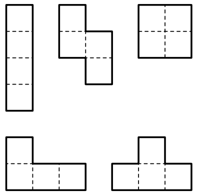
Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **7 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **180** *минут*

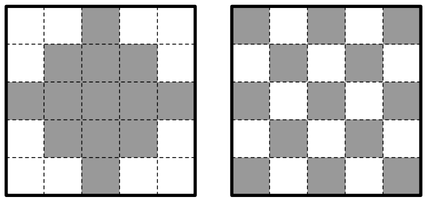
1. На длинной ленте написаны цифры **201520152015 . . .**. Вася вырезал ножницами два куска ленты и составил из них положительное число, которое делится на **45**. Приведите пример таких кусков и запишите число, составленное из них.



2. Заполните квадрат размером $\mathbf{6 \times 6}$ фигурками тетриса (см. рисунок) так, чтобы использовать фигурки каждого из указанных видов. (*Фигурки можно как поворачивать, так и переворачивать.*)

3. На завтрак Карлсон съел **40%** торта, а Малыш съел **150** г. На обед Фрекен Бок съела **30%** остатка и ещё **120** г, а Матильда вылизала оставшиеся **90** г крошек от торта. Какой массы был торт изначально?

4. За одну операцию можно поменять местами любые две строки или любые два столбца квадратной таблицы. Можно ли за несколько таких операций из закрашенной фигуры, изображенной на рисунке слева, получить закрашенную фигуру, изображенную на рисунке справа? Ответ обоснуйте.



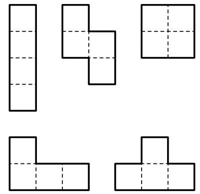
5. На доске записаны **7** различных нечётных чисел. Таня подсчитала их среднее арифметическое, а Даня упорядочил эти числа по возрастанию и выбрал из них число, оказавшееся посередине. Если из Таниного числа вычесть Данино, то получится число $\mathbf{\frac{3}{7}}$. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **7 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **180** *минут*

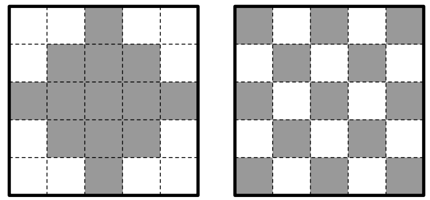
1. На длинной ленте написаны цифры **201520152015 . . .**. Вася вырезал ножницами два куска ленты и составил из них положительное число, которое делится на **45**. Приведите пример таких кусков и запишите число, составленное из них.



2. Заполните квадрат размером $\mathbf{6 \times 6}$ фигурками тетриса (см. рисунок) так, чтобы использовать фигурки каждого из указанных видов. (*Фигурки можно как поворачивать, так и переворачивать.*)

3. На завтрак Карлсон съел **40%** торта, а Малыш съел **150** г. На обед Фрекен Бок съела **30%** остатка и ещё **120** г, а Матильда вылизала оставшиеся **90** г крошек от торта. Какой массы был торт изначально?

4. За одну операцию можно поменять местами любые две строки или любые два столбца квадратной таблицы. Можно ли за несколько таких операций из закрашенной фигуры, изображенной на рисунке слева, получить закрашенную фигуру, изображенную на рисунке справа? Ответ обоснуйте.



5. На доске записаны **7** различных нечётных чисел. Таня подсчитала их среднее арифметическое, а Даня упорядочил эти числа по возрастанию и выбрал из них число, оказавшееся посередине. Если из Таниного числа вычесть Данино, то получится число $\mathbf{\frac{3}{7}}$. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

XXVII Математический праздник (городская олимпиада для 6–7 классов) пройдёт в МГУ им. М. В. Ломоносова 21 февраля 2016 года.

Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!

Регистрация и подробная информация на сайте

http://olympiads.mccme.ru/matprazdnik/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **8 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Натуральное число $\boldsymbol{n}$ называется «хорошим», если после приписывания его справа к любому натуральному числу получается число, делящееся на $\boldsymbol{n}$. Запишите десять «хороших» чисел, которые меньше, чем $\mathbf{1000}$. (*Достаточно привести ответ.*)

2. Сорока-ворона кашу варила, деток кормила. Третьему птенцу досталось столько же каши, сколько первым двум вместе взятым. Четвертому — столько же, сколько второму и третьему. Пятому — столько же, сколько третьему и четвертому. Шестому — столько же, сколько четвертому и пятому. А седьмому не досталось — каша кончилась! Известно, что пятый птенец получил $\mathbf{10}$ г каши. Сколько каши сварила сорока-ворона?

