8 класс

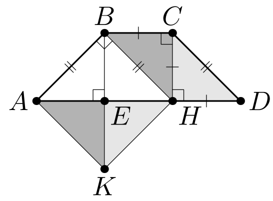


Рис. 8.2

8.1. Известно, что $x^2 + y^2 = 19$, $xy = 3$. Какие значения может принимать $x + y$?

Ответ: 5 или -5.

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 19 + 6 = 25$, следовательно, $x + y = 5$ или $x + y = -5$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *найден только один ответ*

$-$ *приведен только ответ*

8.2. В равнобокой трапеции одно из оснований в три раза больше другого. Угол при большем основании равен 45°. Покажите, как разрезать эту трапецию на три части и сложить из них квадрат. Обоснуйте решение.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция (см. рис. 8.2). Проведем высоты BE и CH. Так как трапеция равнобокая, то $AE = DH = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{3BC - BC}{2} = BC$. В прямоугольном треугольнике CHD острый угол равен 45°, поэтому этот треугольник — равнобедренный. Треугольник BCH равен треугольнику CHD (по двум катетам). Из треугольников ABH, BCH и CHD можно сложить квадрат $ABHK$ (см. рис. 8.2).

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верно показано, как разрезать и как сложить, но не приведены обоснования*

8.3. По кругу стоит 101 коробка, в каждой из которых лежат черные и белые шарики. На каждой коробке написано, сколько в ней черных шариков и сколько белых. Петя хочет переложить из каждой коробки по одному шарику в следующую (по часовой стрелке) коробку так, чтобы обе надписи на каждой из коробок стали неверными. Сможет ли он это сделать?

Ответ: нет, не сможет.

Пусть из какой-то коробки в следующую переложен белый шарик. Тогда в эту коробку из предыдущей надо обязательно переложить черный шарик, иначе надпись на ней останется верной. Аналогично, если из какой-то коробки переложен черный шарик, то из предыдущей в нее должен быть переложен белый. Значит, цвета переложенных шариков должны чередоваться. Начнем с какой-то коробки и пройдем полный круг. Так как количество коробок нечетно, то цвет шарика, переложенного в первую коробку, будет таким же, как цвет переложенного из нее. Противоречие.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *указано только, что если из коробки вынут черный шарик, то положить в нее надо белый (или наоборот)*

$-$ *приведен только верный ответ*

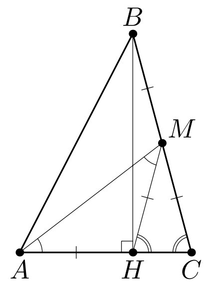


Рис. 8.4

8.4. В остроугольном треугольнике ABC BH — высота, AM — медиана. Угол MCA в два раза больше угла MAC, $BC = 10$ см. Найдите AH.

Ответ: 5 см.

Проведём отрезок HM. Он является медианой в прямоугольном треугольнике BHC, поэтому равен половине BC. Пусть $\angle MAC = \alpha$, тогда $\angle MCA = 2\alpha$. Так как $MC = MH$, то треугольник HMC равнобедренный, следовательно $\angle MHC = \angle MCH = 2\alpha$. Так как угол MHC — внешний для треугольнике AHM, то $\angle AMH = \angle MHC - \angle MAH = \alpha$. Таким образом, треугольник AHM равнобедренный, то есть $AH = HM = \dfrac{BC}{2} = 5$ (см).

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *обоснованно только, что $HM = BC/2$*

$-$ *приведен только верный ответ*

8.5. Прямоугольник разделен на квадратики со стороной 1 см. В каждом квадратике записано число (не обязательно целое) так, что сумма чисел в каждой строке равна 1, а сумма чисел в каждом столбце равна 2. Может ли площадь прямоугольника оказаться равной 2008 см^2?

Ответ: нет, не может.

