LXXXII
Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Факультет математики НИУ ВШЭ
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

www.mccme.ru/mmo

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXXII ММО
член-корреспондент РАН *А. Г. Кузнецов*

Сборник подготовили:

Е. В. Бакаев, А. В. Бегунц, А. Д. Блинков, И. И. Богданов, Е. Ю. Бунькова, М. А. Волчкевич, А. И. Галочкин, А. О. Герасименко, Т. И. Голенищева-Кутузова, Д. В. Горяшин, А. В. Грибалко, А. С. Гусев, М. А. Дидин, А. В. Доледенок, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, Т. А. Зайцев, А. А. Заславский, О. А. Заславский, Т. В. Казицына, В. А. Клепцын, О. Н. Косухин, Ю. С. Котельникова, Е. А. Кукса, С. В. Маркелов, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, Е. А. Морозов, Д. Г. Мухин, В. В. Новиков, А. А. Пономарёв, А. Н. Попов, Л. А. Попов, И. В. Раскина, Е. Н. Рябов, Ю. В. Тихонов, С. И. Токарев, А. С. Трепалин, А. Л. Федулкин, И. И. Фролов, А. В. Хачатурян, М. А. Хачатурян, А. В. Шаповалов, Д. В. Швецов, И. А. Шейпак, Д. Э. Шноль, И. А. Эльман, А. Ю. Юран, И. В. Ященко

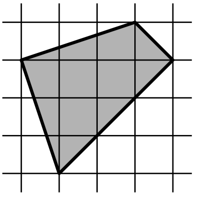
Проведение олимпиады и издание книги осуществлены при поддержке фирмы «НИКС», компании «Яндекс» и фонда «Математические этюды».

6 класс

1. Саша выписала числа от одного до ста, а Миша часть из них стер. Среди оставшихся у 20 чисел есть в записи единица, у 19 чисел есть в записи двойка, а у 30 чисел нет ни единицы, ни двойки. Сколько чисел стер Миша?

(*А. В. Шаповалов*)

2. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на четыре одинаковые части. (*М. А. Волчкевич*)

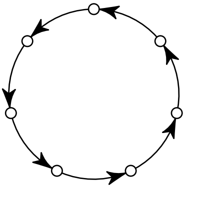


3. Сеня не умеет писать некоторые буквы и всегда в них ошибается. В слове ТЕТРАЭДР он сделал бы пять ошибок, в слове ДОДЕКАЭДР — шесть, а в слове ИКОСАЭДР — семь. А сколько ошибок он сделает в слове ОКТАЭДР?

(*Е. В. Бакаев*)

4. Семь городов соединены по кругу семью односторонними авиарейсами (см. рисунок). Назначьте (нарисуйте стрелочками) еще несколько односторонних рейсов так, чтобы от любого города до любого другого можно было бы добраться, сделав не более двух пересадок. Постарайтесь сделать число дополнительных рейсов как можно меньше.

(*В. А. Клепцын*)



5. Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 2019 деревьев: 1009 сосен и 1010 елок. Докажите, что обязательно найдется дерево, рядом с которым растет сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растет сосна. (*Е. В. Бакаев*)

6. Каждая грань куба $6 \times 6 \times 6$ разбита на клетки 1×1. Куб оклеили квадратами 2×2 так, что каждый квадрат накрывает ровно четыре клетки, никакие квадраты не совпадают и каждая клетка накрыта одинаковым числом квадратов. Какое наибольшее значение может принимать это одинаковое число? (Квадрат можно перегибать через ребро.) (*А. В. Шаповалов*)

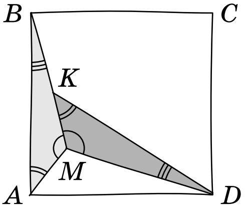
7 класс

1. Ньют хочет перевезти девять фантастических тварей весом 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 кг в трех чемоданах, по три твари в каждом. Каждый чемодан должен весить меньше 20 кг. Если вес какой-нибудь твари будет делиться на вес другой твари из того же чемодана, они подерутся. Как Ньюту распределить тварей по чемоданам, чтобы никто не подрался? (*М. А. Евдокимов, И. В. Раскина*)

2. На завтрак группа из 5 слонов и 7 бегемотов съела 11 круглых и 20 кубических арбузов, а группа из 8 слонов и 4 бегемотов — 20 круглых и 8 кубических арбузов.

Все слоны съели поровну (одно и то же целое число) арбузов. И все бегемоты съели поровну арбузов. Но один вид животных ест и круглые, и кубические арбузы, а другой вид привередливый и ест арбузы только одной из форм. Определите, какой вид (слоны или бегемоты) привередлив и какие арбузы он предпочитает. (*М. А. Хачатурян*)

3. Два равных треугольника расположены внутри квадрата, как показано на рисунке. Найдите их углы. (*Е. В. Бакаев*)



4. Имеется три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо объединить две кучки, после чего разделить эти камни на четыре кучки. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из играющих (Петя или Вася) может выиграть, как бы ни играл соперник?

(*А. В. Шаповалов*)

5. Максим сложил на столе из 9 квадратов и 19 равносторонних треугольников (не накладывая их друг на друга) многоугольник. Мог ли периметр этого многоугольника оказаться равным 15 см, если стороны всех квадратов и треугольников равны 1 см? (*М. А. Волчкевич*)

6. В ряд лежат 100 монет, часть — вверх орлом, а остальные — вверх решкой. За одну операцию разрешается выбрать семь монет, лежащих через равные промежутки (т. е. семь монет, лежащих подряд, или семь монет, лежащих через одну, и т. д.), и все семь монет перевернуть. Докажите, что при помощи таких операций можно все монеты положить вверх орлом. (*С. И. Токарев, А. В. Шаповалов*)

8 класс

1. Все таверны в царстве принадлежат трем фирмам. В целях борьбы с монополиями царь Горох издал следующий указ: каждый день, если у некоторой фирмы оказывается более половины всех таверн и число ее таверн делится на 5, то у этой фирмы остается только пятая часть ее таверн, а остальные закрываются. Могло ли так случиться, что через три дня у всех фирм стало меньше таверн? (Новые таверны в это время открываться не могут.)

(*И. В. Ященко, А. В. Шаповалов*)

2. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $n^2+20n+19$ делится на 2019. (*Д. Э. Шноль*)

3. Про трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB=BD$. Пусть точка M — середина боковой стороны CD, а O — точка пересечения отрезков AC и BM. Докажите, что треугольник BOC — равнобедренный. (*Л. А. Попов*)

4. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево. (*С.А.Дориченко*)

5. Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB=BC=CK$ и $\angle KAC=30^\circ$. Найдите угол AKB. (*Е.В.Бакаев*)

6. В клетках квадратной таблицы $n\times n$, где $n>1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n, — в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

(*А. В. Грибалко*)

9 класс

1. Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает 7 различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвертое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием? (*М.А. Евдокимов*)

2. См. задачу 2 для 8 класса.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO. (*Е.В.Бакаев*)

4. Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили — в красный цвет, если между его концами четное число вершин, и в синий — в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

(*И. И. Богданов*)

5. Биссектриса угла ABC пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точках B и L. Точка M — середина отрезка AC. На дуге ABC окружности ω выбрана точка E так, что $EM \parallel BL$. Прямые AB и BC пересекают прямую EL в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PE = EQ$. (*Е. В. Бакаев*)

6. Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить? (*М. А. Дидин*)

10 класс

1. Приведите пример девятизначного натурального числа, которое делится на 2, если зачеркнуть вторую (слева) цифру, на 3 — если зачеркнуть в исходном числе третью цифру, ..., делится на 9, если в исходном числе зачеркнуть девятую цифру. (*М. А. Евдокимов*)

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. См. задачу 4 для 8 класса.

4. Каждая точка плоскости раскрашена в один из трех цветов. Обязательно ли найдется треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет? (*О. Н. Косухин*)

5. Петя и Вася играют в игру. Для каждых пяти различных переменных из набора $x_1, \ldots, x_{10}$ имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. Когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети? (*И. И. Богданов*)

6. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0, 0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идет по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.) (*И. Чанакчи, Р. Шиффлер*)

11 класс (1-й день)

1. Пусть $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Вычислите

$$\left(1 - \frac{2}{f(1)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(2)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(3)}\right)\ldots\left(1 - \frac{2}{f(2019)}\right).$$

(*М. А. Евдокимов*)

2. На экране компьютера напечатано натуральное число, делящееся на 7, а курсор находится в промежутке между некоторыми двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что, если ее впечатать в этот промежуток любое число раз, то все получившиеся числа также будут делиться на 7.[1] (*А. И. Галочкин*)

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. Докажите, что для любых различных натуральных чисел m и n справедливо неравенство $|\sqrt[n]{m} - \sqrt[m]{n}| > \frac{1}{mn}$.

(*Д. В. Горяшин*)

5. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1. Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1?

(*М. А. Евдокимов*)

6. См. задачу 6 для 10 класса.

---

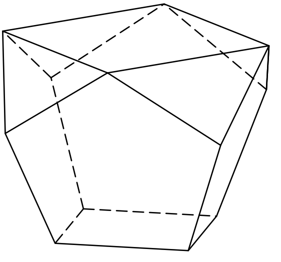
[1]Например, все числа 259, 2569, 25669, 256669, ..., а также 2359, 23359, 233359, ... делятся на 7.

11 класс (2-й день)

1. Пользуясь равенством $\lg 11 = 1{,}0413\ldots$, найдите наименьшее число $n > 1$, для которого среди n-значных чисел нет ни одного, равного некоторой натуральной степени числа 11. (*Д.В.Горяшин*)

2. Существует ли такая гипербола, задаваемая уравнением вида $y = \frac{a}{x}$, что в первой координатной четверти ($x > 0$, $y > 0$) под ней лежат ровно 82 точки с целочисленными координатами? (*А.В.Бегунц*)

3. У многогранника, изображенного на рисунке, грани — четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего? (*А.Н.Попов*)



4. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ и для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, уравнение

$$a_1(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + a_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень.
(*О.Н.Косухин*)

5. На доске написано несколько чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b, а затем вместо одного из них написать число $\frac{a+b}{4}$. Какое наименьшее число может остаться на доске после 2018 таких операций, если изначально на ней написано 2019 единиц? (*И.А.Шейпак*)

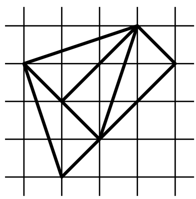
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс

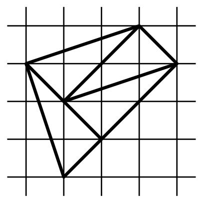
1. *Ответ.* 33.

Решение. Среди чисел от 1 до 100 единицу в записи содержит ровно двадцать: это сама единица, десять чисел от 10 до 19, числа 21, 31, ..., 91 (их восемь) и число 100. Значит, ни одно из этих чисел не было стерто. Аналогично, чисел с двойкой ровно девятнадцать: сама двойка, десять чисел третьего десятка, а также 12, 32, 42, ..., 92 (таких восемь). То есть и из них Миша ни одно не стер. Всего таких чисел $19 + 20 - 2 = 37$ (мы вычитаем 2, поскольку числа 12 и 21 посчитаны два раза). Всего осталось $37 + 30 = 67$ чисел, а Миша стер $100 - 67 = 33$ числа.

2. *Решение.* См. рисунок.