3. $\boldsymbol{ABCD}$ — выпуклый четырехугольник. Известно, что $\angle \boldsymbol{CAD} = \angle \boldsymbol{DBA} = \mathbf{40}^\circ$, $\angle \boldsymbol{CAB} = \mathbf{60}^\circ$, $\angle \boldsymbol{CBD} = \mathbf{20}^\circ$. Найдите угол $\boldsymbol{CDB}$.

4. Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встает и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

5. Внутри равностороннего треугольника $\boldsymbol{ABC}$ отмечена произвольная точка $\boldsymbol{M}$. Докажите, что можно выбрать на стороне $\boldsymbol{AB}$ точку $\boldsymbol{C_1}$, на стороне $\boldsymbol{BC}$ — точку $\boldsymbol{A_1}$, а на стороне $\boldsymbol{AC}$ — точку $\boldsymbol{B_1}$ таким образом, чтобы длины сторон треугольника $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ были равны отрезкам $\boldsymbol{MA}$, $\boldsymbol{MB}$ и $\boldsymbol{MC}$.

6. В каждой клетке таблицы размером $\mathbf{13 \times 13}$ записано одно из натуральных чисел от $\mathbf{1}$ до $\mathbf{25}$. Клетку назовем «хорошей», если среди двадцати пяти чисел, записанных в ней и во всех клетках одной с ней горизонтали и одной с ней вертикали, нет одинаковых. Могут ли все клетки одной из главных диагоналей оказаться «хорошими»?

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **8 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Натуральное число $\boldsymbol{n}$ называется «хорошим», если после приписывания его справа к любому натуральному числу получается число, делящееся на $\boldsymbol{n}$. Запишите десять «хороших» чисел, которые меньше, чем $\mathbf{1000}$. (*Достаточно привести ответ.*)

2. Сорока-ворона кашу варила, деток кормила. Третьему птенцу досталось столько же каши, сколько первым двум вместе взятым. Четвертому — столько же, сколько второму и третьему. Пятому — столько же, сколько третьему и четвертому. Шестому — столько же, сколько четвертому и пятому. А седьмому не досталось — каша кончилась! Известно, что пятый птенец получил $\mathbf{10}$ г каши. Сколько каши сварила сорока-ворона?

3. $\boldsymbol{ABCD}$ — выпуклый четырехугольник. Известно, что $\angle \boldsymbol{CAD} = \angle \boldsymbol{DBA} = \mathbf{40}^\circ$, $\angle \boldsymbol{CAB} = \mathbf{60}^\circ$, $\angle \boldsymbol{CBD} = \mathbf{20}^\circ$. Найдите угол $\boldsymbol{CDB}$.

4. Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встает и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

5. Внутри равностороннего треугольника $\boldsymbol{ABC}$ отмечена произвольная точка $\boldsymbol{M}$. Докажите, что можно выбрать на стороне $\boldsymbol{AB}$ точку $\boldsymbol{C_1}$, на стороне $\boldsymbol{BC}$ — точку $\boldsymbol{A_1}$, а на стороне $\boldsymbol{AC}$ — точку $\boldsymbol{B_1}$ таким образом, чтобы длины сторон треугольника $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ были равны отрезкам $\boldsymbol{MA}$, $\boldsymbol{MB}$ и $\boldsymbol{MC}$.

6. В каждой клетке таблицы размером $\mathbf{13 \times 13}$ записано одно из натуральных чисел от $\mathbf{1}$ до $\mathbf{25}$. Клетку назовем «хорошей», если среди двадцати пяти чисел, записанных в ней и во всех клетках одной с ней горизонтали и одной с ней вертикали, нет одинаковых. Могут ли все клетки одной из главных диагоналей оказаться «хорошими»?

LXXIX Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов)
пройдет в МГУ 13 марта 2016 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!
Предварительная регистрация и подробная информация на сайте
http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **9 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **240** *минут*

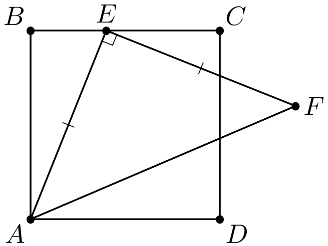
1. Известно, что $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Какие значения может принимать выражение $a(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+c(c^2-a^2)$?

2. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в **54** раза?

3. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. На стороне AB выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C — точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что $\angle BOP = \angle COQ$.

4. Из Златоуста в Миасс выехали одновременно «ГАЗ», «МАЗ» и «КамАЗ». «КамАЗ», доехав до Миасса, сразу повернул назад и встретил «МАЗ» в **18** км, а «ГАЗ» — в **25** км от Миасса. «МАЗ», доехав до Миасса, также сразу повернул назад и встретил «ГАЗ» в **8** км от Миасса. Каково расстояние от Златоуста до Миасса?

5. Квадрат $ABCD$ и равнобедренный прямоугольный треугольник AEF ($\angle AEF = 90°$) расположены так, что точка E лежит на отрезке BC (см. рисунок). Найдите угол DCF.



