УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. Таня сфотографировала четырёх котиков, поедающих сосиски (рис. 1). Вскоре она сделала ещё один кадр (рис. 2). Каждый котик ест свои сосиски непрерывно и с постоянной скоростью, а на чужие не покушается. Кто доест первым и кто последним? Ответ объясните.

Рис. 1

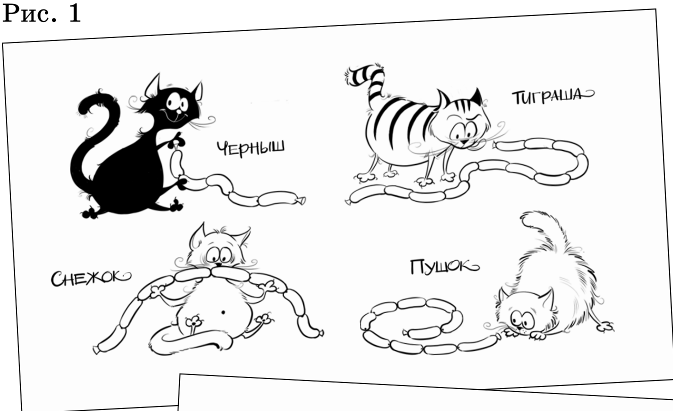
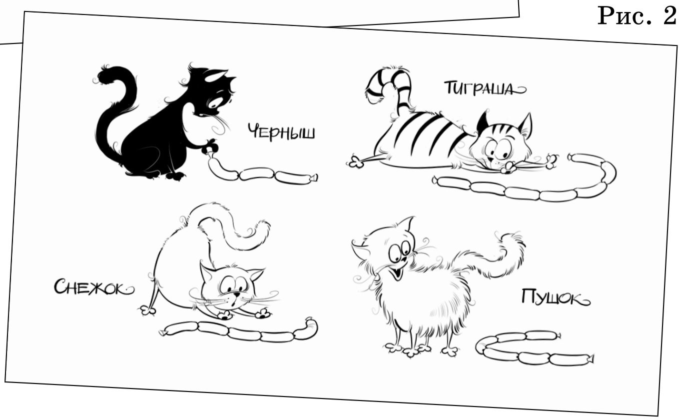
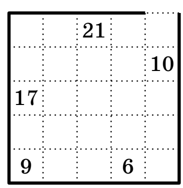


Рис. 2



(*Т. И. Голенищева-Кутузова, Т. В. Казицына, А. А. Трунин*)

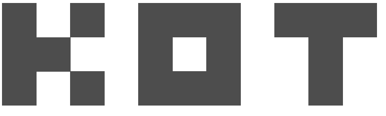
2. На клетчатой бумаге был нарисован лабиринт: квадрат 5×5 (внешняя стена) с выходом шириной в одну клетку, а также внутренние стенки, идущие по линиям сетки. На рисунке мы скрыли от вас все внутренние стенки. Начертите, как они могли располагаться, зная, что числа, стоящие в



клетках, показывают наименьшее количество шагов, за которое можно было покинуть лабиринт, стартовав из этой клетки (шаг делается в соседнюю по стороне клетку, если они не разделены стенкой). Достаточно одного примера, пояснения не нужны. (*М. А. Евдокимов, А. В. Хачатурян*)

3. На доске написаны числа 2, 3, 4, ..., 29, 30. За рубль можно отметить любое число. Если какое-то число уже отмечено, можно бесплатно отмечать его делители и числа, кратные ему. За какое наименьшее число рублей можно отметить все числа на доске? (*И. В. Ященко*)

4. Миша сложил из кубиков куб $3 \times 3 \times 3$. Затем некоторые соседние по грани кубики он склеил друг с другом. Получилась цельная конструкция из 16 кубиков, остальные кубики Миша убрал. Обмакнув конструкцию в чернила, он поочерёдно приложил её к бумаге тремя гранями. Вышло слово КОТ (см. рис.). Что получится, если отпечатать грань, противоположную букве «О»?