или



Комментарий. Решение задачи может стать нагляднее, если вместо обычной сетки с горизонтальными и вертикальными линиями рассмотреть диагональную, изображенную на рис. 1 пунктирными линиями. На диагональной сетке наша фигура имеет площадь 4 клетки, и ее надо разрезать на 4 фигуры площади 1. Аналогичная фигура на обычной сетке изображена на рис. 2, ее разрезание там проще увидеть, а потом его можно перенести на исходную фигуру.

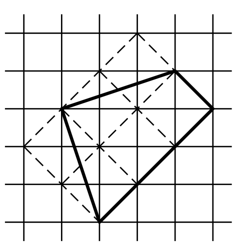


Рис. 1

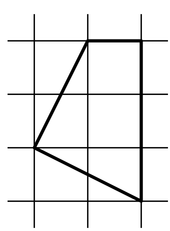
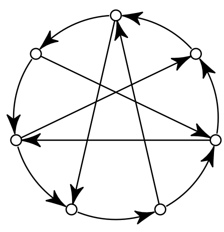


Рис. 2

3. *Ответ.* 5.

Решение. Если Сеня с ошибкой пишет Д, то из букв О, Е, К, А, Э, Р, которые еще входят в ДОДЕКАЭДР, он в трех ошибается, а три пишет верно. Но все эти буквы, кроме Е, входят и в ИКОСАЭДР, то есть там он напишет верно как минимум две буквы и никак не сможет сделать 7 ошибок. Значит, букву Д Сеня пишет правильно. Тогда он неминуемо пишет с ошибкой все остальные буквы слов ДОДЕКАЭДР и ИКОСАЭДР, а в слове ТЕТРАЭДР, таким образом, помимо Д, еще верно пишет букву Т, но ошибается во всех остальных. Теперь ясно, что в слове ОКТАЭДР Сеня сделает пять ошибок.

4. *Решение.* Пример с пятью дополнительными рейсами см. на рисунке. Можно доказать, что добавить меньшее число рейсов невозможно.



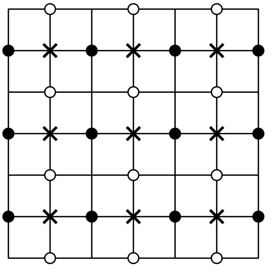
5. *Решение.* Обойдем озеро по кругу и напишем на деревьях буквы: А, Б, В, затем снова А, Б, В и так далее. Деревьев с каждой буквой будет по $2019 : 3 = 673$. Если бы сосен с каждой буквой было бы не более чем 336, то их всего было бы не более чем $336 \cdot 3 = 1008$. А так как их 1009, то сосен с какой-то буквой (скажем, А) будет хотя бы 337. (Такое рассуждение часто встречается в решениях математических задач и называется принципом Дирихле.) Рассмотрим теперь только деревья с буквой А. Если какие-то две сосны стоят подряд, то задача решена — дерево с буквой В между ними удовлетворяет условиям. Если же между каждыми соседними соснами с буквой А растет хотя бы по одной елке, то деревьев с буквой А будет не менее чем $337 \cdot 2 = 674$, а это не так.

6. *Ответ.* 3.

Решение. Оценка. Клетку в углу грани можно накрыть тремя способами (целиком в грани, с перегибом через одно ребро угла, с перегибом через другое ребро угла). Значит, каждая клетка накрыта не более чем тремя квадратами.

Пример. Рассмотрим обычное покрытие куба квадратами, когда каждая грань покрыта девятью квадратами. Из обычного покрытия можно получить повернутое: оставим нетронутыми две противоположные грани, а на остальных четырех гранях сдвинем все квадраты по кольцу на одну клетку. Так как пару противоположных граней можно выбрать тремя способами, то повернутых покрытий получится ровно три. Покажем, что не совпадают никакие два квадрата на покрытиях, повернутых по-разному.

Действительно, рассмотрим одну грань. На рисунке отмечены центры покрывающих ее квадратов: крестиками, если эта грань не сдвигалась, черными и белыми точками — если сдвигалась в одном или другом направлении. Видно, что никакие центры, а значит и никакие квадраты не совпали.



7 класс

1. *Ответ.* В первый чемодан посадить тварей весом 10, 4, 3 кг; во второй — 9, 7, 2; в третий — 8, 6, 5.

Комментарий. Найти ответ (и доказать, что он единственен) можно следующим образом. Тварей с весами 10, 9 и 8 кг необходимо поместить в разные чемоданы (иначе один чемодан будет слишком тяжелым). Далее, чтобы никто не подрался, тварь весом 2 кг необходимо поместить во второй из этих чемоданов, а тогда тварь весом 4 кг — в первый. После этого нетрудно распределить и оставшихся тварей.

2. *Ответ.* Слоны едят только круглые арбузы.

Решение. Выясним сначала, сколько арбузов ест на завтрак каждое из животных. По условию 5 слонов и 7 бегемотов съедают 31 арбуз, а 8 слонов и 4 бегемота — 28 арбузов. Мы видим, что если заменить трех бегемотов на трех слонов, то требуется на три арбуза меньше. Значит, 12 слонов съели бы $31-7=24$ арбуза (т.е. каждый по 2), а 12 бегемотов $31+5=36$ арбузов (т.е. каждый по 3).

В первой группе бегемоты съели $7\cdot 3=21$ арбуз. Столько арбузов одной формы не было, значит, бегемоты едят арбузы любой формы, а привередливы слоны. Во второй группе слоны съели $8\cdot 2=16$ арбузов. Столько кубических арбузов не было, значит, слоны предпочитают именно круглые арбузы.

3. *Ответ.* 120°, 45°, 15°.

Решение. Заметим, что треугольник MAD тоже равен треугольнику MAB — по трем сторонам: сторона MA у них общая, $AD=AB$ как стороны квадрата, $MD=MB$ по условию (лежат напротив соответственных углов в равных треугольниках).

Значит, $\angle BAM=\angle MAD=90^\circ/2=45^\circ$. В точке M сходятся три соответственных угла равных треугольников, поэтому $\angle AMB=360^\circ/3=120^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180°, значит, $\angle ABM=180^\circ-120^\circ-45^\circ=15^\circ$.

4. *Ответ.* Вася.

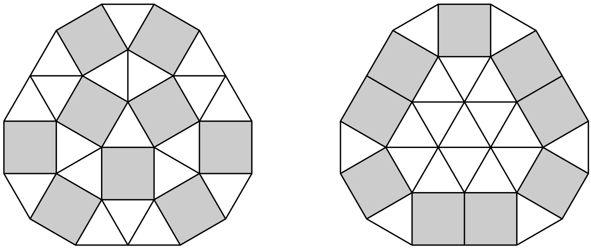
Комментарий. На самом деле это игра-шутка: Вася выигрывает вне зависимости от действий игроков.

Решение. За ход две кучи заменяются на четыре, т.е. число куч увеличивается на 2. А сколько будет куч, когда игра закончится? В начале число куч было нечетным, поэтому, увеличиваясь на два, оно все время будет оставаться нечетным.

Если очередной ход сделать нельзя, то в двух самых больших кучках в сумме не более 3 камней. Тогда во всех остальных кучках по 1 камню и их не менее $120-3=117$ штук. То есть всего должно быть (хотя бы) 119 куч.

Но чтобы получить 119 куч, надо сделать $(119-3):2=$ $=58$ ходов. Это число четно, значит, последний ход сделал Вася (и он выиграл).

5. *Ответ.* Да, мог (см. рис.).



Комментарии. 1. Сложность тут в том, что предлагается сложить фигуру довольно маленького периметра: даже если складывать многоугольник только из квадратов, то получится периметр не меньше 12 см, а надо еще добавить целых 19 треугольников.

Из всех фигур, имеющих данную площадь, наименьший периметр имеет круг. Поэтому если такой многоугольник существует, то, видимо, он должен быть близок к кругу.

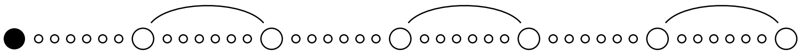
Кстати, можно подсчитать, что периметр круга, равновеликого нашему многоугольнику, составляет примерно 14,7 см. Так что получить многоугольник еще меньшего периметра невозможно.

2. Угол при вершине квадрата — половина развернутого, а при вершине правильного треугольника — треть развернутого. Поэтому во внутренней вершине могут сходиться либо 6 треугольников, либо 3 треугольника и 2 квадрата, либо 4 квадрата (это помогает проверить, возможна ли в действительности нарисованная неточно от руки картинка).

6. *Решение.* Ясно, что достаточно научиться переворачивать каждую из монет (сохраняя положение остальных).

Покажем сначала, как перевернуть пару монет, между которыми лежит ровно 6 монет. Если мысленно объединить эту пару с монетами между ними, получится группа из 8 монет подряд. Перевернем в этой группе 7 левых монет, затем 7 правых. Тогда крайние монеты перевернутся по разу, а промежуточные дважды (т.е. вернутся в исходное положение).

Пусть теперь мы хотим перевернуть какую-то одну монету. Будем считать, что она лежит в левой половине (для правой половины рассуждения аналогичны). Посмотрим на семерку монет, первая из которых — выбранная нами, следующая лежит через 6 монет, следующая еще через 6 и т. д.



Эта семерка состоит из выбранной нами монеты и трех пар, в которых монеты лежат с промежутками в 6. Поэтому мы можем перевернуть каждую из этих пар (как описано выше), а потом всю семерку. В итоге положение сменит только выбранная монета.

8 класс

1. *Ответ.* Да, могло.

Решение. Приведем пример. Пусть изначально у фирм соответственно 60, 35, 20 таверн. Тогда в первый день 1-я фирма лишится 48 таверн, и останется 12, 35, 20 таверн. На второй день закроется 28 таверн второй фирмы, и останутся 12, 7, 20 таверн. Наконец, на третий день закроются 16 таверн третьей фирмы.

Замечание. Существует множество других примеров.

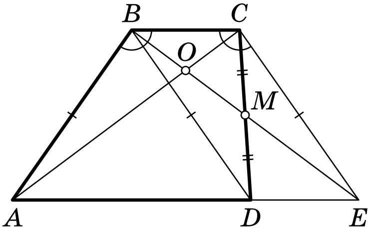
2. *Ответ.* 2000.

Первое решение. Заметим, что число 2019 представляется как $3 \cdot 673$, где числа 3 и 673 — простые, а выражение $n^2+20n+19$ представляется как $(n+19)(n+1)$.

Хотя бы одно из чисел $n+19$ или $n+1$ должно делиться на 3. Но так как эти числа отличаются на 18, то они оба делятся на 3. Кроме того, какое-то из них должно делиться на 673. Значит, какое-то из этих чисел делится на 2019. Наименьшее n, при котором это возможно — это 2000.

Второе решение. Запишем условие в виде сравнения: $n^2+20n+19 \equiv 0 \pmod{2019}$, откуда следует $n^2+20n+19 \equiv$ $\equiv 0 \Leftrightarrow n^2+2n+1 \equiv 0 \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 0 \pmod 3$ и $n^2+20n+19 \equiv$ $\equiv 0 \Leftrightarrow (n+1)(n+19) \equiv 0 \pmod{673}$. Первое сравнение имеет по модулю 3 единственное решение -1, второе по модулю 673 имеет два решения: -1 и -19. Учитывая, что числа 3 и 673 простые и $-19 \equiv -1 \pmod 3$, получаем, что $n \equiv -1 \pmod{2019}$ или $n \equiv -19 \pmod{2019}$, откуда и следует ответ.

