) = 0,5$ удовлетворяет условию, но не имеет точек экстремума, получили оценку $+/2$, так как в итоге решали другую задачу, существенно более простую.

1. Найдите все положительные корни уравнения: $x^x + x^{1-x} = x + 1$.

Ответ: 1.

Так как $x > 0$, то $x^x + x^{1-x} = x + 1 \Leftrightarrow x^x + \dfrac{x}{x^x} - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^{2x} - x^x) - (x \cdot x^x - x) = 0 \Leftrightarrow x^x(x^x - 1) - x(x^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x^x - 1)(x^{x-1} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

В заключительной стадии решения возможна также ссылка на свойства функции $y = x^x$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *из уравнения $x^x = x^0$ сделан неверный вывод о том, что $x = 0$*

$\mp$ *обе части уравнения прологарифмированы по основанию x, после чего появляется ответ $x = 1$*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

2. В первый день Маша собрала на 25% грибов меньше, чем Вася, а во второй день — на 20% больше, чем Вася. За два дня Маша собрала грибов на 10% больше, чем Вася. Какое наименьшее количество грибов они могли собрать вместе?

Ответ: 189.

Пусть Вася собрал в первый день x грибов, а во второй день — y грибов, тогда Маша собрала $\dfrac{3}{4}x$ и $\dfrac{6}{5}y$ грибов соответственно. По условию: $\dfrac{11}{10}(x + y) = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{6}{5}y$.

Решая это уравнение, получим: $22x + 22y = 15x + 24y \Leftrightarrow 7x = 2y$. Из условия задачи следует, что числа x и y — натуральные, причем x кратно 4, а y кратно 5. Пусть $x = 4k$, $y = 5n$, где $k \in N$ и $n \in N$. Тогда $28k = 10n \Leftrightarrow 14k = 5n$. Так как НОД$(14; 5) = 1$, то k кратно 5, а n кратно 14. Таким образом, среди всех $(k; n)$, удовлетворяющих полученному равенству, наименьшие: $k = 5$; $n = 14$. Следовательно, $x = 20$; $y = 70$.

Общее количество грибов: $\dfrac{7}{4}x + \dfrac{11}{5}y = 35 + 154 = 189$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верное решение с недочетами в обоснованиях*

$\mp$ *никак не обоснована целочисленность получающихся выражений*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

3. Найдите угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса, если известно, что существуют три образующие боковой поверхности конуса, попарно перпендикулярные друг другу.

Ответ: $2 \arcsin \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Из условия задачи следует, что в данный конус может быть вписана треугольная пирамида $PABC$, у которой равны боковые ребра PA, PB и PC, и все плоские углы при вершине P — прямые (см. рис. 11.3). Следовательно, эта пирамида — правильная и ее высотой является отрезок PO, где O — центр основания конуса. Тогда искомый угол BPD вдвое больше угла BPO.

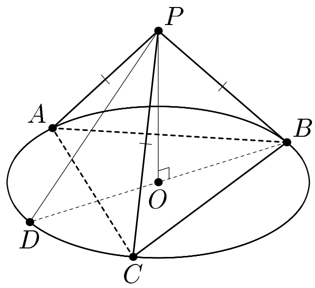

Рис. 11.3

Пусть $PB = b$, тогда $BC = b\sqrt{2}$; $OB = \dfrac{BC\sqrt{3}}{3} = \dfrac{b\sqrt{6}}{3}$. Тогда $\sin\angle BPO = \dfrac{OB}{PB} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $\angle BPD = 2\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Если вычислять искомый угол по теореме косинусов из треугольника BPD, то ответ можно получить в другом виде: $\angle BPD = \arccos\dfrac{2PB^2 - BD^2}{2PB^2} = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \pi - \arccos\dfrac{1}{3}$. *В любом случае искомый угол — тупой.*

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верное решение с недочетами в обоснованиях*

$\mp$ *допущены вычислительные ошибки, в результате которых искомый угол оказался острым*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

4. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что для всех действительных x выполняется неравенство: $f(x^2) - \big(f(x)\big)^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$. Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно имеет точки экстремума?

Ответ: да, верно.