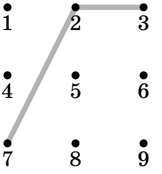


(*М. А. Евдокимов, О. А. Заславский, А. В. Шаповалов*)

5. В лесу живёт 40 зверей — лисицы, волки, зайцы и барсуки. Ежегодно они устраивают бал-маскарад: каждый надевает маску животного другого вида, причём два года подряд они одну и ту же маску не носят. Два года назад на балу было 12 «лисиц» и 28 «волков», год назад — 15 «зайцев», 10 «лисиц» и 15 «барсуков», а в этом году — 15 «зайцев» и 25 «лисиц». Каких зверей в лесу больше всего? (*М. А. Хачатурян*)

Задача 6. Ваня придумывает число из неповторяющихся цифр без нулей — пароль для своего телефона. Пароль работает так: если, не отрывая палец от экрана, последовательно соединить отрезками точки, соответствующие цифрам пароля, телефон разблокируется. При этом телефон не позволяет соединять отрезком две точки, между которыми есть третья: если Ваня соединит, например, 1 и 3, телефон «подумает», что Ваня вводит 1-2-3.

Ваня хочет, чтобы при вводе пароля линия движения пальца не пересекала сама себя. А ещё чтобы перестановкой цифр пароля ни в каком порядке, кроме обратного, нельзя было получить другую такую линию. Например, пароль 1263 Ване не нравится, так как линия 6-3-2-1 другая, но тоже не имеет самопересечений.



Ваня придумал пароль 723 (см. рис.). Эти три цифры — 2, 3 и 7 — действительно никакой другой линией соединить нельзя. Жаль только, что пароль такой короткий.

Помогите Ване придумать пароль подлиннее. В ответе напишите сам пароль и нарисуйте ту единственную линию, которую можно получить из этих цифр. (*И. В. Ященко*)

7 класс

Задача 1. В ребусе ЯЕМЗМЕЯ = 2020 замените каждую букву в левой части равенства цифрой или знаком арифметического действия (одинаковые буквы одинаково, разные — по-разному) так, чтобы получилось верное равенство. Достаточно привести один пример, пояснений не требуется. (*А. А. Заславский, О. А. Заславский*)

2. См. задачу 2 для 6 класса.

3. На столе лежат 6 яблок (не обязательно одинакового веса). Таня разложила их по 3 на две чашки весов, и весы остались в равновесии. А Саша разложил те же яблоки по-другому: 2 яблока на одну чашку и 4 на другую, и весы опять остались в равновесии. Докажите, что можно положить на одну чашку весов одно яблоко, а на другую два так, что весы останутся в равновесии. (*А. В. Шаповалов*)

4. Три стороны четырёхугольника равны, а углы четырёхугольника, образованные этими сторонами, равны 90° и 150°. Найдите два других угла этого четырёхугольника. (*М. А. Волчкевич*)

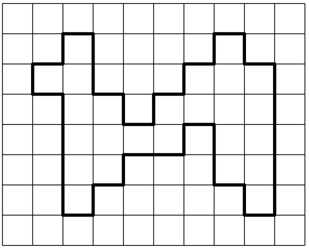
5. См. задачу 5 для 6 класса.

6. Можно ли данную фигуру («верблюда») разбить

а) по линиям сетки;

б) не обязательно по линиям сетки

на 3 части, из которых можно сложить квадрат?



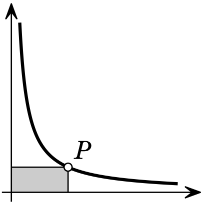
(*Ю. С. Маркелов, ученик 10 класса*)

8 класс

1. Том написал на заборе из досок слово ММО, а Гек — число 2020. Ширина каждой буквы и цифры 9 см, а ширина доски забора — 5 см. Мог ли Гек испачкать меньше досок, чем Том? (Доски расположены вертикально, а слова и числа пишутся горизонтально. Цифры и буквы пишутся через равные промежутки.)