3. *Решение.* На луче BM за точку M отметим точку E так, что $ME = MB$ (см. рис.). Заметим, что $BCED$ — параллелограмм, так как его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Тогда $DE \parallel BC$, откуда следует, что точка E лежит на прямой AD.

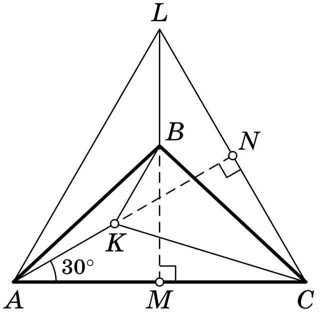


Имеем $AB = BD = CE$, т. е. $ABCE$ — равнобедренная трапеция. Так как ее углы ABC и BCE равны, то треугольники ABC и ECB равны по двум сторонам ($AB = EC$, $BC = CB$) и углу между ними. Тогда равны и их соответственные углы BCA и CBE, откуда следует требуемое.

4. *Решение.* Назовем самого левого кузнечика Ричардом. Пусть тогда сначала все кузнечики, кроме Ричарда, перепрыгнут через Ричарда. Ясно, что теперь кузнечики находятся в конфигурации, симметричной изначальной. Тогда они могут, используя ходы, симметричные тем, которые они бы делали при прыжках вправо, добиться требуемого.

5. *Ответ.* 150°.

Первое решение. Построим на AC равносторонний треугольник ACL так, чтобы точки L и B лежали с одной стороны от AC (см. рис.).

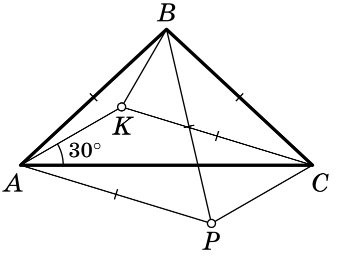


Проведем в треугольнике ABC высоту BM, она же серединный перпендикуляр к стороне AC. Так как ALC — равносторонний, точка L также лежит на прямой BM. Кроме этого, проведем в треугольнике ALC высоту AN. Так как AN является биссектрисой угла LAC, то точка K лежит на этой прямой. Отметим также, что K лежит с той же стороны от BM, что и A, так как из-за $CK = CB$ она не может лежать внутри треугольника BMC; таким образом, K лежит на отрезке AN.

Заметим, что прямоугольные треугольники BMC и KNC равны по катету и гипотенузе ($MC = AC/2 = LC/2 = NC$, $BC = KC$). Отсюда следует, во-первых, что $BM = KN$, во-вторых, что B лежит на отрезке LM (так как $BM = KN < AN = LM$), и, наконец, что $LB = LM - BM = AN - KN = AK$.

Теперь рассмотрим четырехугольник $ALBK$. В нем $\angle LAK = \angle ALB = 30^\circ$ и $AK = LB$, то есть это равнобокая трапеция. Отсюда следует, что $\angle AKB = 180^\circ - \angle KAL = 150^\circ$.

Второе решение. Построим на отрезке AB равносторонний треугольник ABP так, чтобы точки P и C лежали по одну сторону от прямой AB (см. рис.). Тогда треугольник PBC — равнобедренный с основанием PC ($BP = AB = BC$).



Как известно, любой отрезок, лежащий внутри треугольника, короче одной из его сторон (если он не совпадает ни с одной из них); а так как отрезок CK равен сторонам AB и BC треугольника ABC, он должен быть короче AC. Отсюда следует, что для треугольника ABC верно $AC > AB = BC$, то есть $\angle ABC > 60^\circ > \angle BAC$. Следовательно, точка P лежит по другую сторону от прямой AC, чем точка B.

Заметим, что

$$\angle BCP = \frac{180^\circ - \angle PBC}{2}$$

и

$$\angle BCA = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2},$$

так как треугольники ABC и PBC — равнобедренные. Тогда

$$\angle PCA = \angle PCB - \angle ACB = \frac{(180^\circ - \angle PBC) - (180^\circ - \angle ABC)}{2} = \\ = \frac{\angle ABC - \angle PBC}{2} = \frac{\angle ABP}{2} = 30^\circ,$$

так как треугольник ABP — равносторонний. Из равенства углов $\angle KAC = 30^\circ = \angle ACP$ получаем $AK \parallel CP$.

Параллельность AK и CP и равенство $KC = AP$ означают, что четырехугольник $AKCP$ — параллелограмм или равнобокая трапеция. Заметим, что $\angle KAP < \angle BAP = 60^\circ < 90^\circ$ и $\angle KCP < \angle PCB < 90^\circ$ (угол при основании равнобедренного треугольника), но в равнобокой трапеции сумма противоположных углов равна 180°, следовательно, $AKCP$ — параллелограмм.

Осталось посчитать углы. Пусть $\angle BAK = \alpha$, тогда

$$\angle CAP = \angle BAP - \angle BAK - \angle KAC = 30^\circ - \alpha.$$

При этом $\angle KCA = \angle CAP$, так как $AKCP$ — параллелограмм.

Заметим, что

$$\angle BCK = \angle BCA - \angle KCA = \angle BAC - \angle KCA = \\ = \alpha + 30^\circ - (30^\circ - \alpha) = 2\alpha.$$

Следовательно, из суммы углов треугольника BKC получаем

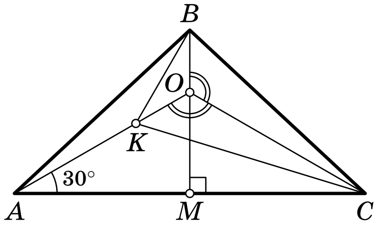
$$\angle KBC = \frac{180^\circ - \angle BCK}{2} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

При этом, из суммы углов треугольника ABC получаем

$$\angle ABC = 180^\circ - 2\angle BAC = 180^\circ - 2(30^\circ + \alpha) = 120^\circ - 2\alpha.$$

Наконец, рассмотрим треугольник ABK. В нем известны углы $\angle ABK = 30^\circ - \alpha$ и $\angle BAK = \alpha$. Следовательно, третий угол $\angle AKB = 150^\circ$.

Третье решение. Проведем в треугольнике ABC высоту BM и обозначим ее точку пересечения с прямой AK за O (см. рис.). Заметим, что $\angle AOM = 60^\circ$ и, из симметрии относительно BL, $\angle COM = 60^\circ$. Тогда имеем $\angle AOC = 120^\circ$ и



$\angle COB = 120^\circ$, то есть лучи OB и OK симметричны относительно прямой CO. Так как точки B и K являются пересечениями этих лучей с некоторой окружностью с центром в C (которая тоже симметрична относительно CO), то и сами эти точки симметричны; в частности, имеем $OB = OK$.

Получаем, что треугольник BKO равнобедренный с углом 120° при вершине O, откуда $\angle OKB = 30^\circ$ и $\angle AKB = 150^\circ$.

6. *Ответ.* При четных n.

Решение. Сначала приведем «оценку», то есть продемонстрируем, что при нечетных n так заполнить таблицу не удастся. Предположим противное и рассмотрим подходящую расстановку чисел. Покрасим таблицу шахматной раскраской так, чтобы клетка в 1-м столбце и 1-й строке оказалась черной; при этом черными окажутся те клетки, сумма номеров строки и столбца которых четна, а белыми — те, у которых эта сумма нечетна. Заметим, что, так как в последовательности от 1 до n^2 цвета клеток должны чередоваться, числа одной четности должны оказаться в черных клетках, а другой четности — в белых.

Рассмотрим клетки таблицы, в которых стоят числа, дающие остаток k при делении на n. Сумма их номеров строк и столбцов, с одной стороны, равна

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n),$$

так как каждая строка и каждый столбец участвуют по одному разу; в частности, эта сумма четна. С другой стороны, у каждой белой клетки сумма нечетна, что означает, что белых клеток среди рассмотренных должно быть четно (иначе общая сумма была бы нечетна).

Наконец, заметим, что при $k = 1$ среди чисел 1, $1 + n$, ..., $1 + nm$, ..., $1 + n(n-1)$ цвета соответствующих клеток чередуются (соседние числа в этой последовательности имеют разную четность); число белых среди них четно, поэтому число черных нечетно. Однако числа $1+nm$ и $2+nm$ имеют разные цвета, откуда следует, что при $k=2$ среди чисел $2,\ 2+n,\ \ldots,\ 2+nm,\ \ldots,\ 2+n(n-1)$, наоборот, число белых нечетно, что невозможно.

Теперь покажем, как заполнить таблицу для четных n. Приведем пример таблицы 8×8, заполненной требуемым образом (для наглядности кружочками выделены числа, дающие остаток 5 при делении на 8).

1	2	3	4	5	6	7	8
64	51	50	37	36	23	22	9
63	52	49	38	35	24	21	10
62	53	48	39	34	25	20	11
61	54	47	40	33	26	19	12
60	55	46	41	32	27	18	13
59	56	45	42	31	28	17	14
58	57	44	43	30	29	16	15

Примеры для других четных n строятся аналогично: верхняя строка заполняется числами от 1 до n слева направо, далее правый столбец заполняется следующими числами сверху вниз, следующий столбец (кроме уже занятой верхней клетки) заполняется снизу вверх, и т. д.

Докажем, что построенный таким образом пример подходит. Строчки будем нумеровать от 1 до n сверху вниз, а столбцы — справа налево. Ясно, что первое условие (соседние числа находятся в соседних клетках) выполнено.

Докажем, что в k-м столбце все числа дают разные остатки от деления на n. Первое число в нем равно k, а до следующего по величине числа t, стоящего в этом столбце (во 2-й или n-й строке), «цепочка» чисел прошла всю правую часть таблицы, то есть ровно $n(n-k)$ клеток. Значит, $t=k+1+n(n-k)$ и дает тот же остаток от деления на n, что и $k+1$. Получаем, что числа в столбце эквивалентны $k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+n-1$ при делении на n, то есть дают различные остатки.

Теперь рассмотрим строки. Ясно, что в 1-й строке все остатки от деления на n различны. Рассмотрим k-ю строку, $k > 1$. Воспользуемся тем, что четные и нечетные числа в строке чередуются (как уже было показано в доказательстве оценки, четные и нечетные числа располагаются на клетках разных цветов при шахматной раскраске).

При этом четные числа дают четные остатки от деления на n, а нечетные — нечетные остатки (это верно только когда n четно). Также заметим, что последовательные четные числа в строке увеличиваются на $2(n-1)$, если идти справа налево, то есть их остатки уменьшаются на 2 (возможно, с переходом через 0); так как всего их $n/2$, то они как раз дают все различные четные остатки от деления на n. По тем же причинам нечетные числа в рассмотренной строке дают все нечетные остатки. Следовательно, все остатки в строке различны.

Другое доказательство оценки.[1] Докажем, что при нечетных n таблицу заполнить не удастся, другим способом. Предположим, что у нас имеется расстановка чисел, подходящая под условие.

Лемма. Если число $ln+1$ находится в одной строке или в одном столбце с числом $km+2$, то число $kn+1$ находится в одной строке или в одном столбце с числом $lm+2$.

Доказательство леммы. Рассмотрим пару чисел $kn+1$ и $kn+2$. Без ограничения общности будем считать, что они соответственно в m-м и $(m+1)$-м столбцах (всегда можно развернуть таблицу так, чтобы это было верно). Заметим, что в $(m+1)$-м столбце есть число вида $ln+1$. Тогда число $ln+2$ не может располагаться в $(m+1)$-м столбце, так как там уже есть $kn+2$.