Пусть в прямоугольнике a строк и b столбцов, тогда его площадь: $ab = 2008$. Заметим, что сумма всех чисел в прямоугольнике, с одной стороны, равна a, а с другой стороны, равна $2b$. Следовательно, $a = 2b$, тогда $2b^2 = 2008$, $b^2 = 1004$, но 1004 не является квадратом натурального числа.

$+$ *верное обоснованное решение*

$-$ *приведен только верный ответ*

8.6. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых трех из них была простым числом?

Ответ: 4 числа.

Одним из примеров четырех чисел, удовлетворяющих условию задачи, служат числа 1, 3, 7, 9. Действительно, числа $1 + 3 + 7 = 11$, $1 + 3 + 9 = 13$, $1 + 7 + 9 = 17$, $3 + 7 + 9 = 19$ являются простыми.

Предположим, что удалось выбрать пять чисел. Рассмотрим остатки этих чисел при делении на 3. Если среди остатков есть три одинаковых, то сумма соответствующих им чисел делится на 3. Если же трех одинаковых остатков нет, то каждый из остатков 0, 1 и 2 должен присутствовать. Тогда сумма трех чисел, имеющих различные остатки от деления на 3, делится на 3. При этом эта сумма не равна 3, так как все числа — различные и натуральные. Значит, эта сумма — составное число.

Существуют и другие примеры, например, 3, 7, 9, 31 *и т. д.*

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен верный ответ и пример*

$-$ *приведен только верный ответ*

9 класс

9.1. Известно, что значение выражения $((x+2x)\cdot 3x-4x):5x$ не изменится, если стереть все скобки. Чему равен x?

Ответ: $x=\dfrac{2}{15}$.

Из условия задачи получим, что $((x+2x)\cdot 3x-4x):5x=x+2x\cdot 3x-4x:5x$. При $x=0$ обе части уравнения теряют смысл, а при $x\neq 0$ оно преобразуется в уравнение $\dfrac{9x-4}{5}=x+6x^2-\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow 30x^2-4x=0$, откуда $x=\dfrac{2}{15}$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *допущена вычислительная ошибка*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$-$ *в ответ включен ноль*

9.2. В треугольнике ABC A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Известно, что A_1A и B_1B — биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: все углы по 60°.

A_1B_1 и A_1C_1 — средние линии треугольника ABC, поэтому $A_1B_1||AB$ и $A_1C_1||AC$ (см. рис. 9.2). Далее можно рассуждать по-разному.

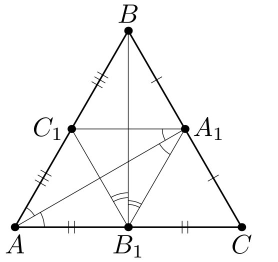


Рис. 9.2

Первый способ. Следовательно, $\angle BAA_1=\angle AA_1B_1=\angle AA_1C_1=\angle A_1AC$. Таким образом, в треугольнике ABC AA_1 является медианой и биссектрисой, а потому он равнобедренный ($AB=AC$). Аналогично, BB_1 — также медиана и биссектриса треугольника ABC, поэтому $CA=CB$. Таким образом, треугольник ABC равносторонний.

Второй способ. $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм, в котором диагональ является биссектрисой угла. Следовательно, $AB_1A_1C_1$ — ромб, то есть, $A_1B_1=A_1C_1$. Аналогично, $BA_1B_1C_1$ — ромб, то есть, $A_1B_1=B_1C_1$. Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний, значит, треугольник ABC также равносторонний.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *при первом способе рассуждения использовано, но не доказано, что медианы треугольника ABC являются его биссектрисами*

$\mp$ *при втором способе рассуждения использовано, но не доказано, что четырехугольники $AB_1A_1C_1$ и $BA_1B_1C_1$ являются ромбами*

$-$ *приведен только ответ*

9.3. В каждой клетке таблицы 3×3 записано число. Произведение чисел в любом столбце и в любой строке равно 1, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 2. Определите, какие числа записаны в таблице.

Ответ: см. рис. 9.3а.