(*Д. Г. Мухин, А. Л. Федулкин, И. А. Эльман*)

2. На графике функции $y = 1/x$ Миша отмечал подряд все точки с абсциссами 1, 2, 3, ..., пока не устал. Потом пришла Маша и закрасила все прямоугольники, одна из вершин которых — это отмеченная точка, еще одна — начало координат, а еще две лежат на осях (на рисунке показано, какой прямоугольник Маша закрасила бы для отмеченной точки P). Затем учительница попросила ребят посчитать площадь фигуры, состоящей из всех точек, закрашенных ровно один раз. Сколько получилось?



(*Д. Г. Мухин*)

3. Дано натуральное число N. Вера делает с ним следующие операции: сначала прибавляет 3 до тех пор, пока получившееся число не станет делиться на 5 (если изначально N делится на 5, то ничего прибавлять не надо). Получившееся число Вера делит на 5. Далее делает эти же операции с новым числом, и так далее. Из каких чисел такими операциями нельзя получить 1? (*А. С. Шаламова*)

4. В турнире по гандболу участвуют 20 команд. После того как каждая команда сыграла с каждой по разу, оказалось, что количество очков у всех команд разное. После того как каждая команда сыграла с каждой по второму разу, количество очков у всех команд стало одинаковым. В гандболе за победу команда получает 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение — 0 очков. Верно ли, что найдутся две команды, по разу выигравшие друг у друга?

(*Б. Р. Френкин, А. А. Заславский*)

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Перпендикуляр, опущенный из точки A на сторону CD, проходит через середину диагонали BD, а перпендикуляр, опущенный из точки D на сторону AB, проходит через середину диагонали AC. Докажите, что трапеция равнобокая.

(*А. В. Доледенок*)

6. У Полины есть колода из 36 карт (4 масти по 9 карт в каждой). Она выбирает из неё половину карт, какие хочет, и отдает Василисе, а вторую половину оставляет себе. Далее каждым ходом игроки по очереди открывают по одной карте по своему выбору (соперник видит масть и достоинство открытой карты), начиная с Полины. Если в ответ на ход Полины Василиса смогла положить карту той же масти или того же достоинства, то Василиса зарабатывает одно очко. Какое наибольшее количество очков Василиса может гарантированно заработать? (*М. А. Евдокимов*)

9 класс

1. Существует ли натуральное число, делящееся на 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, ..., 9 поровну?

(*М. А. Евдокимов*)

2. Из шести палочек попарно различной длины сложены два треугольника (по три палочки в каждом). Всегда ли можно сложить из них один треугольник, стороны которого состоят из одной, двух и трех палочек соответственно?

(*В. В. Новиков*)

3. Три богатыря сражаются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает половину всех голов и еще одну, Добрыня Никитич — треть всех голов и еще две, а Алёша Попович — четверть всех голов и еще три. Богатыри бьют по одному, в том порядке, в котором считают нужным. Если ни один богатырь не может ударить из-за того, что число голов получится нецелым, то Змей съедает богатырей. Смогут ли богатыри отрубить все головы 20^{20}-головому Змею? (*А. А. Заславский*)

4. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC. (*А. А. Соколов*)

5. К Ивану на день рождения пришли $3n$ гостей. У Ивана есть $3n$ цилиндров с написанными сверху буквами А, Б и В, по n штук каждого типа. Иван хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или больше) так, чтобы длина каждого хоровода делилась на 3, а при взгляде на любой хоровод сверху читалось бы по часовой стрелке АБВАБВ...АБВ. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(3n)!$ различными способами. (Цилиндры с одинаковыми буквами неразличимы; все гости различны.) (*Г. А. Погудин*)

6. Глеб задумал натуральные числа N и a, $a < N$. Число a он написал на доске. Затем он начал выполнять следующую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число, а полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a, чтобы сумма выписанных чисел была больше $100N$? (*И. В. Митрофанов*)

10 класс

1. Приведите пример такого квадратного трехчлена $P(x)$, что при любом x справедливо равенство

$$P(x) + P(x+1) + \ldots + P(x+10) = x^2.$$

(*М. А. Евдокимов*)