Предположим, что число $ln+2$ находится в $(m+2)$-м столбце. Рассмотрим тогда число k_3n+1, которое есть в этом столбце. Соответствующее ему k_3n+2 уже не может оказаться ни в $(m+2)$-м, ни в $(m+1)$-м столбцах; значит, оно находится в $(m+3)$-м столбце. Можно продолжать так и далее: число k_in+2 находится в $(m+i)$-м столбце, в нем же находим некоторое число $k_{i+1}n+1$, тогда число $k_{i+1}n+2$ должно находится в $(m+i+1)$-м столбце. Заметим, что этот

[1]Это доказательство основано на работе Никиты Солоницына.

процесс не может завершиться — но через конечное число шагов столбцы закончатся. Противоречие.

Следовательно, число $ln+2$ должно располагаться в m-м столбце, что завершает доказательство леммы.

Заметим, что произвольному числу вида $kn+1$ мы можем однозначно сопоставить другое число $ln+1$, которое находится в одном столбце или в одной строке с $kn+2$. По лемме, это сопоставление будет взаимным, то есть все числа вида $kn+1$ разобьются на пары.

Но всего таких чисел n. Следовательно, n четно.

9 класс

1. *Ответ.* Могут.

Решение. Если первый мудрец назвал число 22, то второй может однозначно определить все числа, так как сумму 100 можно получить лишь одним способом — взяв наименьшие возможные числа: 1, 2, 3, 22, 23, 24 и 25.

2. См. решение задачи 2 для 8 класса.

3. *Первое решение.* Пусть углы треугольника ABC равны $\angle CAB=\alpha$, $\angle CBA=\beta$. Тогда

$$\angle B'AO=\angle CAO=90^\circ-\beta, \quad \angle A'BO=\angle CBO=90^\circ-\alpha.$$

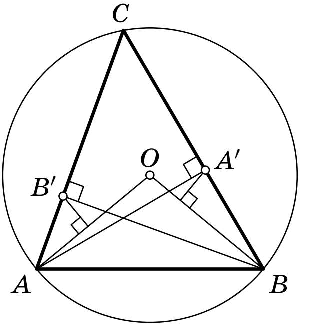
Значит, расстояние от точки A' до прямой BO равно

$$A'B\sin\angle A'BO=A'B\sin(90^\circ-\alpha)=A'B\cos\alpha=AB\cos\beta\cos\alpha,$$

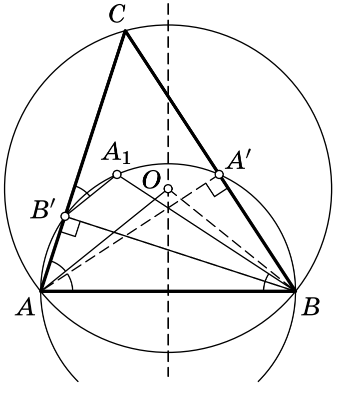
а расстояние от точки B' до прямой AO равно

$$AB'\sin\angle B'AO=AB'\sin(90^\circ-\beta)=AB'\cos\beta=AB\cos\alpha\cos\beta.$$

Таким образом, эти расстояния равны.



Второе решение. Рассмотрим симметрию относительно серединного перпендикуляра к AB. Пусть образом точки A' является точка A_1. Образом прямой OB является прямая OA, следовательно, расстояние от точки A' до прямой OB равно расстоянию от точки A_1 до прямой OA. Таким образом, задача сводится к доказательству равноудаленности точек A_1 и B' от прямой OA, иными словами, необходимо доказать $B'A_1 \parallel OA$.



Основания A' и B' высот лежат на окружности, построенной на AB как на диаметре. Так как эта окружность при рассмотренной симметрии переходит в себя, точка A_1 также лежит на этой окружности и четырехугольник $AB'A_1B$ — вписанный, значит, $\angle CB'A_1 = \angle A_1BA$. В свою очередь, из соображений симметрии $\angle A_1BA = \angle A'AB = 90^\circ - \angle B$. И $\angle CAO = 90^\circ - \angle B$, следовательно, $B'A_1 \parallel OA$ по признаку.

Третье решение. Пусть CC' — третья высота. Тогда A, B, C — центры вневписанных окружностей треугольника $A'B'C'$. Поскольку $AO \perp B'C'$, $BO \perp A'C'$, расстояния от A' до BO и от B' до AO равны отрезкам касательных к соответствующим окружностям.

4. *Ответ.* 1/2.

Решение. Обозначим числа в вершинах как x_1, x_2, ..., x_{100}. Тогда сумма чисел на красных отрезках (обозначим ее за R) есть сумма всех попарных произведений чисел, стоящих на позициях с разной четностью:

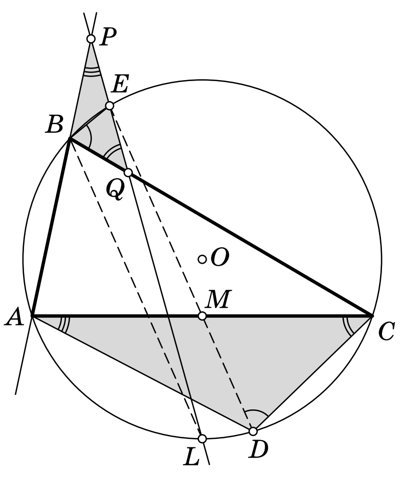
$$R = x_1x_2 + x_1x_4 + \ldots + x_1x_{100} + x_3x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_3x_{100} + \ldots$$
$$\ldots + x_{99}x_{100} = x_1(x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}) +$$
$$+ x_3(x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}) + \ldots + x_{99}(x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}) =$$
$$= (x_1 + x_3 + \ldots + x_{99})(x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}) = PQ,$$

где $P = x_1 + x_3 + \ldots + x_{99}$, а $Q = x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}$. Сумма на синих отрезках (обозначим ее за B) есть сумма всех попарных произведений чисел, стоящих на позициях с одинаковой четностью: $B = x_1x_3 + \ldots + x_{97}x_{99} + x_2x_4 + \ldots + x_{98}x_{100}$. Учитывая, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{100}^2 = 1$, запишем, что

$$2B + 1 = x_1^2 + x_3^2 + \ldots + x_{99}^2 + 2x_1x_3 + \ldots + 2x_{97}x_{99} +$$
$$+ x_2^2 + x_4^2 + \ldots + x_{100}^2 + 2x_2x_4 + \ldots + 2x_{98}x_{100} =$$
$$= (x_1 + x_3 + \ldots + x_{99})^2 + (x_2 + x_4 + \ldots + x_{100})^2 = P^2 + Q^2.$$

Искомая разность $R - B = PQ - \frac{P^2 + Q^2 - 1}{2} = \frac{1 - (P - Q)^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. Указанная оценка достигается, например, при $x_1 = x_2 = \ldots$ $\ldots = x_{100} = \frac{1}{10}$ или при $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_{100} = 0$.

5. *Первое решение.* Продлим EM до пересечения с окружностью в точке D. Докажем, что $\triangle BPQ \sim \triangle DAC$, причем отрезку BE соответствует медиана DM.



Без ограничения общности, будем считать, что точка P лежит на продолжении AB. Учитывая, что между параллельными хордами BL и ED заключены равные дуги, а биссектриса BL делит дугу AC на две равных, запишем:

$$\angle P = \frac{\smile AL - \smile BE}{2} = \frac{\smile CL - \smile DL}{2} = \frac{\smile CD}{2} = \angle A.$$

И аналогично

$$\angle Q = \frac{\smile CL + \smile BE}{2} = \frac{\smile AL + \smile LD}{2} = \frac{\smile AD}{2} = \angle C.$$

Следовательно, $\triangle BPQ \sim \triangle DAC$. Осталось заметить, что $\angle QBE$ и $\angle CDM$ равны, так как опираются на одну дугу. Значит, медиане DM соответствует отрезок BE, и он сам является медианой $\triangle BPQ$, $PE = EQ$.

Второе решение.[1] Пусть прямая EM пересекает AB и BC в точках P' и Q' соответственно. Также обозначим $\angle BAE = \angle BLE = \angle BCE = \angle QEQ' = \angle PEP' = \alpha$ и $\angle ABL = \angle CBL = \angle AEM = \angle CEM = \beta$ (указанные углы равны, как опирающиеся на одну дугу и углы при параллельных прямых). Последовательно применяя теорему синусов для треугольников $\triangle PP'E$, $\triangle AP'E$ и $\triangle AP'M$, получим:

$$PE = \frac{P'E \cdot \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{AP' \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)} = \frac{AM \cdot \sin\angle EMA \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\beta \cdot \sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)} = \frac{AC \cdot \sin\angle EMA \cdot \sin\alpha}{2\cdot\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}.$$

Аналогично, применяя теорему синусов для треугольников $\triangle QQ'E$, $\triangle CQ'E$ и $\triangle CQ'M$, получим:

$$QE = \frac{CM \cdot \sin\angle EMC \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\beta \cdot \sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)} = \frac{AC \cdot \sin\angle EMA \cdot \sin\alpha}{2\cdot\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}.$$

То есть $PE = QE$, что и требовалось доказать.

6. *Оценка.* Пронумеруем в каждой куче камни по порядку. Без потери общности можно считать, что Петя, выбрав кучку, всегда берет из нее камень с наибольшим номером. Ясно, что каждый ход приносит столько очков, чему равна разность между большим и меньшим из чисел на камнях, взятых на этом ходу.

[1] Это решение основано на работе Якова Богданова.

Первый способ. Пусть Петя набрал $P = a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \ldots + a_n - b_n$ очков, где a_i и b_i — соответственно большее и меньшее числа на камнях, выбранных Петей на ходу с номером i, а $n = 20000$ — общее число ходов. Заметим, что среди чисел $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ каждое число от 1 до 400 встречается ровно 100 раз, так как в каждой кучке из ста кучек на камнях написаны все различные числа от 1 до 400. Пусть $S = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n = (1 + 2 + \ldots + 400) \cdot 100$, а $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Тогда $P = S - 2B$, и задача сводится к оценке наименьшего возможного значения числа B.

Заметим, что каждое число от 1 до 400 хотя бы раз встретится среди чисел $a_1, \ldots, a_n$, так как каждое число хотя бы раз за игру будет наибольшим среди написанных на камнях. Аналогично, каждое число от 1 до 400 хотя бы раз встретится и среди чисел $b_1, \ldots, b_n$, так как каждое число хотя бы раз за игру будет наименьшим среди написанных на камнях. С учетом сказанного, в наборе $b_1, \ldots, b_n$ может быть не менее чем по одному и не более чем по 99 каждого из чисел от 1 до 400, следовательно,

$$B \geqslant (1 + 2 + \ldots + 200) \cdot 99 + 201 + 202 + \ldots + 400.$$

В свою очередь,

$$\begin{gathered} P = S - 2B \leqslant (1 + 2 + \ldots + 400) \cdot 100 - 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 200) \cdot 99 - \\ - 2 \cdot (201 + 202 + \ldots + 400) = \\ = (201 + 202 + \ldots + 400) \cdot 98 - (1 + 2 + \ldots + 200) \cdot 98 = \\ = 200 \cdot 200 \cdot 98 = 3\,920\,000. \end{gathered}$$

Второй способ. Для каждого $n \in \{1, \ldots, 399\}$ подсчитаем d_n — число таких ходов, что ровно на одном из двух камней, которые берет Петя, написано число, большее n. Тогда сумма по всем таким d_n в точности равна сумме очков в конце игры. В самом деле, ход, в который Петя взял камни с числами a и b ($a \geqslant b$), увеличит на единицу числа $d_b, d_{b+1}, \ldots, d_{a-1}$ — всего как раз $a - b$ чисел.