При $x = 0$ получим, что $f(0) - \big(f(0)\big)^2 \geqslant \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \big(f(0)\big)^2 - f(0) + \dfrac{1}{4} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(f(0) - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow f(0) = \dfrac{1}{2}$. Аналогично, при $x = 1$: $f(1) - (f(1))^2 \geqslant \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow f(1) = \dfrac{1}{2}$.

Так как непрерывная функция принимает одинаковые значения на концах $[0;1]$, то внутри этого отрезка есть хотя бы одна точка максимума или точка минимума.

Отметим, что если $\forall x \in [0;1]$ $f(x) = \dfrac{1}{2}$, *то любая внутренняя точка этого отрезка является точкой экстремума.*

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верное решение с недочетами в обоснованиях*

$\pm$ *доказано, что* $f(0) = f(1)$, *из чего сделан вывод о том, что функция может быть постоянной, и поэтому точек экстремума не имеет*

$+/2$ *сразу указано, что постоянная функция* $f(x) = 0,5$ *удовлетворяет условию, но не имеет точек экстремума*

$-$ *приведен только ответ*

5. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB. Можно ли так расположить точки E и F на сторонах AC и BC соответственно, чтобы площадь треугольника DEF оказалась больше суммы площадей треугольников AED и BFD?

Ответ: так расположить точки нельзя.

Первый способ. Рассмотрим произвольный треугольник ABC с точками E и F на сторонах AC и BC. Пусть C' — образ точки C, а F' — образ точки F при симметрии с центром в точке D (см. рис. 11.5.1). Тогда четырехугольник $ACBC'$ — параллелограмм, а точка F' лежит на его стороне AC'. Так как $\angle EAF' = \angle EAB + \angle BAF' = \angle CAB + \angle CBA < 180°$, то четырехугольник $AEDF'$ — выпуклый (это следует также из того, что EAF — угол параллелограмма).

Треугольники $AF'D$ и BFD равны, значит, $S_{AEDF'} = S_{AED} + S_{AF'D} = S_{AED} + S_{BFD}$. Кроме того, так как D — середина отрезка FF', то $S_{DEF} = S_{DEF'}$. Так как $S_{AEDF'} > S_{DEF'}$, то $S_{AED} + S_{BFD} > S_{DEF}$, следовательно, указанным образом расположить точки невозможно.

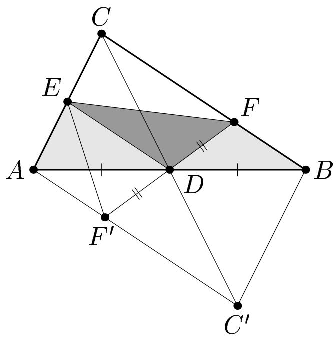

Рис. 11.5.1

Второй способ. Воспользуемся вспомогательным утверждением: **пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B < 180°$, тогда $S_{BDA} > S_{CDA}$ (см. рис. 11.5.2)**. Действительно, в силу заданного условия, прямая, проходящая через точку C и параллельная стороне AD пересекает прямую AB в точке P, лежащей между A и B. Тогда $S_{BDA} > S_{PDA}$, а треугольники PDA и CDA равновелики, так как сторона AD у них общая и высоты, проведенные из вершин P и C равны.

Рассмотрим теперь конфигурацию, заданную в условии задачи (см. рис. 11.5.3). Пусть M — середина отрезка EF, точки E', M' и F' — ортогональные проекции точек E, M и F на прямую AB. Тогда MM' — средняя линия трапеции $EFF'E'$, поэтому $MM' = \dfrac{EE' + FF'}{2}$. Следовательно, $S_{AED} + S_{BFD} = \dfrac{AD \cdot EE'}{2} + \dfrac{BD \cdot FF'}{2} = \dfrac{AB}{4}(EE' + FF') = \dfrac{1}{2}AB \cdot MM' = S_{AMB}$.