2. Среди зрителей кинофестиваля было поровну мужчин и женщин. Всем зрителям понравилось одинаковое количество фильмов. Каждый фильм понравился восьми зрителям. Докажите, что не менее $3/7$ фильмов обладают следующим свойством: среди зрителей, которым фильм понравился, не менее двух мужчин. (*Фольклор*)

3. Существует ли вписанный в окружность 19-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов? (*М. И. Малкин*)

4. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к BC пересекает AB и AC в точках X и Y. Прямая AO пересекает прямую BC в точке D, M — середина BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E, отличной от A. Докажите, что прямая OE касается описанной окружности треугольника AXY.

(*А. А. Соколов*)

5. На доске написаны 1000 последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего меньшее; все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся 1000 последовательных целых чисел. (*А. В. Грибалко*)

6. Для каких k можно закрасить на белой клетчатой плоскости несколько клеток (конечное число, большее нуля) в черный цвет так, чтобы на любой клетчатой вертикали, горизонтали и диагонали либо было ровно k черных клеток, либо вовсе не было черных клеток?

(*А. Динев, К. Гаров, Н. Белухов*)

11 класс (1-й день)

1. Приведите пример числа, делящегося на 2020, в котором каждая из десяти цифр встречается одинаковое количество раз. (*М. А. Евдокимов*)

2. Существует ли такая непериодическая функция f, определённая на всей числовой прямой, что при любом x выполнено равенство $f(x+1)=f(x+1)f(x)+1$? (*Фольклор*)

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. Из шахматной доски 8×8 вырезали 10 клеток. Известно, что среди вырезанных клеток есть как черные, так и белые. Какое наибольшее количество двухклеточных прямоугольников можно после этого гарантированно вырезать из этой доски? (*А. М. Кубарев*)

5. Существует ли тетраэдр, в сечениях которого двумя разными плоскостями получаются квадраты 100×100 и 1×1? (*М. А. Евдокимов*)

6. На доске написаны $2n$ последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на сумму и разность чисел этой пары (не обязательно вычитать из большего числа меньшее; все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся $2n$ последовательных чисел. (*А. В. Грибалко*)

11 класс (2-й день)

1. Мальчик едет на самокате от одной автобусной остановки до другой и смотрит в зеркало, не появился ли сзади автобус. Как только мальчик замечает автобус, он может изменить направление движения. При каком наибольшем расстоянии между остановками мальчик гарантированно не упустит автобус, если он знает, что едет со скоростью втрое меньшей скорости автобуса и способен увидеть автобус на расстоянии не более 2 км? (*Фольклор*)

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} \pi x = [\lg \pi^x] - [\lg [\pi^x]],$$

где $[a]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее a. (*А. В. Бегунц*)

3. За круглым вращающимся столом, на котором стоят 8 белых и 7 чёрных чашек, сидят 15 гномов. Они надели 8 белых и 7 чёрных колпачков. Каждый гном берёт себе чашку, цвет которой совпадает с цветом его колпачка и ставит напротив себя, после этого стол поворачивается случайным образом. Какое наибольшее число совпадений цвета чашки и колпачка можно гарантировать после поворота стола (гномы сами выбирают, как сесть, но не знают, как повернётся стол)? (*М. С. Лобанов*)

4. На стороне AC треугольника ABC взяли такую точку D, что угол BDC равен углу ABC. Чему равно наименьшее возможное расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, если $BC = 1$? (*М. А. Евдокимов*)

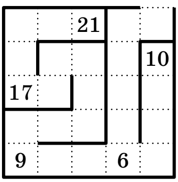
5. Кузнечик прыгает по числовой прямой, на которой отмечены точки $-a$ и b. Известно, что a и b — положительные числа, а их отношение иррационально. Если кузнечик находится в точке, которая ближе к $-a$, то он прыгает вправо на расстояние, равное a. Если же он находится в середине отрезка $[-a; b]$ или в точке, которая ближе к b, то он прыгает влево на расстояние, равное b. Докажите, что независимо от своего начального положения кузнечик в некоторый момент окажется от точки 0 на расстоянии, меньшем 10^{-6}. (*П. А. Бородин*)

6 класс

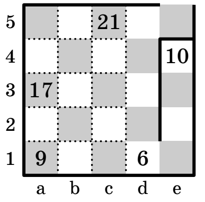
1. *Ответ.* Первым доест Тиграша, последним — Снежок.

