10 класс

Первый день

10.1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^3 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

10.2. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

10.3. У Кости было два набора по 17 монет: в одном наборе все монеты настоящие, а в другом наборе ровно 5 фальшивых (все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). Один из наборов Костя отдал другу, а впоследствии забыл, какой именно из двух наборов у него остался. Может ли Костя при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, какой именно из двух наборов он отдал?

10.4. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD — общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^3 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

10.2. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

10.3. У Кости было два набора по 17 монет: в одном наборе все монеты настоящие, а в другом наборе ровно 5 фальшивых (все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). Один из наборов Костя отдал другу, а впоследствии забыл, какой именно из двух наборов у него остался. Может ли Костя при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, какой именно из двух наборов он отдал?

10.4. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD — общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.