2	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{4}$	16	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	2

Рис. 9.3а

Обозначим числа в таблице буквами так, как это покзано на рисунке 9.3б. Тогда $(def)\cdot(ghi)=1\cdot 1=1$. И $efhi=2$. Следовательно, $dg=\dfrac{1}{2}$. Так как $adg=1$, то $a=2$. Аналогичным образом доказывается, что $c=g=i=2$. Тогда $b=d=f=h=\dfrac{1}{4}$. Поэтому $e=16$.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Рис. 9.3б

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *найдены не все числа или допущены арифметические ошибки*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

9.4. В трапеции $ABCD$: $AB=BC=CD$. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Окружность, описанная около треугольника ABO, пересекает основание AD в точке E. Докажите, что $BEDC$ — ромб.

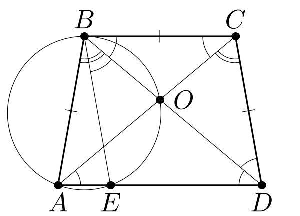


Рис. 9.4

Первый способ. Используя свойства равнобокой трапеции и условие $BC=CD$, получим: $\angle BDC=\angle DBC=\angle BCA=\angle CAD$ (см. рис. 9.4). Кроме того, углы CAD и DBE вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу OE, значит, $\angle CAD=\angle DBE$. Таким образом, $\angle BDC=\angle DBE$, следовательно $BE||CD$. Тогда $BEDC$ — параллелограмм с равными соседними сторонами. Следовательно, $BEDC$ — ромб.

Второй способ. Так как $AD||BC$ и $BC=CD$, то $\angle ADB=\angle CBD=\angle CDB$ (см. рис. 9.4). Кроме того, из свойств равнобокой трапеции вытекает, что $\angle ABD=\angle ACD$. Тогда $\triangle ADB\sim\triangle ODC$ (по двум углам), следовательно, $\dfrac{AD}{OD}=\dfrac{DB}{DC}$, то есть $AD\cdot DC=DB\cdot OD$ $(*)$.

Так как DA и DB — секущие к окружности, то $DA\cdot DE=DB\cdot DO$ $(**)$. Из равенств $(*)$ и $(**)$ получим, что $DE=DC=BC$. Кроме того, $DE||BC$, поэтому $BEDC$ — параллелограмм с равными соседними сторонами. Следовательно, $BEDC$ — ромб.

Заметим, что окружность пересекает основание AD только если это большее основание, иначе она пересечёт его продолжение. Однако утверждение задачи верно в обоих случаях; первый способ доказательства без *изменения годится в обеих ситуациях, а во втором способе, если $BC > AD$, то равенство накрест лежащих углов заменяется свойством противоположных углов вписанного четырёхугольника.*

Обоснование того, что AD — большее основание, от участника не требуется.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *частичные продвижения в решении*

9.5. Сумма трёх различных чисел равна шести, а сумма их попарных произведений равна девяти. Докажите, что эти числа положительные.

Пусть $a+b+c=6$ и $ab+bc+ca=9$. Тогда $ab=9-c(a+b)=9-c(6-c)=9-6c+c^2=(c-3)^2 \geqslant 0$. Аналогично доказывается, что $bc \geqslant 0$ и $ac \geqslant 0$. Докажем, что среди трех данных чисел нет нулей. Предположим, что $a=0$, тогда из равенства $ab=(c-3)^2$ следует, что $c=3$, но тогда из условия $a+b+c=6$ вытекает, что и $b=3$, а это противоречит тому, что числа различны. Таким образом, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$. Тогда из полученных неравенств следует, что числа a, b и c одного знака. Так как $a+b+c>0$, то $a>0$, $b>0$ и $c>0$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *обоснованно все, кроме случая, когда одно из чисел равно* 0

$\mp$ *доказано только, что произведение двух чисел неотрицательно*

$\mp$ *приведенное рассуждение использует неверное утверждение, что «квадрат любого числа положителен»*

9.6. Дед Мороз пришёл в детский сад раздавать конфеты. Он обнаружил, что, хотя мальчиков в саду больше, чем девочек, он может все конфеты раздать поровну мальчикам, а может все конфеты раздать поровну девочкам. Дед Мороз, разумеется, раздал конфеты всем детям — каждому досталось по три. А если бы он и впрямь стал раздавать конфеты только девочкам, сколько бы получила каждая?