Решение. За время, которое прошло между двумя фотографиями, Черныш съел 2 сосиски, Тиграша 5, Снежок 3, а Пушок 4. Подождём ещё такое же время и снова посмотрим на котиков. Черныш съест ещё 2 сосиски, ему останется одна, то есть понадобится ещё половина того времени. То же и с Пушком: он съест 4, и ему останется доесть две сосиски, на что тоже уйдёт половина того времени. Тиграша съест 5 сосисок, и ему останется съесть две, что меньше половины от пяти. Снежок же съест 3 сосиски, и ему останется две, что составляет более половины от трёх. Поэтому Тиграша справится со своими сосисками раньше всех, а Снежок — позже всех.

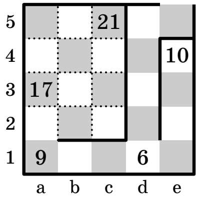
2. *Ответ.* См. рисунок.



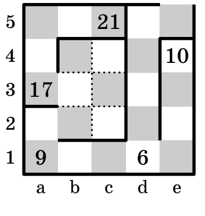
Комментарий. Можно доказать, что внутренние стенки были расположены именно так. Будем постепенно восстанавливать стенки, исходя из условия задачи. Жирной линией обозначим стенки, в наличии которых мы уверены, линиями из точек обозначим пока не исследованные границы, а в тех местах, где точно есть проход, линию сотрём совсем. Чтобы отдельные клетки были хорошо видны, раскрасим лабиринт в шахматном порядке. Ну и раз уж наш рисунок стал похож на шахматную доску, воспользуемся обозначениями, принятыми у шахматистов, — обозначим столбцы латинскими буквами, а строки — цифрами. Заметим, что между e4 и e5 точно есть стенка, иначе в e4 было бы 2, а не **10**. Теперь посмотрим на клетку d1 с цифрой **6**. Из неё до выхода шесть шагов, даже если бы никаких стенок не было, поэтому из d1 к выходу можно пройти по столбцам d и e с одним переходом из d в e. Стенка между e4 и e5 показывает, что переход этот возможен только между d5 и e5, поэтому весь столбец d свободен от поперечных стенок. Наоборот, между d4 и e4, d3 и e3, d2 и e2 стенки есть, иначе из e4 можно было бы выйти быстрее, чем за десять шагов. Вот что у нас получилось:



Из c5 можно выйти за 21 шаг. Поскольку клеток 25, а заходить в «аппендикс» e1–e4 значит удлинять путь, кратчайший путь из c5 пройдёт по всем остальным клеткам лабиринта. И это значит, что последние шесть клеток этого пути начнутся в d1, то есть между столбцами c и d везде, кроме первой строки, есть стенки — иначе в столбец d можно было бы попасть раньше. Путь из a1 по первой строке до d1 и далее уже по известной дороге занимает ровно девять шагов, и теперь понятно, что отклоняться от него нельзя. А тогда между c1 и c2, b1 и b2 есть стенки, иначе длинный путь из c5 можно было бы сократить. Вот что нам теперь понятно:



Путь из c5 проходит через a3, то есть туда из c5 мы должны попасть за четыре шага. С учётом необходимости посещения клетки a5 это можно сделать только одним способом. У нас не должно быть возможности свернуть с этого отрезка пути, поэтому между c5 и c4, b5 и b4, a4 и b4 есть стенки. Стенка есть и между a3 и a2, иначе в a3 было бы 11, а не 17. Вот что сейчас получилось:



Теперь нетрудно восстановить две оставшиеся стенки и получить ответ.

3. *Ответ.* За 5 рублей.

