5 класс

5.1. Буратино правильно решил пример, но испачкал свою тетрадь.

За каждой кляксой скрывается одна и та же цифра, отличная от нуля. Найдите эту цифру.

Ответ: 5.

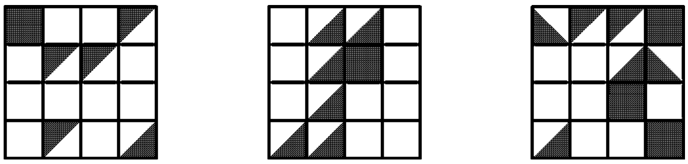
Действительно, $(55 + 55 + 1) \times 5 = 555$. *Отметим, что приведенный ответ — единственный и школьнику достаточно привести только его, либо восстановить пример.*

$+$ *приведен верный ответ*

$\mp$ *указаны две цифры, одна из которых верная*

$-$ *цифра указана неверно, либо вместе с верной цифрой указано более одной неверной*

5.2. Из прозрачной пленки вырезаны три квадрата с узорами, нарисованными на них черной краской (см. рисунок). Нарисуйте узор, который получится при наложении этих трех квадратов друг на друга (*поворачивать квадраты нельзя*).



Ответ: см. рис. 5.2.

Узор считается верно нарисованным, если каждая клетка квадрата верно «закрашена».

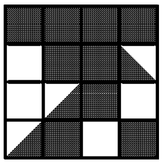


Рис. 5.2

$+$ *узор нарисован верно*

$\mp$ *расхождение с верным ответом ровно в одной клетке*

$-$ *расхождение с верным ответом более чем в одной клетке*

5.3. У Незнайки в двух карманах лежит 27 конфет. Если из правого кармана он переложит в левый столько конфет, сколько было в левом, то в правом кармане у него будет на 3 конфеты больше, чем в левом. Сколько конфет было в каждом кармане первоначально? *Ответ обоснуйте.*

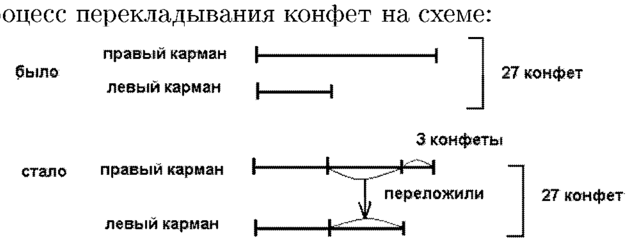
Ответ: в левом кармане — 6 конфет, а в правом — 21.

Решение. Приведем несколько возможных «арифметических» способов решения и один «алгебраический» способ.

Первый способ. После перекладывания в левом кармане стало на 3 конфеты меньше, чем в правом, а всего конфет 27. Значит, в левом кармане $(27 - 3) : 2 = 12$ конфет. До перекладывания их было вдвое меньше, то есть $12 : 2 = 6$ конфет. А в правом все остальные, то есть $27 - 6 = 21$ конфета.

Второй способ. После перекладывания количество конфет в левом кармане удвоится, а количество конфет в правом кармане будет равно удвоенному количеству конфет из левого кармана и еще 3. Следовательно, общее количество конфет у Незнайки равно учетверенному количеству конфет, которые первоначально лежали в левом кармане, и еще три конфеты. Значит, в левом кармане первоначально было $(27 - 3) : 4 = 6$ конфет, а в правом кармане — 21 конфета.

Третий способ. Покажем процесс перекладывания конфет на схеме:



Следовательно, $(27 - 3) : 4 = 6$ (конфет) — было в левом кармане; $27 - 6 = 21$ (конфета) — было в правом кармане.

Четвертый способ. Пусть x конфет было в левом кармане, тогда в правом кармане было $(27 - x)$ конфет. После перекладывания в левом кармане стало $2x$ конфет, а в правом кармане стало $(27 - 2x)$ конфет. Так как в правом стало на 3 конфеты больше, чем в левом, то составим уравнение: $27 - 2x = 2x + 3$. Его решение: $x = 6$. Таким образом, в левом кармане было 6 конфет, а в правом — 21 конфета.