При $n \leqslant 200$ справедливо неравенство $d_n \leqslant 98n$, так как всего камней с номерами, меньшими либо равными n, $100n$ штук, но последними n ходами мы берем по два таких камня, потому что других уже не осталось. Для $n > 200$ верна оценка $d_n \leqslant 98 \cdot (400 - n)$, так как всего камней с номерами, большими n, $100\cdot(400-n)$ штук, но первыми n ходами мы берем по два таких камня, потому что другие еще не доступны. Суммируя эти оценки, получаем

$$98(1+2+\ldots+199+200+199+\ldots+2+1)=98\cdot200\cdot200.$$

Пример. Разобьем ходы Пети на 100 серий по 200 ходов, в первой серии будем брать камни из первой и второй кучки, во второй — из второй и третьей, и так далее. Последней серией ходов заберем оставшиеся камни из сотой и первой кучки. Тогда ходы из первой и последней серий очков не приносят, а любой другой ход приносит 200 очков. Всего таких ходов $98\cdot200$, значит, Петя наберет $98\cdot200\cdot200=3\,920\,000$ очков.

10 класс

1. *Ответ.* Например, 900 900 000.

Примечание. На самом деле существует 28 573 числа, удовлетворяющих условиям задачи, наименьшее из которых равно 100 006 020, а наибольшее 999 993 240.

2. См. решение задачи 3 для 9 класса.

3. См. решение задачи 4 для 8 класса.

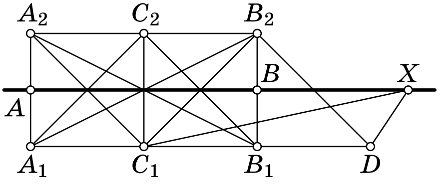
4. *Ответ.* Да.

Первое решение. Предположим, что такого треугольника не существует, и докажем, что существует прямая, все точки которой имеют один цвет.

Пусть на некоторой прямой l есть две точки A, B одного цвета (обозначим этот цвет 1), расстояние между которыми равно d. Пусть l_1, l_2 — две прямые, параллельные l и удаленные от нее на расстояние $2/d$. Если на какой-нибудь из этих прямых есть точка цвета 1, то она образует с точками A, B треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет. Если на каждой из прямых l_1, l_2 присутствуют два цвета и на одной из них найдутся две точки одного цвета на расстоянии $d/2$, то они вместе с точкой такого же цвета на другой прямой образуют треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет. Если же на каждой из прямых l_1, l_2 присутствуют два цвета и любые две точки на расстоянии $d/2$ разных цветов, то любые две точки на расстоянии d будут одного цвета, а значит, на прямой AB все точки имеют цвет 1.

Пусть теперь все точки некоторой прямой a покрашены в цвет 1. Тогда остальные точки плоскости покрашены в два оставшихся цвета. Возьмем прямую, не параллельную a, и две точки C, D на ней одного цвета (обозначим этот цвет 2). Если на какой-нибудь из двух прямых, параллельных CD и удаленных от нее на расстояние $2/CD$, найдется точка цвета 2, то C, D и эта точка образует треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет. Если же таких точек нет, то найдется треугольник площади 1 с вершинами цвета 3.

Второе решение.[1] Пусть не все точки плоскости раскрашены в один цвет. Тогда на некоторой прямой присутствуют точки разных цветов: точки A и B цвета 1 и точка X цвета 2. Пусть $A_1B_1B_2A_2$ — прямоугольник, в котором A, B — середины сторон A_1A_2, B_1B_2 соответственно, длины этих сторон равны $4/AB$, C_1, C_2 — середины A_1B_1 и A_2B_2 соответственно, D — точка, симметричная C_1 относительно B_1.



Если среди точек $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ есть точка цвета 1, она образует искомый треугольник с точками A, B.

Если среди точек $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ нет точек цвета 1, то возможны следующие случаи.

1) Точки A_1 и B_1 (рассуждение для точек A_2 и B_2 аналогично) разного цвета. Тогда цвет C_1 совпадает с цветом одной из них, например, A_1. Если какая-то из точек A_2, C_2 того же цвета, эти три точки образуют искомый треугольник. В противном случае искомым будет треугольник $A_2C_2B_1$.

2) Если одна из пар A_1, B_1 или A_2, B_2 цвета 2, она образует искомый треугольник с точкой X.

[1] Это решение основано на работе Александра Власова.

3) Если все точки A_1, B_1, A_2, B_2 цвета 3 и одна из точек C_1, D тоже цвета 3, то треугольник $B_1C_1B_2$ или B_1DB_2 искомый. В противном случае треугольник C_1DX искомый.

5. *Ответ.* Да.

Решение. Покажем, как может действовать Вася, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети.

Предположим, что Петя не взял карточку, на которой написано $x_6x_7x_8x_9x_{10}$. Тогда Вася может взять эту карточку, а дальше брать любые карточки. При

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 1$$

сумма произведений у Пети будет равна 0, а у Васи будет равна 1.

Если Петя сразу же взял карточку, на которой написано $x_6x_7x_8x_9x_{10}$, то Вася может взять карточку, на которой написано $x_5x_7x_8x_9x_{10}$, а следующим ходом одну из карточек $x_4x_7x_8x_9x_{10}$ или $x_5x_6x_8x_9x_{10}$ (хотя бы одна из них останется, поскольку за ход Петя может взять только одну из этих двух карточек). Далее Вася может брать карточки как угодно.

В случае, если Вася взял карточку $x_4x_7x_8x_9x_{10}$, он может присвоить переменным следующие значения:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = x_5 = x_6 = 1, \quad x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 100.$$

Тогда только на 21 карточке окажется ненулевое произведение, причем для трех карточек $x_4x_7x_8x_9x_{10}$, $x_5x_7x_8x_9x_{10}$ и $x_6x_7x_8x_9x_{10}$ это произведение будет равно 100 000 000, а для остальных не будет превосходить 1 000 000. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 200 000 000, а у Пети не больше 118 000 000.

В случае, если Вася взял карточку $x_5x_6x_8x_9x_{10}$, он может присвоить переменным следующие значения:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = x_6 = x_7 = 1, \quad x_8 = x_9 = x_{10} = 10.$$

Тогда только на 6 карточках окажется ненулевое произведение, причем для трех карточек $x_5x_6x_8x_9x_{10}$, $x_5x_7x_8x_9x_{10}$ и $x_6x_7x_8x_9x_{10}$ это произведение будет равно 1000, а для остальных трех будет равно 100. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 2000, а у Пети не больше 1400.

6. *Решение.* Каждой ломаной, звенья которой идут только вверх и вправо, соответствует *слово* — последовательность букв U (вверх) и R (вправо). Пусть w — любое слово и пусть $W(w)$ — червяк, соответствующий ломаной, закодированной с помощью w. Также обозначим за $D(w)$ количество способов разбить червяка $W(w)$ на доминошки.

Лемма. Выполняются следующие реккурентные соотношения:

$$D(wUU) = D(wU) + D(w), \qquad D(wRR) = D(wR) + D(w),$$
$$D(wUR) = 2D(wU) - D(w), \quad D(wRU) = 2D(wR) - D(w).$$

Доказательство. Для доказательства первого соотношения рассмотрим доминошку, которая покрывает самую правую из самых верхних клеток $W(wUU)$. Если она горизонтальна, то оставшийся червяк совпадает с $W(wU)$. Если же она вертикальна, то клетка слева от нее также может быть покрыта только вертикальной доминошкой, и тогда червяк, который остался не покрыт, совпадает с $W(w)$.

Второе соотношение получается аналогично.

Для доказательства третьего соотношения снова рассмотрим доминошку, которая покрывает самую правую из самых верхних клеток в червяке $W(wUR)$. Если она вертикальна, то оставшийся червяк совпадает с $W(wU)$. Если же она горизонтальна, то под ней и слева от нее по одной доминошке определяются однозначно (горизонтально и вертикально соответственно).

Обозначим фигуру, остающуюся после удаления этих трех доминошек, через Φ (эта фигура может и не быть червяком). Количество способов разбить фигуру Φ на доминошки равно разности $D(wUR) - D(wU)$. Рассмотрим теперь червяка $W(wU)$ и его доминошку, которая покрывает самую правую из самых верхних клеток. Если она горизонтальна, то оставшийся червяк совпадает с $W(w)$. Если же она вертикальна, то слева от нее расположена еще одна вертикальная. Заметим, что если удалить эти две вертикальные доминошки, то остается в точности фигура Φ. Таким образом, разность $D(wU) - D(w)$ тоже равна числу способов разбить фигуру Φ на доминошки.

Равенство $D(wUR) - D(wU) = D(wU) - D(w)$ равносильно третьему соотношению.

Четвертое соотношение доказывается аналогично.

Доказательство леммы закончено. □

Теперь пусть n — натуральное число, и пусть $W(w)$ — червяк, которого можно разбить на доминошки n различными способами. Пусть $w = w_1 w_2 \ldots w_\ell$ — разбиение w на буквы. Рассмотрим последовательность

$$D(\text{“”}),\ D(w_1),\ D(w_1 w_2),\ \ldots,\ D(w_1 w_2 \ldots w_{\ell-1}) = m,$$
$$D(w_1 w_2 \ldots w_\ell) = D(w) = n.$$

(Через “” обозначено пустое слово: соответствующий ему червяк является квадратом 2×2, для которого $D(\text{“”}) = 2$.)

По лемме, если a и b — два последовательных члена этой последовательности, то следующий член равен или $a + b$, или $2b - a$. Давайте разберем некоторые свойства этой последовательности.

Так как $D(\text{“”}) = 2$ и $D(U) = D(R) = 3$, два первых члена любой последовательности равны двум и трем соответственно. По индукции легко видеть, что любые два последовательных члена этой последовательности взаимно просты. Кроме того, для двух последовательных членов a, b этой последовательности $a < b < 2a$.

С другой стороны, по данным взаимно простым m и n таким, что $m < n < 2m$, мы можем построить ровно одну такую последовательность, что m и n — ее последние члены.

В самом деле, если $3m < 2n$, то предыдущий член должен быть равен $n - m$, поскольку $2(2m - n) < m$, а если $3m > 2n$, то предыдущий член последовательности должен быть равен $2m - n$, поскольку $2(n - m) < m$. Продолжая этот процесс, в конечном счете мы придем к 3 и 2, завершая последовательность.

Для данной последовательности есть ровно два червяка, которые удовлетворяют ей. Первая буквы w_1 слова w может быть выбрана любой, но все следующие буквы восстанавливаются однозначно.

Таким образом, каждой паре взаимно простых чисел m и n, для которых выполнено $m < n < 2m$, соответствует ровно два червяка, которых можно разбить на доминошки ровно n способами. При этом количество чисел, меньших n и взаимно простых с n, также ровно вдвое больше количества пар m и n, поскольку каждое такое число равно либо

m, либо $n-m$. Значит, червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно n различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Комментарий. Факт, который требовалось доказать в задаче, является побочным результатом научной статьи И. Чанакчи и Р. Шиффлера (https://arxiv.org/abs/1608.06568), в которой исследуется связь между кластерными алгебрами и цепными дробями.