Ответ: 12 конфет.

Пусть в детском саду m мальчиков и d девочек, а у Деда Мороза $N=3(m+d)$ конфет.

Первый способ. По условию, N делится на m и на d, то есть $N=mk$ и $N=dl$ (k и l — натуральные числа). Тогда $m=\dfrac{N}{k}$ и $d=\dfrac{N}{l}$. Подставляя в $N=3(m+d)$, получим, что $N=\dfrac{3N}{k}+\dfrac{3N}{l}$. Отсюда $kl=3(k+l) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow kl-3k-3l+9=9 \Leftrightarrow (k-3)(l-3)=9$. Так как $m>d$, то $k<l$, то есть, $k-3<l-3$. Следовательно, $k-3=1$ и $l-3=9$. Таким образом $l=12$, то есть девочки получили бы по 12 конфет.

Второй способ. Если бы Дед Мороз раздал все конфеты мальчикам, то каждый из них получил бы $\dfrac{3(m+d)}{m}=$ $=3+\dfrac{3d}{m}$ конфет. Следовательно, $\dfrac{3d}{m}$ — целое число. Так как $d<m$, то $\dfrac{3d}{m}<3$.

Если $\dfrac{3d}{m}=1$, то есть $m=3d$, то каждая девочка получит $\dfrac{3(m+d)}{d}=\dfrac{3\cdot 4d}{d}=12$ конфет. Если $\dfrac{3d}{m}=2$, то есть $2m=3d$, то каждая девочка получит $\dfrac{3(m+d)}{d}=\dfrac{3\cdot 2,5d}{d}=7,5$ конфет, что противоречит условию.

$+$ *верное обоснованное решение*

$-$ *приведен только ответ (или ответ получен на числовом примере)*

10 класс

10.1. Найдите значение $x-y$, если $x^3-y^3=45$ и $xy(x-y)=6$.

Ответ: $x-y=3$.

Первый способ. Умножим второе равенство на 3 и вычтем из первого: $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=27 \Leftrightarrow (x-y)^3 = 27 \Leftrightarrow x-y=3$.

Второй способ. Пусть $x-y=a$, $xy=b$. Тогда $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)((x-y)^2+3xy)=a(a^2+3b)$.
Следовательно, $\begin{cases} ab=6 \\ a^3+3ab=45, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=\dfrac{6}{a}, \\ a^3+18=45 \end{cases}$

Тогда $a^3=27$, то есть, $a=3$.

Возможно также вычислить значения x и y, решив исходную систему уравнений, но это приводит к весьма трудоемким вычислениям.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ход решения, но допущены вычислительные ошибки*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

10.2. Ромб и равнобокая трапеция описаны около одной и той же окружности и имеют одинаковые площади. Сравните их острые углы.

Ответ: острые углы ромба и трапеции равны.

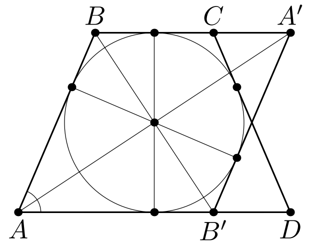


Рис. 10.2

Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь вычисляется по формуле $S=p\cdot r$, где p — полупериметр, r — радиус окружности. Тогда из условия следует, что ромб и трапеция имеют одинаковые периметры. Кроме того, в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, поэтому сторона ромба равна боковой стороне данной трапеции.

Завершить рассуждения можно по-разному.

Первый способ. Расположим ромб и трапецию так, чтобы сторона AB ромба являлась также боковой стороной трапеции (см. рис. 10.2). Тогда смежные с AB стороны ромба и смежные с AB стороны трапеции (основания) лежат на касательных к окружности, поэтому углы ромба и трепеции при вершинах A и B совпадают.

