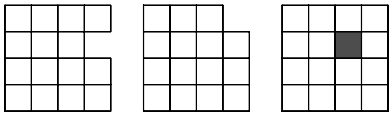
5 класс

1. Тане было 16 лет 19 месяцев назад, а Мише будет 19 лет через 16 месяцев. Кто из них старше? Ответ объясните.

Ответ: старше Миша.

Из условия следует, что Тане сейчас 17 лет 7 месяцев, а Мише — 17 лет 8 месяцев.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\mp$ *приведен только верный ответ*



2. Разрежьте одну из фигур, приведенных на рисунке, на две части так, чтобы из них можно было сложить каждую из оставшихся. *Нарисуйте, как вы разрезаете и как складываете.*

Например, разрежем первую фигуру так, как показано на рисунке 5.2.1. Складываем вторую и третью фигуры так, как показано на рисунке 5.2.2.

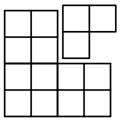


Рис. 5.2.1.

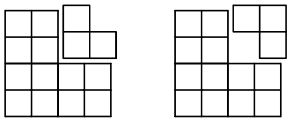


Рис. 5.2.2.

Задача имеет много решений. В частности, любую из данных фигур можно разрезать и сложить две другие.

$+$ *верное решение*
$+/2$ *верное разрезание, но показано как собрать только одну фигуру*
$\mp$ *верное разрезание, но не показано как сложить фигуры*

3. Помогите Незнайке восстановить пример на деление двух чисел, если известно, что частное в пять раз меньше делимого и в семь раз больше делителя.

Ответ: $175 : 5 = 35$.

Так как частное в пять раз меньше делимого, то делитель равен 5. Поскольку частное в семь раз больше делителя, то оно равно $5 \cdot 7 = 35$.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\pm$ *приведен только верный ответ*

4. Бурундуки Чип и Дейл должны запасти одинаковое количество орехов на зиму. После того, как Чип принес 120 орехов, а Дейл — 147 орехов, Чипу осталось запасти орехов в четыре раза больше, чем Дейлу. Сколько орехов должен запасти каждый из них?

Ответ: каждому надо запасти 156 орехов.

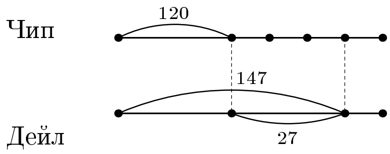


Рис. 5.4

К настоящему моменту Дейл принес на $147 - 120 = 27$ орехов больше, чем Чип. Так как запасы бурундуков должны быть одинаковыми, то теперь Чип должен принести на 27 орехов больше, чем Дейл (см. рис. 5.4). Пусть Дейлу осталось запасти x орехов, тогда Чипу — $4x$ орехов, $4x - x = 27$, то есть, $x = 9$. Значит, Дейлу осталось принести 9 орехов и всего он должен запасти $147 + 9 = 156$ орехов.

Вместо составления уравнения возможно равносильное рассуждение, например, про части.

$+$ *полное обоснованное решение*
$\pm$ *верно составлено и решено уравнение, но нет обоснования (даже в виде рисунка)*
$\mp$ *верно составлено, но не решено уравнение*
$\mp$ *приведен только верный ответ*

5. Каждый из четырех инопланетян умеет писать только две буквы. *Кра* умеет писать ◯ и △; *Кре* — буквы ◇ и ◯; *Кру* — буквы ◇ и □, *Крю* — буквы △ и □. Они оставили землянам послание: △◇□◯△△. Известно, что как любые две соседние буквы, так и любые две буквы, стоящие через одну, написаны разными инопланетянами. Кто какую букву написал? Ответ объясните.

Ответ:

△	◇	□	◯	△	△
Кра	Кру	Крю	Кре	Кра	Крю

Последние две буквы могли быть написаны только Кра и Крю, поэтому единственную букву ◯ писал не Кра, значит ее писал Кре. Тогда букву ◇ написал Кру, следовательно, он не мог написать □. Поэтому, эту букву написал Крю, значит, предпоследняя буква была написана не им. Следовательно, последнюю букву написал Крю, а предпоследнюю — Кра. Тогда первую букву мог написать только Кра.

$+$ *верное обоснованное решение*
$+/2$ *приведен только верный ответ*

6 класс

1. Назовем число зеркальным, если справа налево оно читается так же, как слева направо. Например, число 78887 — зеркальное. Найдите все зеркальные пятизначные числа, в записи которых используются только цифры 1 и 0.

Ответ: 10001, 10101, 11011, 11111.

Заметим, что в старшем разряде не может стоять цифра 0. Значит, на первом и на последнем местах обязательно стоит цифра 1. Теперь несложно подсчитать, что задача имеет четыре решения — два решения с нулем в середине и два решения с единицей в середине (*доказывать это учащиеся не обязаны*).

$+$ *найдены все решения*

$+/2$ *найдены три из четырех решений*

$\mp$ *найдены два из четырех решений или наряду с верными решениями указаны и неверные*

$-$ *найдено менее двух верных решений*

2. Маша посмотрела на рисунок и сказала: «Здесь нарисовано семь прямоугольников: один большой и шесть маленьких». «Здесь есть еще различные средние прямоугольники» — сказала мама. Сколько же всего прямоугольников на этом рисунке? Ответ объясните.