$+$ *приведено полное обоснованное решение и указаны оба числа*

$\pm$ *приведено полное обоснованное решение, но найдено только одно из чисел*

∓ *ход рассуждений верен, но допущена арифметическая ошибка*

∓ *приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию задачи*

− *задача решена неверно или приведен только ответ*

5.4. Костя посадил вдоль дорожки некоторое количество луковиц тюльпанов. Потом пришла Таня и между каждой парой посаженных луковиц посадила новую луковицу. Потом пришла Инна и между каждой парой луковиц, посаженных до нее, посадила новую луковицу. Потом пришел Дима и сделал то же самое. Все посаженные луковицы взошли и расцвело 113 тюльпанов. Сколько луковиц посадил Костя? *Ответ обоснуйте.*

Ответ: Костя посадил 15 луковиц.

Решение. *Первый способ.* Процесс высаживания луковиц устроен так, что между каждыми двумя луковицами появляется новая. Следовательно, в каждом случае, новое количество луковиц равно количеству уже посаженных луковиц плюс количество интервалов между соседними луковицами. Количество таких интервалов каждый раз на 1 меньше, чем количество луковиц, поэтому количество луковиц после каждого высаживания равно удвоенному количеству уже посаженных луковиц минус один.

Теперь рассмотрим процесс с конца. После того, как Дима посадил свои луковицы, их стало 113. Значит, после работы Инны луковиц было $(113 + 1) : 2 = 57$. Аналогично, после прихода Тани было $(57 + 1) : 2 = 29$ луковиц, а Костя посадил $(29 + 1) : 2 = 15$ луковиц.

Второй способ. Цветы высаживаются в промежутки между двумя соседними, поэтому количество вновь посаженных цветков на 1 меньше, чем первоначальное количество. Значит, 113 — это сумма двух последовательных натуральных чисел, то есть $113 = 57 + 56$. Следовательно, до прихода Димы росло 57 цветков, а $57 = 29 + 28$, значит, до прихода Инны цветков было $29 = 14 + 15$. Тогда до прихода Тани росло 15 цветков, которые и посадил Костя.

Третий способ. Пусть Костя посадил x цветков, тогда Таня посадила $(x - 1)$ цветок. Всего цветков стало $(2x - 1)$, а промежутков между ними $(2x - 2)$, поэтому, Инна посадила $(2x - 2)$ цветка и их стало $(4x - 3)$. Дима посадил $(4x - 4)$ цветка и их стало $(8x - 7)$, что равно 113. Решая уравнение $8x - 7 = 113$, получим, что $x = 15$.

Если школьник схематически изобразит 113 цветков и будет показывать, как он последовательно вычеркивает уже высаженные, то это можно считать полным решением.

+ *приведено полное обоснованное решение*

± *приведены верные рассуждения, но допущена арифметическая ошибка, либо приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию задачи*

∓ *приведен только верный ответ*

− *задача решена неверно*

5.5. Семь монет расположены по кругу. Известно, что какие-то четыре из них, идущие подряд, — фальшивые и что каждая фальшивая монета легче настоящей. Объясните, как найти две фальшивые монеты за одно взвешивание на чашечных весах без гирь. (*Все фальшивые монеты весят одинаково.*)

Решение. Заметим, что три настоящие монеты также лежат подряд. Занумеруем монеты по кругу, например, двигаясь по часовой стрелке, числами от 1 до 7 (см. рис. 5.5). Далее есть два способа взвешивания.

