10 класс

10.1. Из ряда натуральных чисел вычеркнули все числа, которые являются квадратами или кубами целых чисел. Какое из оставшихся чисел стоит на сотом месте?

Ответ: 112.

Рассмотрим первую сотню натуральных чисел. Среди этих чисел десять квадратов (от $1^2 = 1$ до $10^2 = 100$) и четыре куба (от $1^3 = 1$ до $4^3 = 64$). Учтем, что два из этих чисел, а именно, 1 и 64 являются одновременно квадратами и кубами. Таким образом из первой сотни вычеркнули 12 чисел. Среди следующих двенадцати чисел нет ни квадратов, ни кубов ($11^2 = 121$, $5^3 = 125$), следовательно, среди оставшихся чисел на сотом месте стоит число 112.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\mp$ *в решении не учтено, что* $8^2 = 4^3$ *и получен ответ* 113

$\mp$ *приведен только верный ответ*

10.2. Пусть α, β, γ и δ — градусные меры углов некоторого выпуклого четырехугольника. Всегда ли из этих четырех чисел можно выбрать три числа так, чтобы они выражали длины сторон некоторого треугольника (например, в метрах)?

Ответ: нет, не всегда.

Рассмотрим, например, четверку чисел: 28, 50, 110, 172. Выпуклый четырехугольник с такими углами существует, поскольку их сумма равна 360 и каждое из чисел меньше, чем 180.

При этом, для каждой тройки из этих четырех чисел неравенство треугольника не выполняется: $28 + 50 < < 110 < 172$; $28 + 110 < 172$; $50 + 110 < 172$.

Понятно, что существует много других примеров (в том числе, и не целых).

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\pm$ *приведены верный ответ и верный пример, но не обосновано, почему этот пример удовлетворяет условиям задачи*

$\mp$ *приведен верный ответ и пример, в котором не учтено условие выпуклости четырехугольника*

$-$ *приведен только ответ*

10.3. Известно, что при любом положительном значении p все корни уравнения (с переменной x) $ax^2 - 3x + p = 0$ положительны. Докажите, что $a = 0$.

Допустим, что $a \neq 0$. Тогда данное уравнение является квадратным, его дискриминант $D = 9 - 4pa$. Рассмотрим два случая.

1) Если $a > 0$, то при $p > \dfrac{9}{4a}$ выполняется неравенство $D < 0$, то есть найдутся положительные значения p, при которых уравнение не имеет корней.

2) Если $a < 0$, то при любом $p > 0$ выполняется неравенство $D > 0$, но произведение корней уравнения будет равно $\dfrac{p}{a} < 0$ (по теореме Виета). Следовательно, корни уравнения имеют разные знаки, то есть один из них — отрицательный.

Так как ни один из разобранных случаев не удовлетворяет условию задачи, то остается принять, что $a = 0$. Тогда данное уравнение является линейным и его единственный корень $x = \dfrac{p}{3} > 0$ при любом $p > 0$.

Отрицательность одного из корней в случае 2) можно установить и непосредственно из формулы корней квадратного уравнения.

$+$ *приведено верное полное решение*

$\pm$ *доказано, что значением а может быть только* 0, *но не проверено, что корень в этом случае положителен*

$\mp$ *верно разобран только один из случаев.*

10.4. Существуют ли нечетные целые числа x, y и z, удовлетворяющие равенству $(x + y)^2 + (x + z)^2 = (y + z)^2$?

Ответ: нет, не существуют.

Раскроем скобки в обеих частях данного равенства: $(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 = y^2 + 2yz + z^2 \Leftrightarrow x^2 + xy + xz = yz$. Прибавив слева и справа выражение yz и разложив левую часть на множители, получим: $(x + y)(x + z) = 2yz$.

Если x, y и z — нечетные числа, то выражение, полученное в левой части, делится на 4, а выражение, полученное в правой части — не делится на 4.

Полученное противоречие показывает, что никакая тройка нечетных целых чисел не является решением исходного уравнения.

$+$ *приведены верный ответ и верное решение*

$-$ *приведен только ответ*

10.5. В течение 92 дней авиакомпания ежедневно выполняла по десять рейсов. За день каждый самолет выполнял не более одного рейса. Известно, что для любой пары дней найдется один и только один самолет, летавший в оба эти дня. Докажите, что есть самолет, летавший каждый день.

Рассмотрим 10 самолетов, летавших в первый день. Хотя бы один из них должен был летать еще, по крайней мере, 10 дней (так как в каждый из оставшихся 91 день летал один из этих десяти самолетов).

Рассмотрим самолет, летавший не менее одиннадцати дней. Без ограничения общности можно считать, что это были дни с первого по одиннадцатый (и возможно еще какие-нибудь). Предположим, что есть день A, в который этот самолет не летал, тогда для каждого из первых одиннадцати дней и дня A найдется самолет, летавший в этот день и в день A. Для каких-то двух из одиннадцати дней (например, для первого и для второго) эти самолеты совпадут, поскольку в день A совершить более десяти рейсов невозможно. Получим противоречие: два самолета летало как в первый день, так и во второй.

$+$ *приведено верное полное решение*

$\mp$ *доказано только, что есть самолет, летавший не менее* 11 *дней*

10.6. В треугольнике ABC: $AC = \dfrac{AB+BC}{2}$. Докажите, что центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, середины сторон AB и BC и вершина B лежат на одной окружности.

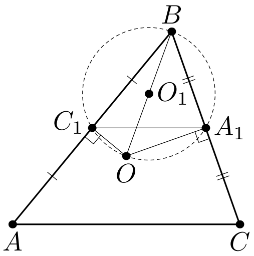

Рис. 10.6а

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, C_1 и A_1 — середины сторон AB и BC соответственно, тогда OC_1 и OA_1 — серединные перпендикуляры к этим сторонам (см. рис. 10.6а). Так как отрезок OB виден из точек C_1 и A_1 под углом $90°$, то эти точки лежат на окружности с диаметром OB.