11 класс, первый день

1. *Ответ.* $\frac{337}{1010}$.

Решение. В искомом произведении n-й множитель равен

$$1-\frac{2}{f(n)}=\frac{f(n)-2}{f(n)}=\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Подставляя эту дробь при $n=1, 2, \ldots, 2019$ в произведение и производя сокращения, получим

$$\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdot\frac{3\cdot6}{4\cdot5}\cdot\frac{4\cdot7}{5\cdot6}\cdot\ldots\cdot\frac{2018\cdot2021}{2019\cdot2020}\cdot\frac{2019\cdot2022}{2020\cdot2021}=\frac{1\cdot2022}{3\cdot2020}=\frac{337}{1010}.$$

2. *Первое решение.* Пусть a и b — числа, стоящие слева и справа от курсора соответственно, и число b состоит из n цифр. Тогда по условию $10^n a+b$ делится на 7. Если между числами a и b вставить одну цифру x, то получим число $10^{n+1}a+10^n x+b$. Можно подобрать эту цифру так, чтобы это число также делилось на 7, так как при $x=0, 1, 2, \ldots, 6$ такие числа имеют различные остатки при делении на 7.

По индукции докажем, что если вставить m цифр x, $m\geqslant 1$, то получившееся число также будет делиться на 7. База индукции ($m=1$) проверена выше. Для шага индукции достаточно доказать, что разность

$$\overline{a\underbrace{xx\ldots x}_{m+1\text{ раз}}b}-\overline{a\underbrace{xx\ldots x}_{m\text{ раз}}b}$$

делится на 7, где $\overline{ab}$ означает число, составленное из последовательно приписанных друг к другу записей чисел (цифр) a и b. Эта разность при некотором $k>m$ равна

$$10^{k+1}a-10^k(x-a)=10^{k-m}(10^{m+1}a+10^m x-10^m a)$$

и имеет тот же остаток при делении на 7, что и число $10^{k-m}(10^{m+1}a+10^m x+b)$, а последнее делится на 7 по предположению индукции.

Второй способ. Пусть a и b — те же, что и в первом способе. После вставки m цифр x полученное число имеет вид

$$a\cdot 10^{m+n}+\underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{m\text{ раз}}\cdot 10^n+b.$$

Подберем цифру x так, чтобы при любом $m\in\mathbb{N}$ это число делилось на 7. Вычтем из него по условию делящееся на 7 число $10^n a+b$. Получим число

$$10^n(10^m-1)a+\underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{m\text{ раз}}\cdot 10^n=$$

$$=10^n(10^m-1)a+10^n x\cdot\frac{10^m-1}{9}=10^n(9a+x)\cdot\frac{10^m-1}{9}.$$

Цифру x можно подобрать в зависимости от остатка от деления числа a на 7 так, чтобы число $2a+x$, а значит и $9a+x$, делилось на 7. Это соответствие можно указать явно с помощью следующей таблицы:

$a \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
цифра x	0 или 7	5	3	1	6	4	2

3. См. решение задачи 3 для 9 класса.

4. *Первое решение.* Если одно из этих чисел (например, n) равно 1, то неравенство принимает вид $|m-1|>\frac{1}{m}$ и выполнено при любом $m\geqslant 2$. Далее без ограничения общности будем считать, что $m>n\geqslant 2$. Тогда $m\geqslant n+1$, поэтому

$$\sqrt[n]{m}-\sqrt[m]{n}>\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\quad\text{и}\quad\frac{1}{n(n+1)}\geqslant\frac{1}{mn}.$$

Следовательно, достаточно доказать неравенство $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}>\frac{1}{n(n+1)}$ для всех $n\geqslant 2$. Используя тождество

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-1}+b^{n-1}),$$

в котором положим $a=\sqrt[n]{n+1}$ и $b=\sqrt[n]{n}$, а также учитывая неравенство $a>b$, получаем

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}=\frac{1}{a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}}>$$
$$>\frac{1}{na^{n-1}}=\frac{1}{n(n+1)^{\frac{n-1}{n}}}>\frac{1}{n(n+1)}.$$

Второе решение. Докажем сначала вспомогательное утверждение: если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна и возрастает на отрезке $[a;b]$, то $f(b)-f(a)>$ $>f'(a)(b-a)$. Действительно, в этом случае касательная в точке a к графику функции $y=f(x)$ лежит ниже этого графика, и поэтому пересекает отрезок между точками $(b, f(a))$ и $(b, f(b))$ в некоторой точке (b, y_0), $f(a)<y_0<f(b)$. Следовательно, $f(b)-f(a)>y_0-f(a)=f'(a)(b-a)$.

Пусть, для определенности, $m>n$, тогда $\sqrt[n]{m}>\sqrt[m]{n}$. Применим доказанное выше утверждение к функции $f(x)=e^x$ (ее производная равна $f'(x)=e^x$) на отрезке $\left[\frac{\ln n}{m};\frac{\ln m}{n}\right]$:

$$m^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{m}}=e^{\frac{\ln m}{n}}-e^{\frac{\ln n}{m}}>e^{\frac{\ln n}{m}}\left(\frac{\ln m}{n}-\frac{\ln n}{m}\right)\geqslant\frac{m\ln m-n\ln n}{mn}.$$

Применяя еще раз это же утверждение к функции $g(x)=$ $=x\ln x$ (тогда $g'(x)=\ln x+1$) на отрезке $[n;m]$, получаем

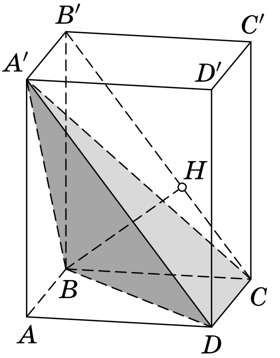
$$m\ln m-n\ln n>(\ln n+1)(m-n)\geqslant m-n\geqslant 1.$$

Отсюда следует требуемое неравенство.

5. *Ответ.* Не может.

Решение. Предположим, что это возможно, и исходный тетраэдр $A'BCD$ проецируется в квадрат $ABCD$ со стороной 1. Достроим исходный тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, имеющего размеры $1\times1\times x$.

Заметим, что исходный тетраэдр симметричен относительно плоскости $AA'C'C$. Поэтому при проекции на плоскость грани $A'BD$ трапеция получиться не может (если две противоположные стороны параллельны, то две другие тоже параллельны). В силу симметрии достаточно рассмотреть проекцию на плоскость грани $A'CD$. Проведем высоту BH в треугольнике $B'BC$ (см. рис.). Тогда точка H — проекция точки B на плоскость $A'B'CD$, так как прямая BH перпендикулярна двум пересекающимся прямым CB'



и CD в этой плоскости, а значит, и самой плоскости. Поэтому при проекции исходного тетраэдра на плоскость грани $A'CD$ получается трапеция $A'HCD$. Из прямоугольного треугольника $BB'C$ в силу подобия получаем $HC : BC = BC : B'C$. Отсюда находим

$$HC = \frac{BC^2}{B'C} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Площадь трапеции $A'HCD$ равна

$$S(x) = DC \cdot \frac{A'D + HC}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \geqslant 1$$

(здесь мы воспользовались неравенством о средних для двух положительных чисел: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$). При этом равенство достигается, только если слагаемые равны между собой, т. е. при $x = 0$. Но $x > 0$, поэтому $S(x) > 1$.

6. См. решение задачи 6 для 10 класса.

11 класс, второй день

1. *Ответ.* 26.

Решение. Число 11^k является n-значным, если $10^{n-1} < 11^k < 10^n$, т. е. $n - 1 < k \lg 11 < n$. Значит, $n = [k \lg 11] + 1$. Если $k \leqslant 24$, то $k \lg 11 < k + 1$ (и значит, $n = k + 1$), так как $k(\lg 11 - 1) \leqslant 24 \cdot 0{,}0415 = 0{,}996 < 1$. Если $k \geqslant 25$, то $k \lg 11 > k + 1$ (и значит, $n \geqslant k + 2$), так как $k(\lg 11 - 1) \geqslant 0{,}041 \cdot 25 = 1{,}025 > 1$.

Комментарий. Можно показать, что натуральные степени числа 11 не бывают n-значными числами для $n = \left[k\frac{\lg 11}{\lg 11 - 1}\right] + 1$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. при $n = 26, 51, 76, 101, 126, \ldots$

Последовательность вида $[\alpha n]$, где $\alpha > 0$ иррациональное, называется *последовательностью Битти* в честь американского математика С. Битти, предложившего в 1926 г. такую задачу: доказать, что если $\alpha, \beta > 1$ иррациональны и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то каждое натуральное число принадлежит ровно одной из последовательностей $[\alpha n]$, $[\beta n]$, $n \in \mathbb{N}$ (назовем их *сопряженными*). Последовательности значений n, для которых степени числа 11 есть среди $(n+1)$-значных чисел и для которых их нет, суть сопряженные последовательности Битти $[k \lg 11]$ и $\left[k\frac{\lg 11}{\lg 11 - 1}\right]$, $k \in \mathbb{N}$, соответственно ($\alpha = \lg 11 = 1{,}0413\ldots$, $\beta = \frac{\lg 11}{\lg 11 - 1} = 25{,}1588\ldots$).

2. *Решение.* По смыслу задачи достаточно рассмотреть случай $a > 0$. Если $n < a \leqslant n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, число точек в первой координатной четверти ($x > 0$, $y > 0$) под графиком функции $y = a/x$ равно

$$S(a) = n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots$$

(сумма конечная, так как с того момента, как знаменатель окажется больше числителя, целая часть станет равна нулю). Функция $S(a)$ является неубывающей, постоянной на каждом полуинтервале $(n; n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$S(a) = 23 + 11 + 7 + 5 + 4 + 3 + 3 + 4 \cdot 2 + 13 \cdot 1 = 77 \quad \text{при } 23 < a \leqslant 24,$$

$$S(a) = 24 + 12 + 8 + 6 + 4 + 4 + 3 + 3 + 4 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 84 \quad \text{при } 24 < a \leqslant 25.$$

Таким образом, функция $S(a)$ значения 82 не принимает.

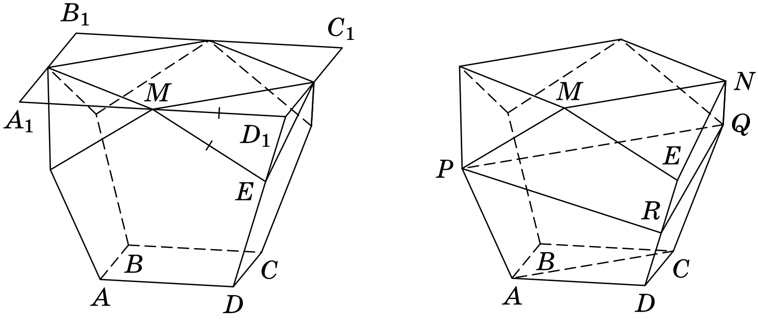
Комментарий. Задача об асимптотическом поведении при больших a числа точек первой координатной четверти ($x > 0$, $y > 0$) с целочисленными координатами под графиком функции $y = a/x$ называется *проблемой делителей Дирихле*. Если обозначить количество натуральных делителей числа n через $\tau(n)$ (например, $\tau(1) = 1$, $\tau(3) = 2$, $\tau(10) = 4$), то это число точек равно

$$D(a) = \tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \ldots + \tau([a]).$$

(здесь в сумму включено также число точек на самой гиперболе, если $a \in \mathbb{Z}$). С ростом a сумма $D(a)$ растет примерно как $\int_1^a \frac{a}{x}\,dx = a \ln a$ (скажем, $D(23) = 77$, а $23 \ln 23 = 72{,}116\ldots$). Первый из известных существенных результатов в этой области получил в середине XIX века Дирихле. Отметим, что задача уточнения остаточного члена в асимптотической формуле для $D(a)$ актуальна и в наши дни.