Второй способ. Пусть a — длина общей стороны ромба и трапеции, α и β — острые углы ромба и трапеции соответственно. Поскольку высота ромба и высота трапеции равна диаметру вписанной окружности, то $\sin\alpha=\dfrac{a}{2r}$ и $\sin\beta=\dfrac{a}{2r}$. Так как α и β — острые углы, то $\alpha=\beta$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что боковая сторона трапеции равна стороне ромба*

$-$ *приведен только ответ*

10.3. Решите уравнение $(x+1)^{99}+(x+1)^{98}(x+2)+(x+1)^{97}(x+2)^2+\ldots+(x+2)^{99}=0$.

Ответ: $-1,5$.

Первый способ. Воспользуемся формулой $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, где $a=x+1$, $b=x+2$, $n=100$. Так как и $a-b=-1\neq 0$, то умножив обе части исходного уравнения на $(x+1)-(x+2)=-1$ получим, что $(x+1)^{100}-(x+2)^{100}=0 \Leftrightarrow |x+1|=|x+2|$. Решая это уравнение (на координатной прямой или используя то, что $|a|=|b| \Leftrightarrow a=\pm b$ или возводя обе части уравнения в квадрат или раскрывая модули на различных промежутках), получим, что $x=-1,5$.

Второй способ. Непосредственной проверкой убедимся, что $x=-1$ не является корнем данного уравнения. Тогда левая часть уравнения представляет собой сумму первых ста членов геометрической прогрессии, у которой первый член $b_1=(x+1)^{99}$, а знаменатель $q=\dfrac{x+2}{x+1}$. Используя формулу $S_n=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, преобразуем исходное уравнение к виду $\dfrac{(x+1)^{99}\left(\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{100}-1\right)}{\dfrac{x+2}{x+1}-1}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{100}=1 \Leftrightarrow x=-1,5$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ход решения, но допущены вычислительные ошибки*

$-$ *приведен только верный ответ*

10.4. В некотором натуральном числе переставили цифры. Докажите, что если сумма полученного числа с исходным равна 10^{2008}, то исходное число делится на 5.

Докажем, что исходное число делится на 10, откуда будет следовать требуемое утверждение. Из условия следует, что последняя цифра суммы равна 0. Если последняя цифра исходного числа a не равна 0, то ее сумма с последней цифрой полученного числа b равна 10, а суммы цифр в остальных 2007 разрядах равны 9. Следовательно, удвоенная сумма цифр числа a равна $10+9\cdot 2007$. Полученное число — нечетное, в то время как удвоенная сумма цифр числа a должна быть четной.

$+$ *верное обоснованное решение*

10.5. В произвольный треугольник вписана окружность. Проведем три касательные к ней, параллельно сторонам треугольника. Докажите, что периметр образовавшегося шестиугольника не превосходит $\dfrac{2}{3}$ периметра исходного треугольника.

Пусть ABC — данный треугольник, I — центр вписанной окружности, касательные PQ, MN и TR параллельны сторонам треугольника (см. рис. 10.5).

Из попарной параллельности касательных к окружности следует, что образовавшийся шестиугольник $MNPQRT$ центрально-симметричен (I — центр симметрии). Следовательно, его противоположные стороны попарно равны.

Введем обозначения: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $MN = RQ = a_1$, $NP = NR = b_1$, $TM = PQ = c_1$, r — радиус вписанной окружности, P — периметр треугольника ABC.