Таким образом, мы доказали, что четыре из пяти указанных в условии задачи точек лежат на одной окружности, не используя условия $AC = \dfrac{AB+BC}{2}$. Покажем теперь, что если это условие выполняется, то на рассматриваемой окружности лежит также и точка I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Это можно сделать различными способами.

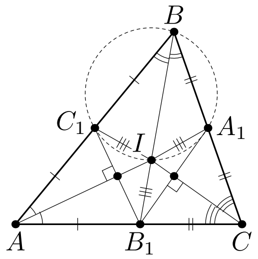

Рис. 10.6б

Первый способ. Пусть BB_1 — биссектриса треугольника ABC, тогда $\dfrac{AB_1}{CB_1} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AC_1}{CA_1}$ (см. рис. 10.6б). Учитывая, что $AC = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{BC}{2} = AC_1 + CA_1$, получим, что $AC_1 = AB_1$ и $CA_1 = CB_1$.

Поскольку AI — биссектриса угла A, то она совпадает с высотой и медианой равнобедренного треугольника AB_1C_1, поэтому, треугольник IB_1C_1 также равнобедренный, то есть $IC_1 = IB_1$. Аналогично доказывается, что $IA_1 = IB_1$. Следовательно, $IC_1 = IA_1$.

Таким образом, в треугольниках BIC_1 и BIA_1: BI — общая сторона, $\angle C_1BI = \angle A_1BI$, $IC_1 = IA_1$. Следовательно, $\angle BC_1I = \angle BA_1I$ или $\angle BC_1I + \angle BA_1I = 180°$ $(*)$.

Первый случай реализуется, если $BC_1 = BA_1$, то есть треугольник ABC — равносторонний. Тогда центры его описанной и вписанной окружностей совпадают. Во втором случае четырехугольник BC_1IA_1 является вписанным, что и требовалось.

$*$ *Это следует, например, из решения задачи на построение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон, или из теоремы синусов, примененной к рассматриваемым треугольникам:* $\dfrac{\sin\angle BC_1I}{\sin\dfrac{\angle B}{2}} = \dfrac{BI}{IC_1} = \dfrac{BI}{IA_1} = \dfrac{\sin\angle BA_1I}{\sin\dfrac{\angle B}{2}}$, *откуда* $\sin\angle BC_1I = \sin\angle BA_1I$.

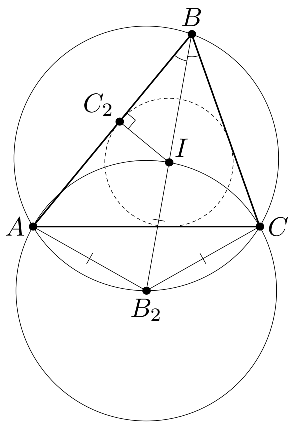

Рис. 10.6в

Второй способ. Докажем сначала, что в данном треугольнике центр I вписанной окружности делит пополам отрезок BB_2, где точка B_2 — вторая точка пересечения прямой BI с окружностью, описанной около треугольника ABC (см. рис. 10.6в).

Используем равенство $B_2A = B_2I = B_2C$, справедливое для любого треугольника $(**)$, из которого следует, что B_2 — центр окружности радиуса R, описанной около треугольника AIC. По следствию из теоремы синусов для этого треугольника, учитывая, что угол AIC между биссектрисами треугольника ABC равен $90° + \dfrac{\angle B}{2}$, получим:

$$B_2I = R = \frac{AC}{2\sin\left(90° + \dfrac{\angle B}{2}\right)} = \frac{AC}{2\cos\dfrac{\angle B}{2}}.$$

Кроме того, если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке C_2, то $BC_2 = \dfrac{AB+BC-AC}{2}$. Учитывая, что $AC = \dfrac{AB+BC}{2}$, получим: $BC_2 = \dfrac{AC}{2}$. Тогда, из прямоугольного треугольника BC_2I получим, что $BI = AC : 2\cos\dfrac{\angle B}{2}$. Таким образом, доказано, что $B_2I = BI$.

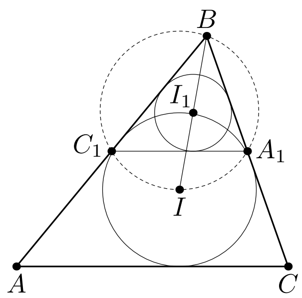

Рис. 10.6г

Теперь заметим, что при гомотетии с центром B и коэффициентом 2 образом рассмотренного ранее треугольника BC_1A_1 является данный треугольник BCA (см. рис. 10.6г). Это означает, что при указанной гомотетии центр окружности, вписанной в треугольник BC_1A_1, переходит в центр окружности, вписанной в треугольник ABC. По доказанному выше, $BI_1 = II_1$ (так как треугольник BC_1A_1 подобен треугольнику BCA, то для него также выполняется соотношение $A_1C_1 = \dfrac{1}{2}(BC_1 + BA_1)$), то точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BC_1A_1, что и требовалось.

$**$ *Это утверждение, называемое «теоремой трилистника», можно доказать, например, так (см. рис.* 10.6*в*)*:* $B_2A = B_2C$, *так как эти хорды стягивают равные дуги окружности;* $B_2A = B_2I$, *так как* $\angle AIB_2 = \angle B_2AI = \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.

$+$ *приведено верное полное решение*

$\mp$ *доказано только, что центр описанной окружности принадлежит окружности, проходящей через середины двух сторон и вершину треугольника*