Ответ: 18.

Первый способ. Кроме прямоугольников, названных Машей, есть еще четыре вида: 1) два прямоугольника — см. рис. 6.2.1; 2) четыре прямоугольника — см. рис. 6.2.2; 3) два прямоугольника — см. рис. 6.2.3; 4) три прямоугольника — см. рис. 6.2.4. Итого: $1 + 6 + 2 + 4 + 2 + 3 = 18$.

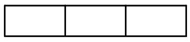


Рис. 6.2.1

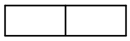


Рис. 6.2.2

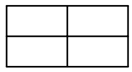


Рис. 6.2.3

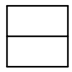


Рис. 6.2.4

Второй способ. Найдем сначала, сколько прямоугольников в верхней части данного прямоугольника (см. рис. 6.2.5). Их шесть: 3 маленьких, 2 средних, 1 большой. В данном прямоугольнике их в три раза больше: 6 в верхней части, 6 в нижней части и еще 6 прямоугольников «двойной толщины». Итого — 18.

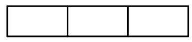


Рис. 6.2.5

$+$ *верный обоснованный ответ, например, при помощи рисунков*

$+/2$ *потерян один из видов прямоугольников (при этом остальные подсчитаны верно)*

$-$ *потеряны два или более видов прямоугольников*

3. В городе живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Рыцари носят с собой шпагу, а лжецы — нет. Собрались вместе два рыцаря и два лжеца и посмотрели друг на друга. Кто из них мог сказать фразу:

1) «Среди **нас** все рыцари».

2) «Среди **вас** есть ровно один рыцарь».

3) «Среди **вас** есть ровно два рыцаря»?

Для каждой фразы укажите всех, кто мог ее сказать, и объясните.

1) Рыцарь это сказать не мог, поскольку это неправда, значит эту фразу мог сказать любой из лжецов.

2) Мог сказать любой рыцарь, так как для него это верно. Мог сказать любой лжец, так как для него это неправда.

3) Эту фразу не мог сказать никто, поскольку для любого рыцаря это высказывание неверно, а для любого лжеца — верно.

$+$ *верное обоснованное решение (во всех пунктах)*

$\pm$ *во всех пунктах приведены верные ответы, но некоторые не обоснованы*

$+/2$ *во всех пунктах приведены верные ответы без обоснований*

$+/2$ *в двух пунктах приведены верные и обоснованные ответы, а в одном пункте ответ неверен*

$\mp$ *приведен хотя бы один верный ответ*

4. В понедельник в полдень (12-00) часы показывали верное время, а уже через 4 часа они отставали на 1 час. В какой день и час эти часы впервые покажут время, на час большее, чем на самом деле? Ответ объясните.

Ответ: в ближайшую пятницу в 8-00.

Впервые часы покажут на час больше, когда они отстанут на 23 часа. Так как за каждые 4 часа они отстают на 1 час, то это произойдет через $23 \times 4 = 92$ часа. Поскольку $92 = 24 \cdot 3 + 20$, то пройдет трое суток и еще 20 часов.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верно найдено, что искомый момент наступит через 92 часа, но допущена ошибка в ответе*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

5. Треть роты осталась в лагере, а остальные бойцы уехали на стрельбы. Оставшиеся в лагере съели за обедом четверть приготовленной похлебки, а вернувшиеся вечером со стрельб получили порции в полтора раза большие, чем давали за обедом. Сколько похлебки осталось для ротной собаки Найды?

Ответ: для собаки Найды похлебки не осталось.

На стрельбы уехало $\dfrac{2}{3}$ роты, что в два раза больше, чем осталось в лагере. Если бы они получили такие же порции, какие давали за обедом, то они съели бы в два раза больше, чем было съедено за обедом, то есть, половину приготовленной похлебки. Так как на самом деле их порции были в полтора раза больше, то они съели $\dfrac{3}{4}$ всей похлебки. А поскольку $\dfrac{1}{4}$ похлебки уже была съедена за обедом, то для собаки Найды ничего не осталось.

$+$ *верное обоснованное решение*
$+/2$ *верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка*
$\mp$ *задача не решена, но приведены некоторые разумные соображения*
$-$ *приведен только верный ответ*

7 класс

1. Существуют ли натуральные числа m и n, для которых верно равенство: $(-2a^nb^n)^m + (3a^mb^m)^n = a^6b^6$? Ответ объясните.

Ответ: да, существуют: $m = 3$, $n = 2$.

Действительно, при $m = 3$, $n = 2$, $(-2a^nb^n)^m + (3a^mb^m)^n = (-2a^2b^2)^3 + (3a^3b^3)^2 = -8a^6b^6 + 9a^6b^6 = a^6b^6$.

Можно доказать, что приведенный ответ — единственный (от учащихся это не требуется).