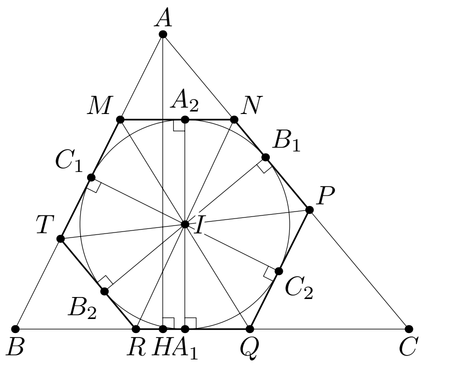


Рис. 10.5

Требуется доказать, что $2(a_1+b_1+c_1) \leqslant \frac{2}{3}(a+b+c) \Leftrightarrow a_1+b_1+c_1 \leqslant \frac{P}{3}$. Воспользуемся тем, что треугольники AMN и ABC подобны с коэффициентом $k_a = \frac{a_1}{a} = \frac{h_a - 2r}{h_a}$ (где $h_a = AH$ — высота). Следовательно, $a_1 = a\left(1 - \frac{2r}{h_a}\right)$. Так как $S_{ABC} = \frac{1}{2}Pr = \frac{1}{2}ah_a$, то $\frac{2r}{h_a} = \frac{2a}{P}$. Таким образом $a_1 = a\left(1 - \frac{2a}{P}\right)$.

Аналогично, $b_1 = b\left(1 - \frac{2b}{P}\right)$ и $c_1 = c\left(1 - \frac{2c}{P}\right)$. Следовательно, $a_1 + b_1 + c_1 \leqslant \frac{P}{3} \Leftrightarrow a + b + c - \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{P} \leqslant$ $\leqslant \frac{P}{3} \Leftrightarrow \frac{2P}{3} \leqslant \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{P} \Leftrightarrow P^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$ $(*)$. Неравенство $(*)$ можно доказать различными способами, например,

1) Используя неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным, получим: $\frac{a+b+c}{3} \leqslant$ $\leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{9} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$.

2) $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geqslant 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$.

Отметим, что периметр шестиугольника ***равен*** $\frac{2}{3}$ *периметра треугольника ABC только в том случае, когда треугольник ABC — равносторонний. Это следует из доказательства неравенства $(*)$.*

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *решение сведено к доказательству алгебраического неравенства типа $*$, которое не доказано*

$\mp$ *доказано только, что в заданном шестиугольнике равны противоположные стороны*

$-$ *доказательство дано только для правильного треугольника*

10.6. Алиса и Базилио украли у Буратино чемодан. Замок на чемодане должен открыться, если три колесика на нем (каждое из которых может занимать одну из восьми допустимых позиций) установлены в определенной комбинации. Однако, в силу ветхости механизма, чемодан откроется, если любые два колесика из трех поставлены в правильное положение. Базилио утверждает, что он сможет открыть чемодан не более чем за 32 попытки. Прав ли он? (Попыткой называется установка какой-либо комбинации колесиков.)

Ответ: Базилио прав.

Обозначим колесики буквами A, B и C, а их допустимые положения — натуральными числами от 1 до 8. Тогда некоторая тройка натуральных чисел (a, b, c) задает код замка (a отвечает положению колесика A и т. д.).

Итак, пусть набрана некая комбинация (a, b, c), открывающая чемодан. Тогда (*по принципу Дирихле*) какие-то две из трех цифр a, b и c попадут <u>или</u> в набор $(1, 2, 3, 4)$ <u>или</u> в набор $(5, 6, 7, 8)$. Рассмотрим первый случай. Покажем, что мы сумеем открыть чемодан не более чем за 16 попыток.

Допустим, что мы знаем, какие две из цифр 1, 2, 3, 4 являются цифрами рассматриваемой комбинации, какая из них стоит раньше, но не знаем места, на которых они стоят. Обозначим эти цифры m и n. В силу неисправности замка, он должен открыться за три попытки: $(m, n, *)$, $(*, m, n)$, $(m, *, n)$ (звездочка означает, что вместо нее можно поставить любую цифру).