Проведем общую медиану MD треугольников AMB и EDF. В четырехугольнике $ADME$ рассмотрим сумму углов EAD и MDA, а в четырехугольнике $BDMF$ — сумму углов FBD и MDB. Хотя бы одна из этих сумм меньше, чем 180°. Действительно, предположим противное, тогда $(\angle EAD + \angle MDA) + (\angle FBD + \angle MDB) = (\angle EAB + \angle FBA) + (\angle MDA + \angle MDB) = \angle CAB + \angle CBA + 180^\circ \geqslant 360^\circ$, что невозможно, так как сумма двух углов треугольника меньше, чем 180°.

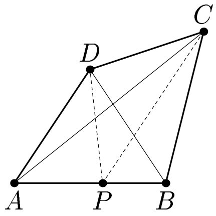

Рис. 11.5.2

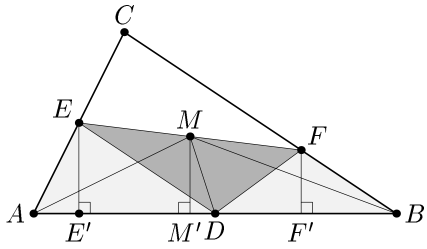

Рис. 11.5.3

Без ограничения общности можно считать, что $\angle EAD + \angle MDA < 180^\circ$. Тогда в четырехугольнике $ADME$ $S_{ADM} > S_{EDM}$. Так как медиана треугольника делит его площадь пополам, то $S_{AMB} > S_{EDF}$, то есть указанным образом расположить точки нельзя.

Третий способ. Обозначим: $\dfrac{AE}{AC} = x$, $\dfrac{BF}{CB} = y$, $S_{ABC} = S$. Тогда $S_{AED} = \dfrac{x}{2}S$, $S_{BDF} = \dfrac{y}{2}S$, $S_{CEF} = (1-x)(1-y)S$. Следовательно, $S_{DEF} = S-(S_{AED}+S_{BDF}+S_{CEF}) = S\Big(1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}-(1-x)(1-y)\Big) = S\Big(\dfrac{x+y}{2}-xy\Big)$. Поскольку $S_{AED} + S_{BDF} = \dfrac{x+y}{2}S$, то $S_{AED} + S_{BDF} > S_{DEF}$.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\pm$ *верное решение с недочетами в обоснованиях*
$\pm$ *приведено верное решение для случая остроугольного треугольника*
$\mp$ *верно разобран только случай, когда* $EF||AB$
$-$ *приведен только ответ*

6. Докажите, что если α, β и γ — углы остроугольного треугольника, то $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2$.

Первый способ. Докажем сначала вспомогательное утверждение:

Если $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\sin x > \dfrac{2x}{\pi}$.

Действительно, при $x = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$ обе части неравенства принимают одинаковые значения, а при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \sin x$ расположена выпуклостью вверх (см. рис. 11.6.1).

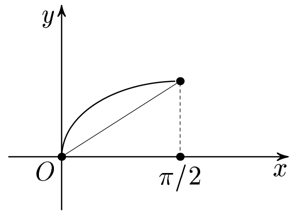

Рис. 11.6.1

Воспользуемся доказанным утверждением. Поскольку α, β и γ принадлежат $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \dfrac{2\alpha}{\pi} + \dfrac{2\beta}{\pi} + \dfrac{2\gamma}{\pi} = 2$.

Второй способ Докажем следующее вспомогательное утверждение:
Если $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\beta \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\sin\alpha + \sin\beta > 1 - \cos(\alpha+\beta)$.

Действительно, $\sin\alpha + \sin\beta - (1 - \cos(\alpha+\beta)) = \sin\alpha + \sin\beta - 2\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\beta}{2}\right) > 0$, поскольку каждый сомножитель на рассматриваемом промежутке принимает только положительные значения.

Воспользуемся доказанным утверждением: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 1 - \cos(\alpha+\beta) + \sin\gamma = 1 + \cos\gamma + \sin\gamma > 2$, поскольку при $\gamma \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\cos\gamma + \sin\gamma > 1$.

Третий способ Докажем сначала вспомогательное утверждение:

Если α, β и γ — углы произвольного треугольника, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.

Действительно, так как $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) - 1 = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} + \dfrac{1+\cos 2\beta}{2} - 1 + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + \cos^2(\alpha+\beta) - (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = 0$.