3. *Ответ.* В $\sqrt{2}$ раз.

Первое решение. Пусть $ABCD$ — нижний квадрат. Примем его сторону за 1 и найдем сторону верхнего квадрата. Проведем через вершины верхнего квадрата прямые, параллельные соответствующим сторонам нижнего, получим квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. слева).



Прямая DD_1 лежит в пересечении плоскостей пятиугольников со сторонами AD и CD, поэтому их общая вершина E, отличная от D, лежит на отрезке DD_1. Пусть M — вершина пятиугольника со стороной AD, противолежащая этой стороне. Тогда в силу симметрии M — середина A_1D_1. Следовательно,

$$AD = DE = EM = MD_1 = 1,$$

так как треугольник MD_1E равнобедренный (поскольку $\angle MED_1 = \angle MD_1E = 72^\circ$). Таким образом, $A_1D_1 = 2$, а искомая сторона верхнего квадрата равна $\sqrt{2}$.

Второе решение. Обозначим через $ADEMP$ и $CDENQ$ соседние пятиугольные грани с общим ребром DE (см. рис. справа). Пусть R — середина ребра DE. Точки A и M симметричны относительно прямой PR, перпендикулярной ED, а точки C и N симметричны относительно прямой QR, также перпендикулярной ED. Следовательно, треугольники ADC и MEN симметричны относительно плоскости PQR и поэтому равны. Отсюда находим

$$MN : AD = AC : AD = \sqrt{2}.$$

Комментарий. Задача была придумана в ходе игры с детьми в геометрический конструктор, одним из создателей которого является профессор механико-математического факультета МГУ И. Х. Сабитов.

4. *Первое решение.* Левая часть $f(x)$ в этом уравнении представляет собой многочлен степени $n-1$, так как коэффициент при x^{n-1} равен $a_1+\ldots+a_n\neq 0$. Если n четно, то получаем многочлен нечетной степени, он всегда имеет действительный корень, так как функция $f(x)$ непрерывна и $f(x_0)>0$, $f(-x_0)<0$ при достаточно большом $x_0>0$.

Пусть n нечетно. Можно считать, что все числа $a_1, \ldots, a_n$ различны (в противном случае число $a=a_i=a_j$, где $i\neq j$, является корнем), не равны нулю (если $a_i=0$ при некотором i, то и $f(a_i)=0$) и упорядочены по возрастанию: $a_1<a_2<\ldots$ $\ldots<a_n$. Заметим, что

$$f(a_k)=a_k(a_k-a_2)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)$$

имеет тот же знак, что и $a_k\cdot(-1)^{n-k}=(-1)^{k-1}a_k$. Но при $n\geqslant 3$ среди чисел $a_1<a_2<\ldots<a_n$ есть хотя бы одна пара соседних, имеющих одинаковый знак. Тогда значения в этих точках разного знака, поэтому между ними есть корень многочлена $f(x)$.

Второе решение. Положим

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

и

$$f(x)=a_1(x-a_2)\ldots(x-a_n)+a_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+\\+\ldots+a_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}).$$

Если среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть хотя бы одно нулевое, то $f(0)=0$ и утверждение задачи доказано. Пусть теперь среди этих чисел нет нулевых. Тогда $f(0)\neq 0$, $f(x)=xP'(x)-$

$-nP(x)$ и $\left(\frac{P(x)}{x^n}\right)' = \frac{xP'(x) - nP(x)}{x^{n+1}} = \frac{f(x)}{x^{n+1}}$. Значит, $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\left(\frac{P(x)}{x^n}\right)' = 0$.

Имеем

$$\frac{P(x)}{x^n} = \left(1 - \frac{a_1}{x}\right)\left(1 - \frac{a_2}{x}\right)\ldots\left(1 - \frac{a_n}{x}\right) = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n \, Q\left(\frac{1}{x}\right),$$

где $Q(t) = \left(t - \frac{1}{a_1}\right)\left(t - \frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(t - \frac{1}{a_n}\right)$. Следовательно,

$$\left(\frac{P(x)}{x^n}\right)' = \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_n}{x^2} \, Q'\left(\frac{1}{x}\right),$$

и $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $Q'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Если $a_1 = a_2$, то $f(a_1) = 0$ и утверждение задачи доказано. Иначе $Q\left(\frac{1}{a_1}\right) = Q\left(\frac{1}{a_2}\right) = 0$ и, следовательно, между $\frac{1}{a_1}$ и $\frac{1}{a_2}$ лежит корень производной многочлена $Q(t)$ (так как на интервале $\left(\frac{1}{a_1};\ \frac{1}{a_2}\right)$ найдется либо точка минимума, либо точка максимума $Q(t)$). Значит, уравнение $Q'(t) = 0$ имеет действительный корень t_0. Поскольку

$$Q'(0) = (-1)^{n+1} \, \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \neq 0,$$

имеем $t_0 \neq 0$. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ имеет действительный корень $\frac{1}{t_0}$. Что и требовалось доказать.

5. *Ответ.* $\frac{1053}{2^{21}}$.

Первое решение. Пусть m_n — наименьшее число, которое можно получить из n единиц после $n-1$ операций. Заметим, что

$$m_n = \min_{\substack{p+q=n,\\ p,q\in\mathbb{N}}} \frac{m_p + m_q}{4}$$

при всех $n \geqslant 2$. Действительно, как бы мы ни получили наименьшее число m_n, оно равно $\frac{x+y}{4}$, где числа x и y были получены на предыдущем шаге. Пусть x получено из p единиц исходного набора, а y — из оставшихся $n-p=q$ единиц. Если $x > m_p$ или $y > m_q$ (предположим для определенности, что $x > m_p$), то из исходного набора p единиц можно было бы получить меньшее число, не затрагивая второй набор.

Значит, на последнем шаге можно получить число, меньшее m_n, что противоречит определению m_n.

Докажем индукцией по n, что $m_n = f(n)$, где $f(n) = \frac{3 \cdot 2^k - n}{2^{2k+1}}$, а $k = k(n)$ определяется из условия $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ (т. е. $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$). При $n = 1, 2, 3$ это равенство проверяется непосредственно:

$$m_1 = 1 = \frac{3 \cdot 1 - 1}{2^1}, \quad m_2 = \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2^3}, \quad m_3 = \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 2 - 3}{2^3}.$$

Предположим, что оно верно для всех $n \leqslant n_0$, где $n_0 \geqslant 3$, и докажем его для $n = n_0 + 1$.

Лемма. Наименьшее значение выражения $f(p) + f(q)$ при условии $p + q = n$ достигается при $p = \lfloor n/2 \rfloor$, $q = \lceil n/2 \rceil$, где обозначено $\lfloor x \rfloor = [x]$, $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее x.

Доказательство. Обозначим $d(n) = f(n) - f(n+1)$. Пользуясь формулой для $f(n)$, получаем $d(n) = 2^{-2k-1}$, где $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ (это проверяется непосредственно как в случае $n < 2^{k+1} - 1$, так и при $n = 2^{k+1} - 1$). Из полученной формулы для $d(n)$ следует, что $d(n) \geqslant d(n+1)$, поэтому $d(p) \geqslant d(q)$ при $p \leqslant q$.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant q < n$ и $p + q = n$. Сравним значения $f(p) + f(q)$ и $f(p+1) + f(q-1)$. Их разность равна

$$f(p) + f(q) - f(p+1) - f(q-1) = d(p) - d(q-1).$$

Если $p < q$, то $d(p) \geqslant d(q-1)$, а значит, $f(p) + f(q) \geqslant f(p+1) + f(q-1)$. Итак, если p пробегает значения от 1 до $\lfloor n/2 \rfloor$ (т. е. не превосходит q), то сумма $f(p) + f(q)$ не возрастает, а значит, ее наименьшее значение достигается при $p = \lfloor n/2 \rfloor$ (соответственно, $q = \lceil n/2 \rceil$). Лемма доказана.

Из доказанной леммы и предположения индукции следует, что

$$m_n = \frac{m_{\lfloor n/2 \rfloor} + m_{\lceil n/2 \rceil}}{4} = \frac{f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil)}{4}.$$

Остается убедиться, что

$$\frac{f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil)}{4} = f(n).$$

Пусть k таково, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Тогда $2^{k-1} \leqslant \lfloor n/2 \rfloor < 2^k$. Если $n < 2^{k+1} - 1$, то $2^{k-1} \leqslant \lceil n/2 \rceil < 2^k$, и $f(\lceil n/2 \rceil) = \frac{3 \cdot 2^{k-1} - \lceil n/2 \rceil}{2^{2k-1}}$.

Если же $n=2^{k+1}-1$, то $\lceil n/2\rceil=2^k$, и

$$f(\lceil n/2\rceil)=\frac{3\cdot 2^k-2^k}{2^{2k+1}}=2^{-k}=\frac{3\cdot 2^{k-1}-2^k}{2^{2k-1}}=\frac{3\cdot 2^{k-1}-\lceil n/2\rceil}{2^{2k-1}},$$

т. е. в обоих случаях имеем

$$f(\lceil n/2\rceil)=\frac{3\cdot 2^{k-1}-\lceil n/2\rceil}{2^{2k-1}}.$$

Следовательно,

$$m_n=\frac{f(\lfloor n/2\rfloor)+f(\lceil n/2\rceil)}{4}=\frac{3\cdot 2^k-n}{2^{2k+1}}=f(n).$$

При $n=2019$ получаем $k=10$, $m_{2019}=\dfrac{3072-2019}{2^{21}}=\dfrac{1053}{2^{21}}$.

Второе решение. Пусть x — число, получившееся после 2018 операций. Проследим, как было получено это число. Для этого «развернем» все операции в обратном направлении. При прямом применении операции два числа заменялись одним, поэтому при обратном каждое число мы будем заменять на два числа, из которых оно было получено (сохраняя деление на 4):

$$\frac{a+b}{4}\to\frac{a}{4}+\frac{b}{4}.$$

При этом есть числа, у которых нет предшественников — это единицы. Каждую единицу мы искусственно представим в виде суммы двух чисел:

$$\frac{a+1}{4}\to\frac{1}{4}+\frac{a}{4}=\frac{2}{4^2}+\frac{2}{4^2}+\frac{a}{4}$$

(если $a=1$, то с этой единицей мы проделаем ту же процедуру). Далее каждую степень двойки, стоящую в числителе и полученную когда-то из единицы, мы снова искусственно превращаем в сумму двух чисел:

$$\frac{2^l}{4^m}=\frac{4\cdot 2^l}{4^{m+1}}=\frac{2^{l+1}+2^{l+1}}{4^{m+1}}=\frac{2^{l+1}}{4^{m+1}}+\frac{2^{l+1}}{4^{m+1}}.$$

Таким образом, при каждом таком «разворачивании» операции в обратном направлении количество чисел удваивается. Поэтому в итоге мы получим представление числа x в виде дроби, в числителе которой стоит сумма 2048 чисел ($2^{10}<2019<2^{11}=2048$), каждое из которых есть некоторая степень двойки, а знаменатель равен 4^{11}.