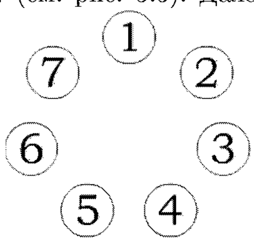


Рис. 5.5

Первый способ. На одну чашу весов положим монеты с номерами 1 и 2, а на другую чашу положим монеты с номерами 4 и 5. При таком взвешивании все четыре фальшивые монеты не могут оказаться на весах и при этом настоящих монет на весах — не более двух.

Тогда возможны только **два** принципиально различных случая: 1) на одной чаше весов находятся две фальшивые монеты, тогда на другой чаше — фальшивая и настоящая, **либо** две настоящих. При любом варианте **две фальшивые монеты находятся на более легкой чаше весов**, поэтому, они найдены; 2) на каждой чаше весов — одна фальшивая монета и одна настоящая, значит, весы находятся в равновесии. Следовательно, монеты с номерами 6 и 7 (лежащие рядом) — фальшивые.

Второй способ. На одну чашу весов положим монету с номером 1, а на другую — монету с номером 4. Возможны **три** случая: 1) весы оказались в равновесии, тогда **обе монеты на чашах — фальшивые** и мы их нашли (**1 и 4**); 2) монета 1 легче, чем монета 4, тогда **монета 1 — фальшивая**, значит, и **монета 7** — также **фальшивая** (она не входит ни в какую тройку подряд идущих монет, включающую настоящую монету 4); 3) монета 1 тяжелее, чем монета 4, тогда **монета 4 — фальшивая** и **монета 5 — также фальшивая**, она не входит ни в какую тройку подряд идущих монет, включающую настоящую монету 1.

Возможны также способы решения с теми же идеями, но изложенные совсем по-другому. В любом случае при проверке работ надо обращать особое внимание на полноту разбора всех возникающих случаев.

+ *приведено полное обоснованное решение*

∓ *при указанном способе взвешивания фальшивые монеты действительно однозначно определяются, но разобраны не все случаи*

− *указан только выбор монет*

6 класс

6.1. На рынке 10 бубликов меняют на 3 ватрушки, а одну ватрушку на 3 бублика и 5 рублей. Сколько стоит ватрушка? *Ответ обоснуйте.*

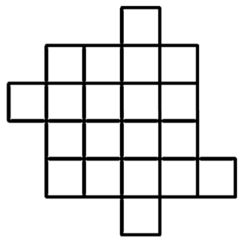
Ответ: 50 рублей.

Решение. Приведем один «арифметический» способ решения и один «алгебраический».

Первый способ. Так как одна ватрушка стоит 3 бублика и 5 рублей, то 3 ватрушки стоят 9 бубликов и 15 рублей. Так как 3 ватрушки стоят столько же, сколько 10 бубликов, то 10 бубликов стоят столько же, сколько 9 бубликов и 15 рублей. Значит, один бублик стоит 15 рублей. Следовательно, 3 бублика и 5 рублей соответствуют пятидесяти рублям, то есть ватрушка стоит 50 рублей.

Второй способ. Пусть бублик стоит x рублей. Тогда из второго условия следует, что ватрушка стоит $(3x + 5)$ рублей. Так как 10 бубликов меняют на 3 ватрушки, то составим уравнение: $10x = 3(3x + 5)$. Решая его, получим, что $x = 15$. Значит, стоимость ватрушки: $3 \cdot 15 + 5 = 50$ (рублей).

$+$ *приведено полное обоснованное решение*
$\pm$ *ход рассуждений верен, но допущена арифметическая ошибка*
$\pm$ *верно и обоснованно найдена только стоимость бублика (про то, что нужна ватрушка, ребенок забыл)*
$\mp$ *приведен только верный ответ*
$-$ *задача решена неверно*



6.2. Разрежьте фигуру (см. рисунок) по линиям сетки на 4 равные фигуры. (*Фигуры являются равными, если их можно совместить наложением, в том числе переворачивая некоторые из них.*)

Ответ: см. рис. 6.2.