Преобразуем левую часть данного равенства:

$$(-2a^nb^n)^m + (3a^mb^m)^n = (-2)^m a^{mn}b^{mn} + 3^n a^{mn}b^{mn} = ((-2)^m + 3^n)a^{mn}b^{mn}.$$

Для того, чтобы исходное равенство было верным, необходимо, чтобы $mn = 6$ и $(-2)^m + 3^n = 1$. При любых натуральных n $3^n > 1$, поэтому $(-2)^m < 0$. Следовательно, m — нечетное число. У числа 6 есть только два натуральных нечетных делителя: 1 и 3. Значит, возможны два случая: $m = 1$, $n = 6$ или $m = 3$, $n = 2$. Проверкой убеждаемся, что в первом случае равенство не выполняется, а во втором — выполняется.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верно приведены значения m и n, но не приведены выкладки, показывающие, что при указанных значениях переменных равенство выполняется*

$-$ *приведен только ответ «да»*

2. По данным опроса, проведенного в 7 «Е» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «Е», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

Ответ: 26.

Количество человек в 7 «Е» без учета Пети и Васи превышает 18, но меньше, чем 28. Пусть x учеников класса интересуются одновременно и математикой, и физикой. Тогда всего математикой интересуются $5x$ учеников, а физикой — $4x$ учеников. Значит, математикой или физикой интересуются $5x + 4x - x = 8x$ учеников (см. рис. 7.2). Таким образом, количество учеников в классе должно делиться на 8. В указанных границах есть только одно число, кратное восьми. Следовательно, $8x = 24$, а всего в классе — 26 человек.

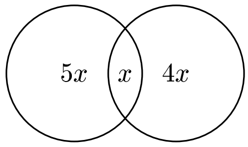


Рис. 7.2

$+$ *верное обоснованное решение*

$+/2$ *приведен верный ответ, показано, что он удовлетворяет условию, но не доказана его единственность*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

3. Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек 50?

Ответ: 33.

Подсчитаем, какое наименьшее количество синих лампочек может быть в гирлянде. Поскольку рядом с любой красной лампочкой обязательно есть синяя, то три красных лампочки не могут идти подряд. Следовательно, среди каждых трех последовательно идущих лампочек хотя бы одна лампочка должна быть синей. Тогда среди первых 48 лампочек синих будет не меньше, чем $48 : 3 = 16$.

Обе лампочки с номерами 49 и 50 оказаться красными не могут, значит хотя бы одна из них — синяя. Получается, что синих лампочек в гирлянде должно быть не менее 17, тогда красных — не более 33.

Такой случай возможен: если лампочки с номерами 2, 5, 8, 11, …, 50 — синие, а остальные — красные, то в гирлянде — 17 синих лампочек и 33 красных.

Следовательно, наибольшее возможное количество красных лампочек равно 33.

$+$ *верное обоснованное решение*

$+/2$ *приведен верный ответ и пример такой гирлянды*

$+/2$ *доказано, что красных лампочек не более 33, но пример не приведен*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

4. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены точки D и E, так что $AD = DE = EC$. Может ли оказаться так, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$?

Ответ: нет, не может.

Предположим, что такое возможно (см. рис. 7.4). Рассмотрим треугольник ABE: по условию, BD — его медиана. Если $\angle ABD = \angle DBE$, то BD является также и биссектрисой этого треугольника, поэтому, $\triangle ABE$ — равнобедренный с основанием AE, и BD — его высота. Аналогично, BE — медиана и биссектриса треугольника DBC, следовательно, $\triangle DBC$ — равнобедренный с основанием DC, и BE — его высота.

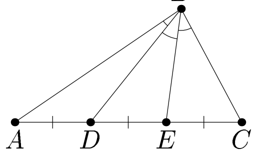


Рис. 7.4

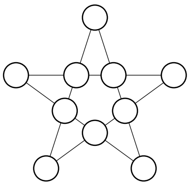
Таким образом, из точки B опущено два различных перпендикуляра BD и BE на прямую AC, что противоречит теореме о единственности перпендикуляра к прямой.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ответ основан на утверждении о равенстве треугольников ABD, DBE и EBC, которое не доказано*

$-$ *приведен только ответ*

5. Можно ли в кружочки на пятиконечной звезде (см. рисунок) расставить 4 единицы, 3 двойки и 3 тройки так, чтобы суммы четырех чисел, стоящих на каждой из пяти прямых, были равны?



Ответ: нет, нельзя.

Предположим, что числа удалось расставить требуемым образом. Пусть S — сумма чисел, стоящих на каждой прямой, тогда сумма чисел на всех пяти прямых равна $5S$.

Так как каждый кружок лежит на пересечении двух прямых, то при таком подсчете число, записанное в каждом из кружочков, учтено дважды. Следовательно, найденная сумма равна удвоенной сумме всех расставленных чисел, то есть, $5S = 2(4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3)$. Получим, что $5S = 38$, что невозможно, так как на каждой прямой стоят 4 целых числа и их сумма должна быть целой.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верный ход решения и верный ответ, но допущена вычислительная ошибка*

$-$ *приведен только ответ*