Обозначим через a_k количество слагаемых вида 2^k, $k=$ $=0,\ 1,\ \ldots$, в числителе дроби, представляющей число x.

С учетом искусственного раздвоения единиц и чисел, получающихся из них, исходное количество единиц равно

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \ldots$$

Получаем следующую систему условий, равносильную исходной задаче:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \ldots}{4^{11}} \to \min, \\ a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{4} + \ldots = 2019, \\ a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = 2048. \end{cases}$$

Чтобы сделать число x наименьшим, необходимо обнулить как можно больше чисел a_k с большими коэффициентами (или, что то же самое, с большими номерами k). Для 2019 единиц достаточно положить $a_2 = a_3 = \ldots = 0$. Решением системы

$$\begin{cases} a_0 + \dfrac{a_1}{2} = 2019, \\ a_0 + a_1 = 2048 \end{cases}$$

будут числа $a_0 = 1990$, $a_1 = 58$. Тогда

$$x = \frac{1990 + 116}{4^{11}} = \frac{2106}{2^{22}} = \frac{1053}{2^{21}}.$$

Заметим, что если изначально на доске было написано количество единиц, равное степени двойки, то можно положить $a_1 = a_2 = \ldots = 0$, т. е. в этом случае можно взять отличным от нуля только a_0.

6 класс (*6348 работ*)

	1	2	3	4	5	6
8					6	9
7					0	3
6			130	107	1	16
5		851	16	3	0	10
4	1338	11	121	0	1	108
3	727	1	17	127	3	61
2	912	0	1059	26	2	31
1	920	0	1283	1347	5	274
0	2451	5485	3722	4738	6330	5836

7 класс (*5292 работы*)

	1	2	3	4	5	6
9					37	6
6			1155	102	0	0
5		466	484	2	0	0
4	3731	70	180	38	0	0
3	0	88	75	0	0	3
2	30	248	290	20	0	0
1	0	897	33	68	0	2
0	1531	3523	3075	5062	5255	5281

8 класс (*1999 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	558	214	346	219	16	2
$\pm$	11	42	18	12	2	8
$\mp$	21	49	21	32	4	18
$-$	1052	1060	706	794	843	897
0	357	634	908	942	1134	1074

9 класс (*1254 работы*)

	1	2	3	4	5	6
+	429	245	106	78	26	4
±	47	26	1	14	1	0
∓	8	165	1	76	3	53
−	585	473	413	233	198	443
0	185	345	733	853	1026	754

10 класс (*1139 работ*)

	1	2	3	4	5	6
+	518	163	231	98	14	1
±	0	1	8	9	1	0
∓	0	12	28	39	6	2
−	494	477	401	564	449	82
0	127	486	471	429	669	1054

11 класс, первый день (*851 работа*)

	1	2	3	4	5	6
+	505	257	206	23	98	5
±	69	72	10	4	34	1
∓	18	45	18	16	21	3
−/0	259	477	617	808	698	842

11 класс, второй день (*332 работы*)

	1	2	3	4	5
+	220	203	100	78	3
±	24	33	38	12	3
∓	34	18	25	9	30
−/0	54	78	169	233	296

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учеными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всем мире. Выпускники факультета трудятся во всех крупных научно-исследовательских центрах, учебных и иных учреждениях, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

создан в 2007 г. при участии Независимого Московского Университета. Международный экспертный совет факультета включает филдсовских лауреатов П. Делиня, С. Смирнова и других выдающихся математиков. Согласно отчету за 2017 г., «Совет повторно оценивает общий уровень научных исследований на факультете как выдающийся, как в отношении объема, так и в отношении качества. Факультет удерживает лидирующую позицию среди математических факультетов страны».

На старших курсах студенты выбирают индивидуальные учебные планы, позволяющие глубоко изучить заинтересовавшую область чистой математики или ее приложений. Благодаря этому выпускники, нацеленные на академическую карьеру, поступают в лучшие аспирантуры мира, а остальные неизменно востребованы в IT, финансах и других наукоемких приложениях.

Помимо программы общего профиля «Математика», на факультете действует совместный бакалавриат с Центром педагогического мастерства, который готовит высококвалифицированных преподавателей физико-математических школ.

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК НИУ ВШЭ

создан в 2014 году совместно с компанией «Яндекс». Факультет ведет подготовку специалистов высокого уровня по работе с данными, аналитиков, исследователей в области компьютерных наук и инженеров по программному обеспечению для ведущих ИТ-компаний и исследовательских центров. Бакалаврские программы «Прикладная математика и информатика» и «Программная инженерия» ежегодно привлекают сильнейших абитуриентов страны. В 2018 году открыта англоязычная программа двух дипломов «Прикладной анализ данных» совместно с Лондонской Школой Экономики. Наряду с отличной фундаментальной подготовкой в области математики и информатики большое внимание уделяется прикладным курсам и проектной работе, построению индивидуальной образовательной траектории. В числе преподавателей — ведущие российские математики и эксперты в области Computer Science, международные специалисты, исследователи из научных институтов, сотрудники высокотехнологичных компаний, победители олимпиад по спортивному программированию ICPC. Магистерские программы ФКН реализуются совместно со Сбербанком, Сколтехом, Школой анализа данных Яндекса, Институтом проблем передачи информации и Институтом системного программирования РАН.

На факультете девять научных лабораторий. Среди реализуемых проектов — алгоритмическая теория игр, применение методов машинного обучения и обработка данных на эксперименте Большого адронного коллайдера, проект по искусственному интеллекту в совместной лаборатории с Samsung, разработки в области биоинформатики и автоматической обработки текстов. Наши студенты участвуют в фундаментальных и прикладных проектах, побеждают на хакатонах и олимпиадах, проходят стажировки в ведущих научных центрах и компаниях-лидерах ИТ-индустрии.

ФИЗТЕХ-ШКОЛА
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Уникальная научно-образовательная Школа, созданная в 2016 году в Московском физико-техническом институте. В ее состав входят факультет инноваций и высоких технологий (ФИВТ), факультет управления и прикладной математики (ФУПМ), ряд современных лабораторий.

ФИВТ — признанный лидер в области образования и науки на стыке математики, программирования и computer science. На ФИВТ представлены уникальные учебные планы по математике, в которых традиционное фундаментальное математическое образование подкреплено не имеющим аналогов набором курсов по дискретной математике: комбинаторике, теории графов, логике и теории алгоритмов, теории чисел, дискретным функциям, дискретному анализу, дискретной оптимизации.

ФУПМ — сильнейший факультет в области образования и науки на стыке математики, физики, механики и информационных технологий. На ФУПМ за счет правильного сочетания лучшей в стране программы по физике и современных математических курсов закладываются основы для исследований в области математического моделирования, вычислительной математики, механики, оптимизации, статистики и стохастики.

На факультетах Школы ведется большая научная и исследовательская работа, к которой студенты активно привлекаются уже на ранних курсах. По окончании факультета студент имеет широкий спектр перспектив — занятия чистой наукой, прикладные исследования, аналитика и разработка в крупнейших компаниях России и мира, а также в лабораториях Школы и в сильнейших институтах Российской академии наук.

МАТЕМАТИКА, ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА, АЛГОРИТМЫ, АНАЛИЗ ДАННЫХ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ В СПбГУ

В 2015 году Санкт-Петербургский государственный университет открыл новое направление бакалавриата «Математика», которое сразу завоевало популярность: в 2015–2018 годах его выбрало наибольшее число победителей и призеров Всероссийской олимпиады школьников по математике среди всех образовательных программ России. В 2019 году добавляются две новые образовательные программы: «Математика, алгоритмы и анализ данных» (совместно с компанией Яндекс) и «Современное программирование» (совместно с компанией JetBrains).

В работу со студентами вовлечен выдающийся коллектив преподавателей и научных сотрудников, который обеспечивает подготовку во всех направлениях современной математики — программа «Математика» курируется Советом, в который входят ведущие российские и зарубежные ученые (председатель Совета — филдсовский лауреат С. К. Смирнов). Программу отличает включение современных научных достижений, большое количество курсов по выбору студента и возможность индивидуальных образовательных траекторий. Теоретическая информатика в рамках программы рассматривается как часть математики.

Обучение происходит в историческом центре Санкт-Петербурга — на Васильевском острове, где расположена и часть общежитий. Студенты активно вовлекаются в научную работу в сотрудничестве с лабораторией им. П. Л. Чебышева, а также в работу над программными продуктами под руководством профессионалов из индустрии.

Веб-сайт бакалавриата: `http://math-cs.spbu.ru/`

E-mail: `math-cs@spbu.ru`

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru

www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ИНТЕРНЕТ-БИБЛИОТЕКА ВИТАЛИЯ АРНОЛЬДА

ilib.mccme.ru

Замечательные книги, бывшие в течение десятков лет настольными для многих школьных учителей математики, руководителей кружков, школьников, интересующихся точными науками, стали в последние годы физически недоступны читателям (несмотря на большие тиражи, издания давно стали библиографической редкостью, недоступной, к сожалению, в большинстве библиотек; переиздать все эти книги — непростая техническая и финансовая задача).

Понимая (и не понаслышке зная) эту ситуацию, мы решили собрать электронные версии любимых книг и журналов, чтобы те, кому это нужно и интересно, могли уже сейчас читать, решать задачи, обсуждать идеи...

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЕ ЖУРНАЛЫ В ИНТЕРНЕТЕ

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

Журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)

priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)

kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

СБОРНИКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ» (3 сер., 1997—)

www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Сборники с таким названием выходили в 1934—38 и 1957—61 годах. Сборники новой серии играют роль связующего звена между специальной и популярной математической литературой. Математическое содержание «должно быть понятно вдумчивому и настойчивому читателю, даже при отсутствии специальной подготовки». Кроме того в сборниках публикуются материалы о математической жизни, материалы по преподаванию математики.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»

www.problems.ru

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте www.problems.ru

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ»

zadachi.mccme.ru

Более 7500 задач по планиметрии и 2500 задач по стереометрии с решениями, чертежами, атрибутами для тематического поиска и прослеживания взаимосвязей.

Девятнадцатая летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
имени Виталия Арнольда

для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс) пройдет с 18 по 29 июля 2019 года в Дубне (на базе дома отдыха «Ратмино»).

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, заполните до 10 мая анкету участника.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали академик РАН В. А. Васильев, члены-корреспонденты РАН А. А. Гайфуллин, А. Г. Кузнецов, Д. О. Орлов, И. А. Панин, В. Ю. Протасов, А. А. Разборов, а также И. В. Аржанцев, А. П. Веселов, В. А. Клепцын, С. К. Ландо, Г. Ю. Панина, М. А. Раскин, А. Б. Сосинский, В. А. Тиморин и другие.

Материалы прошедших школ и информацию о ЛШСМ-2019 смотрите на сайте

`www.mccme.ru/dubna`

Контактный e-mail оргкомитета `dubna@mccme.ru`

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXXII Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Подписано в печать 31.03.2019 г.
Формат бумаги 60 × 90/16. Объем 3,5 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 1000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04