$+$ *приведен верный ответ*
$\pm$ *приведено два способа разрезания, среди которых есть верный*
$\mp$ *приведено более двух способов разрезания, среди которых есть верный*
$-$ *верный ответ отсутствует*

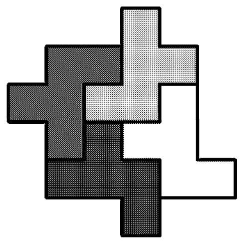


Рис. 6.2

6.3. Четверо ребят обсуждали ответ к задаче.
Коля сказал: «Это число 9».
Роман: «Это простое число».
Катя: «Это четное число».
А Наташа сказала, что это число делится на 15.
Один мальчик и одна девочка ответили верно, а двое остальных ошиблись. Какой ответ в задаче на самом деле? *Ответ обоснуйте.*

Ответ: 2.

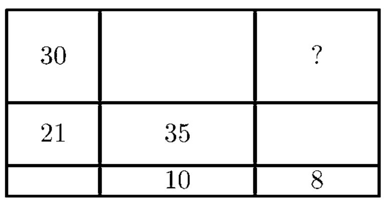
Решение. Если Коля ответил верно, то обе девочки ошиблись, так как число 9 нечётное и не делится на 15. Значит, из двух мальчиков верный ответ дал Роман. Если число делится на 15, то оно делится на два различных простых числа — на 3 и на 5, поэтому, оно не может быть простым. Следовательно, Наташа ответила неверно, тогда Катя ответила верно. Но единственное чётное простое число — это 2.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*
$\pm$ *проведено верное рассуждение и указано, кто из детей ответил верно, но ответ в задаче не получен или получен не верно*
$\mp$ *приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию задачи, но не доказано, что других ответов быть не может*
$-$ *задача решена неверно или приведен только ответ*

6.4. Паша записал на доске пример на сложение, после чего заменил некоторые цифры буквами, причем одинаковые цифры — одинаковыми буквами, а различные цифры — различными буквами. У него получилось так: **КРОСС + 2011 = СТАРТ**. Докажите, что Паша ошибся.

Решение. Заметим, что число, оканчивающееся на **СС**, при сложении с числом, оканчивающимся на 11, в сумме дают число, у которого последние две цифры различны. Это возможно только в том случае, если **С = 9**. Тогда **Т = 0** и **Р = 1**. Число **СТАРТ** начинается с цифры 9, **К** и **С** — различные цифры, следовательно, **К = 8**. Но в разряде тысяч складываются 1 и 2, поэтому там не может быть перехода через десяток.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*
$\pm$ *приведено, в целом, верное рассуждение с незначительными недочетами или пробелами*
$\mp$ *доказано только, что* **С = 9**
$-$ *задача решена неверно*



6.5. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь верхней правой части. *Ответ обоснуйте.*

Ответ: 40.

Решение. Обозначим через a, b и c — площади трех прямоугольников (см. рис. 6.5).

Заметим, что отношение площадей двух прямоугольников с общей стороной равно отношению длин двух остальных сторон.

30	a	c
21	35	b
	10	8

Рис. 6.5

Используем этот факт для двух пар прямоугольников с общими горизонтальными сторонами, площади которых 30 и a, 21 и 35. Тогда $30 : a = 21 : 35$, откуда по свойству пропорций получим: $a = 30 \cdot 35 : 21$, то есть $a = 50$. Аналогично, для прямоугольников с площадями 35 и b, 10 и 8, получим: $35 : b = 10 : 8$, откуда $b = 28$.

Тогда, действуя аналогично, для прямоугольников с площадями a и c, 35 и b, учитывая найденные значения a и b, получим: $50 : c = 35 : 28$. Решением этой пропорции является $c = 40$.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное рассуждение, но допущена вычислительная ошибка*

$\mp$ *верный ответ получен на конкретном примере (например, выбраны конкретные длины отрезков) или приведено верное рассуждение, но допущено более одной вычислительной ошибки*

$-$ *задача решена неверно или приведен только ответ*