6. В ожидании покупателей продавец арбузов поочерёдно взвесил **20** арбузов (массой **1** кг, **2** кг, **3** кг, ..., **20** кг), уравновешивая арбуз на одной чашке весов одной или двумя гирями на другой чашке (возможно, одинаковыми). При этом продавец записывал на бумажке, гири какой массы он использовал. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в его записях, если масса каждой гири — целое число килограммов?

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт в феврале 2016 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **9 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **240** *минут*

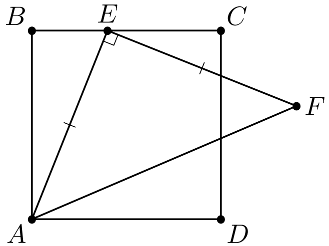
1. Известно, что $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Какие значения может принимать выражение $a(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+c(c^2-a^2)$?

2. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в **54** раза?

3. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. На стороне AB выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C — точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что $\angle BOP = \angle COQ$.

4. Из Златоуста в Миасс выехали одновременно «ГАЗ», «МАЗ» и «КамАЗ». «КамАЗ», доехав до Миасса, сразу повернул назад и встретил «МАЗ» в **18** км, а «ГАЗ» — в **25** км от Миасса. «МАЗ», доехав до Миасса, также сразу повернул назад и встретил «ГАЗ» в **8** км от Миасса. Каково расстояние от Златоуста до Миасса?

5. Квадрат $ABCD$ и равнобедренный прямоугольный треугольник AEF ($\angle AEF = 90°$) расположены так, что точка E лежит на отрезке BC (см. рисунок). Найдите угол DCF.



6. В ожидании покупателей продавец арбузов поочерёдно взвесил **20** арбузов (массой **1** кг, **2** кг, **3** кг, ..., **20** кг), уравновешивая арбуз на одной чашке весов одной или двумя гирями на другой чашке (возможно, одинаковыми). При этом продавец записывал на бумажке, гири какой массы он использовал. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в его записях, если масса каждой гири — целое число килограммов?

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт в феврале 2016 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXIX Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов)
пройдет в МГУ 13 марта 2016 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!
Предварительная регистрация и подробная информация на сайте
http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **10 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. В клетках квадрата $\mathbf{3 \times 3}$ записаны буквы (см. рисунок). Можно ли их расставить так, чтобы любые две буквы, исходно отстоявшие на ход коня, после перестановки оказались в клетках, отстоящих на ход короля? (*Например, из клетки с буквой* $\boldsymbol{a}$ *конь может пойти в клетки с буквами* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{h}$*, а король — в клетки с буквами* $\boldsymbol{b}$*,* $\boldsymbol{d}$ *и* $\boldsymbol{e}$*.*)

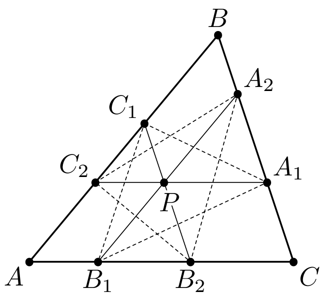
a	b	c
d	e	f
g	h	i

2. Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя (включая **1** и само число)?

3. В остроугольном треугольнике $\boldsymbol{MKN}$ проведена биссектриса $\boldsymbol{KL}$. Точка $\boldsymbol{X}$ на стороне $\boldsymbol{MK}$ такова, что $\boldsymbol{KX = KN}$. Докажите, что прямые $\boldsymbol{KO}$ и $\boldsymbol{XL}$ перпендикулярны ($\boldsymbol{O}$ — центр описанной окружности треугольника $\boldsymbol{MKN}$).

4. Даны три квадратных трехчлена: $\boldsymbol{x^2+b_1x+c_1}$, $\boldsymbol{x^2+b_2x+c_2}$ и $\boldsymbol{x^2+\frac{b_1+b_2}{2}x+\frac{c_1+c_2}{2}}$. Известно, что их сумма имеет корни (возможно, два совпадающих). Докажите, что хотя бы у двух из этих трехчленов также есть корни (возможно, два совпадающих).

5. В турнире участвовали **50** шахматистов. В некоторый момент турнира была сыграна **61** партия, причем каждый участник сыграл либо две партии, либо три (и никто не играл друг с другом дважды). Могло ли оказаться так, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой?



6. Через точку $\boldsymbol{P}$ проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника $\boldsymbol{ABC}$ (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ и $\boldsymbol{A_2B_2C_2}$ равны.