Составим таблицу размером 3×16, заполненную цифрами 1, 2, 3, 4 таким образом, чтобы *любая упорядоченная пара (m, n), такая, что $1 \leqslant m \leqslant 4$ и $1 \leqslant n \leqslant 4$ встречалась хотя бы в одном столбце.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
B	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
C	1	2	3	4	4	1	2	3	3	4	1	2	2	3	4	1

Если замок не открылся после перебора приведенных 16 комбинаций, то две верные цифры из искомой комбинации попали в четверку $(5, 6, 7, 8)$. Для нее составляется аналогичная таблица, которая отличается от уже приведенной тем, что к каждой цифре прибавляется 4.

$+$ *верное обоснованное решение*

$-$ *приведен только верный ответ*

11 класс

11.1. Сколько корней имеет квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, если $|a + c| = |b|$, а числа a и c различны?
Ответ: 2 корня.

Первый способ. $D = b^2 - 4ac = |a + c|^2 - 4ac = (a - c)^2$. Так как числа a и c различны, то $D > 0$, то есть уравнение имеет два корня.

Второй способ. $|a + c| = |b| \Leftrightarrow a + c = \pm b \Leftrightarrow a + b + c = 0$ или $a - b + c = 0$. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $a + b + c = f(1)$, а $a - b + c = f(-1)$. В первом случае уравнение имеет корни 1 и $\dfrac{c}{a}$, а во втором случае имеет корни -1 и $-\dfrac{c}{a}$. Корни совпадать не могут, так как $a \neq c$.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\mp$ *не использовано условие* $a \neq c$
$-$ *приведен только ответ*

11.2. Решите уравнение $\sin x + \sin^3 x + 2008 \sin^5 x = \cos 2x + \cos^3 2x + 2008 \cos^5 2x$.
Ответ: $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m$, $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, где $\{m, n, k\} \subset Z$.

Пусть $f(t) = t + t^3 + 2008t^5$. Тогда уравнение имеет вид $f(\sin x) = f(\cos 2x)$. Функция $f(t)$ является суммой трех возрастающих функций, поэтому также является возрастающей. Следовательно, $f(\sin x) = f(\cos 2x) \Leftrightarrow \sin x = \cos 2x$.

Решем полученное уравнение: $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$ или $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Возможны другие варианты записи правильного ответа.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\mp$ *обоснован переход к уравнению* $\sin x = \cos 2x$, *но допущены ошибки при его решении*
$-$ *приведен только ответ*

11.3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сравните расстояния от вершины A до плоскостей A_1BD и C_1BD. Обоснуйте ответ.
Ответ: расстояния равны.

Пусть O — точка пересечения AC и BD (см. рис. 11.3), прямые C_1O и A_1A пересекаются в точке A_2 (обе прямые лежат в плоскости диагонального сечения AA_1C_1C). Тогда A_2 — точка пересечения прямой A_1A с плоскостью C_1BD.

Так как $AO || A_1C_1$ и $AO = \dfrac{1}{2} A_1C_1$, то AO — средняя линия треугольника $A_1A_2C_1$, следовательно, $A_1A = A_2A$.

Таким образом, точки A_1 и A_2 симметричны относительно плоскости ABC, следовательно, и тетраэдры AA_1BD и AA_2BD симметричны относительно этой плоскости. Расстояния от точки A до плоскостей A_1BD и C_1BD равны длинам высот этих тетраэдров, проведенных из точки A. Следовательно, расстояния от A до плоскостей A_1BD и C_1BD равны.

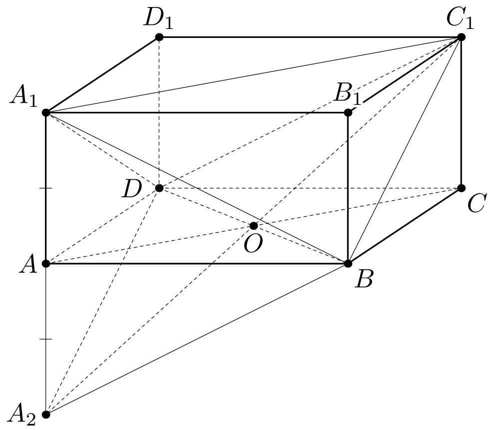


Рис. 11.3

Возможны другие способы решения, использующие, например, объемы, векторы или координаты.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\pm$ *верно использована, но не обоснована симметрия тетраэдров* AA_1BD *и* AA_2BD
$-$ *приведен только ответ*

11.4. Последовательность чисел строится следующим образом. Первое число в ней равно 2. Каждое последующее число равно сумме кубов цифр предыдущего числа. Вася утверждает, что среди чисел этой последовательности встретятся два одинаковых числа, Коля, — что этого никогда не произойдет. Кто из них прав?
Ответ: прав Вася.