Так как данные углы — острые, то из доказанного утверждения следует, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma < 1$, поэтому $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 3 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) > 2$.

Так как для любого угла x треугольника $\sin x > \sin^2 x$, то $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2$, что и требовалось доказать.

Четвертый способ. («геометрический»). Пусть a, b и c — длины сторон остроугольного треугольника ABC, R — радиус его описанной окружности. Умножив обе части доказываемого неравенства на $2R$ и используя следствие из теоремы синусов, получим равносильное неравенство: $a + b + c > 4R$.

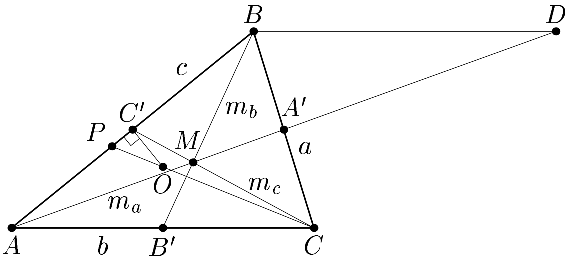

Рис. 11.6.2

Пусть m_a, m_b и m_c — длины медиан AA', BB' и CC' треугольника ABC, тогда $a+b+c > m_a+m_b+m_c$. Действительно, продолжив, например, медиану AA' на ее длину, из треугольника ABD получим, что $b + c > 2m_a$ (см. рис. 11.6.2). Аналогично, $a + c > 2m_b$ и $a + b > 2m_c$. Сложив почленно три полученных неравенства и разделив на 2, получим требуемое.

Отметим, что доказанное неравенство справедливо для любого треугольника.

Докажем теперь, что в остроугольном треугольнике $m_a + m_b + m_c \geqslant 4R$. Пусть M — точка пересечения медиан, а O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC (см. рис. 11.6). Так как O расположена внутри треугольника ABC, то она принадлежит одному из трех треугольников AMB, BMC или CMA. Без ограничения общности можно считать, что это треугольник AMB, тогда $AM + BM \geqslant AO + BO$, то есть $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b \geqslant 2R \Leftrightarrow m_a + m_b \geqslant 3R$.

Продолжим отрезок CO до пересечения с AB в точке P. Так как угол $OC'P$ — прямой, то угол $C'OP$ — острый, поэтому угол COC' — тупой. Следовательно, $CC_1 \geqslant CO$, то есть $m_c \geqslant R$.

Таким образом, $a + b + c > m_a + m_b + m_c \geqslant 4R$, что и требовалось.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верное решение с недочетами в обоснованиях*

7. В каждой клетке шахматной доски сидят по два таракана. В некоторый момент времени каждый таракан переползает на соседнюю (по стороне) клетку, причем тараканы, сидевшие в одной клетке, переползают в разные клетки. Какое наибольшее количество клеток доски может после этого остаться свободным?

Ответ: 24 клетки.

Заметим, что более двадцати четырех клеток свободными оказаться не могут. Действительно, закрасим 20 клеток доски так, как показано на рис. 11.7.1. Каждая закрашенная клетка обладает следующим свойством: в какие бы две соседние клетки не переползли из нее тараканы, в эти клетки не смогут попасть тараканы ни из какой другой закрашенной клетки. Поэтому, после переползания всех тараканов, по крайней мере 40 клеток доски будет занято.

Покажем, что 24 клетки освободить можно. Для этого все тараканы должны перпеползти в клетки, закрашенные так, как на рис. 11.7.2. Поскольку каждая незакрашенная клетка граничит ровно с двумя закрашенными, то это возможно.

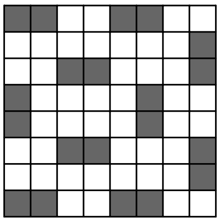
Рис. 11.7.1

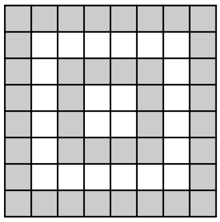
Рис. 11.7.2

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный ответ и доказана оценка, но пример отсутствует*

$\mp$ *приведен верный ответ и пример, но не доказана оценка*

$-$ *приведен только ответ*