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт в феврале 2016 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXIX Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов)
пройдет в МГУ 13 марта 2016 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!
Предварительная регистрация и подробная информация на сайте
http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **10 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. В клетках квадрата $\mathbf{3 \times 3}$ записаны буквы (см. рисунок). Можно ли их расставить так, чтобы любые две буквы, исходно отстоявшие на ход коня, после перестановки оказались в клетках, отстоящих на ход короля? (*Например, из клетки с буквой* $\boldsymbol{a}$ *конь может пойти в клетки с буквами* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{h}$*, а король — в клетки с буквами* $\boldsymbol{b}$*,* $\boldsymbol{d}$ *и* $\boldsymbol{e}$*.*)

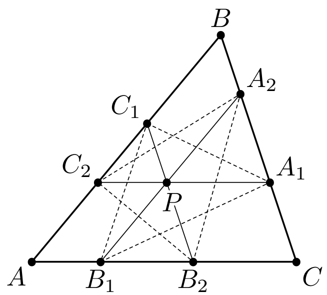
a	b	c
d	e	f
g	h	i

2. Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя (включая **1** и само число)?

3. В остроугольном треугольнике $\boldsymbol{MKN}$ проведена биссектриса $\boldsymbol{KL}$. Точка $\boldsymbol{X}$ на стороне $\boldsymbol{MK}$ такова, что $\boldsymbol{KX = KN}$. Докажите, что прямые $\boldsymbol{KO}$ и $\boldsymbol{XL}$ перпендикулярны ($\boldsymbol{O}$ — центр описанной окружности треугольника $\boldsymbol{MKN}$).

4. Даны три квадратных трехчлена: $\boldsymbol{x^2+b_1x+c_1}$, $\boldsymbol{x^2+b_2x+c_2}$ и $\boldsymbol{x^2+\frac{b_1+b_2}{2}x+\frac{c_1+c_2}{2}}$. Известно, что их сумма имеет корни (возможно, два совпадающих). Докажите, что хотя бы у двух из этих трехчленов также есть корни (возможно, два совпадающих).

5. В турнире участвовали **50** шахматистов. В некоторый момент турнира была сыграна **61** партия, причем каждый участник сыграл либо две партии, либо три (и никто не играл друг с другом дважды). Могло ли оказаться так, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой?



6. Через точку $\boldsymbol{P}$ проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника $\boldsymbol{ABC}$ (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ и $\boldsymbol{A_2B_2C_2}$ равны.

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт в феврале 2016 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXIX Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов)
пройдет в МГУ 13 марта 2016 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!
Предварительная регистрация и подробная информация на сайте
http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **11 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Существует ли такое натуральное число n, большее 1, что значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом?

2. Существуют ли такие целые числа p и q, что при любых целых значениях x выражение x^2+px+q кратно 3?

3. В квадрате $ABCD$ точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Что больше: площадь треугольника AGF или площадь четырехугольника $GECF$?

4. Решите неравенство: $\sin\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}\cos\frac{x}{x^2+1}>0$.

5. Каждая боковая грань пирамиды является прямоугольным треугольником, в котором прямой угол примыкает к основанию пирамиды. В пирамиде проведена высота. Может ли она лежать внутри пирамиды?

6. Каждая клетка таблицы размером 7×8 (7 строк и 8 столбцов) покрашена в один из трех цветов: красный, желтый или зеленый. При этом в каждой строке красных клеток не меньше, чем желтых и не меньше, чем зеленых, а в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем красных и не меньше, чем зеленых. Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице?

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт в феврале 2016 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXIX Московская математическая олимпиада:
http://olympiads.mccme.ru/mmo/
Объединенная межвузовская математическая олимпиада:
http://olimpiada.ru/ommo
Внимание! У обеих олимпиад в январе пройдёт **обязательный** заочный тур.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **11 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Существует ли такое натуральное число n, большее 1, что значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом?

2. Существуют ли такие целые числа p и q, что при любых целых значениях x выражение x^2+px+q кратно 3?

3. В квадрате $ABCD$ точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Что больше: площадь треугольника AGF или площадь четырехугольника $GECF$?

4. Решите неравенство: $\sin\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}\cos\frac{x}{x^2+1}>0$.

5. Каждая боковая грань пирамиды является прямоугольным треугольником, в котором прямой угол примыкает к основанию пирамиды. В пирамиде проведена высота. Может ли она лежать внутри пирамиды?

6. Каждая клетка таблицы размером 7×8 (7 строк и 8 столбцов) покрашена в один из трех цветов: красный, желтый или зеленый. При этом в каждой строке красных клеток не меньше, чем желтых и не меньше, чем зеленых, а в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем красных и не меньше, чем зеленых. Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице?

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт в феврале 2016 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXIX Московская математическая олимпиада:
http://olympiads.mccme.ru/mmo/
Объединенная межвузовская математическая олимпиада:
http://olimpiada.ru/ommo
Внимание! У обеих олимпиад в январе пройдёт **обязательный** заочный тур.