Докажем, что в заданной последовательности не может встретиться пятизначное число. Пусть $a_n = \overline{xyzu}$, тогда следующее за ним число $a_{n+1} = x^3 + y^3 + z^3 + u^3 \leqslant 4 \cdot 9^3 < 4000$. Следовательно, все члены последовательности меньше 4000, а поскольку их бесконечное число, то они когда-нибудь начнут повторяться (принцип Дирихле).

Возможны и другие оценки, доказывающие ограниченность данной последовательности.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\pm$ *доказана только ограниченность последовательности, но не пояснено, почему ее члены будут повторяться*
$\mp$ *верно использована ограниченность последовательности, которая не доказана*

11.5. Точка M — середина хорды AB. Хорда CD пересекает AB в точке M. На отрезке CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности и ME — перпендикуляр к CD. Найдите угол AEB.
Ответ: $\angle AEB = 90^\circ$.

Угол CED — прямой, так как он вписан в окружность и опирается на ее диаметр (см. рис. 11.5). Из прямоугольного треугольника CED: $EM^2 = CM \cdot MD$. Кроме того, по свойству отрезков хорд $CM \cdot MD = AM \cdot MB = AM^2$. Следовательно, $EM = AM = MB$, то есть, в треугольнике AEB медиана EM равна половине стороны AB. Значит, угол AEB — прямой.

Решение не зависит от того, в какую полуплоскость проведена заданная полуокружность. Поэтому рассматривать два случая нет необходимости.

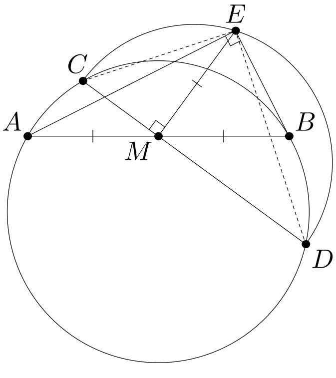
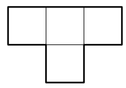


Рис. 11.5

\+ *верное обоснованное решение*

− *приведен только ответ*

11.6. Можно ли расставить в клетках шахматной доски натуральные числа от 1 до 64 так, чтобы сумма чисел в любой фигуре вида (см. рис.) была кратна 5?



Ответ: нет, нельзя.

Предположим, что указанная расстановка возможна. Рассмотрим пятиклеточную фигуру, у которой центральная клетка окрашена в черный цвет, с расположенными в ней числами a, b, c, d и x (см. рис. 11.6). Пусть $S = a+b+c+d+x$, тогда $a = S-(b+c+d+x)$, $b = S-(a+c+d+x)$, и т. д. Из условия следует, что сумма $b+c+d+x$ делится на 5, $a+c+d+x$ делится на 5, и т. д. Следовательно, числа a, b, c и d имеют одинаковые остатки от деления на 5.

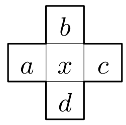


Рис. 11.6

Рассмотрев все такие пятиклеточные фигуры, получим, что все числа, стоящие на белых полях шахматной доски, должны иметь одинаковые остатки от деления на 5. Поскольку белых клеток — 32, а среди чисел от 1 до 64 одинаковые остатки могут иметь не более тринадцати, то получено противоречие.

\+ *верное обоснованное решение*

∓ *найден и обоснован один из возможных инвариантов, но решение не доведено до конца*

− *приведен только ответ*