Решение. Отметим числа 17, 19, 23 и 29, потратив четыре рубля. Затем отметим число 2, потратив ещё рубль. После этого мы сможем бесплатно отметить все чётные числа (так как они делятся на 2), а после этого все нечётные числа, не превосходящие 15, — для любого из них (допустим, для числа n) чётное число $2n$ у нас отмечено, и мы можем отметить n как его делитель. Осталось отметить 21, 25 и 27, и это тоже делается бесплатно: 25 делится на отмеченное число 5, а 21 и 27 — на отмеченное число 3. При любом способе решения задачи простые числа 17, 19, 23 и 29, превышающие 15, придётся отмечать за деньги — они не являются делителями или кратными каких-либо чисел на доске. Значит, 4 рубля мы потратим только на них. Чтобы отметить хотя бы что-то ещё, придётся тратить пятый рубль. Значит, дешевле чем за пять рублей условия задачи не выполнить.

Комментарий. На самом деле, отметив «большие» простые числа, мы могли бы вместо двойки отметить любое из оставшихся чисел на доске. В самом деле, потом мы бесплатно отметим его наименьший простой делитель p. Если $p = 2$, действуем по алгоритму, описанному выше. Если нет, отмечаем $2p$ (это можно сделать, так как $p < 15$), потом отмечаем двойку, а дальше всё остальное уже известным способом.

Аналогичное решение применимо и для произвольно длинного набора 2, 3, 4, ..., N — мы вынуждены отметить за деньги все «большие» простые числа (превышающие $N/2$), а потом отмечаем за рубль любое из оставшихся чисел. Далее бесплатно отмечаем двойку способом, описанным выше, затем отмечаем все чётные числа, потом все «малые» простые числа (не превышающие $N/2$), потому что любое «малое» p будет делителем $2p$. Теперь можно отметить все остальные неотмеченные числа: каждое из них будет делиться на свой минимальный простой делитель — «малое» простое число.

4. *Ответ.* См. рисунок.

Решение. Поскольку можно напечатать букву Т, какие-то два угловых кубика убраны. Остальные шесть угловых кубиков должны остаться, так как иначе не получится напечатать К и О. Отсюда получаем, что буквы К и О расположены на соседних гранях, причем все три кубика, соединяющие эти грани, есть. Теперь букву Т можно расположить только на грани, противоположной букве К. Итак, места 13 из 16 кубиков определены (см. рис. 1). Оставшиеся три должны скрепить конструкцию. Кубики с цифрами 1 и 2 сейчас как бы «висят в воздухе» — они не приклеены ни одной своей гранью к остальным. Причём если их какой-то гранью и можно приклеивать, то только той, на которой мы написали цифры 1 и 2. Поэтому к этим граням у Миши неминуемо приклеено по кубику. Но эти кубики всё ещё не делают конструкцию жёсткой: пары склеенных только что кубиков продолжают «висеть в воздухе». Мише удалось всё закрепить ровно одним добавочным кубиком — значит, он приклеил его к обеим парам. Не испортив букву К, это можно сделать единственным образом (см. рис. 2).

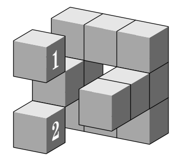


Рис. 1

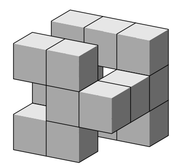


Рис. 2

Теперь можно посмотреть на грань, противоположную грани с буквой О, и нарисовать ответ (с точностью до поворота грани).

5. *Ответ.* Больше всего барсуков.

Решение. Запишем данные задачи в виде таблицы.

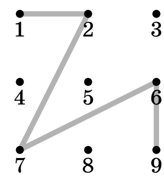
	«Волки»	«Лисы»	«Зайцы»	«Барсуки»
Два года назад	28	12		
Год назад		10	15	15
В этом году		25	15	

Посмотрим на «зайцев». Последние два года в масках зайцев было 30 зверей. Всё это разные звери, так как никто два года подряд маску зайца не наденет. И это не зайцы. Значит в лесу есть по крайней мере 30 не-зайцев, то есть зайцев не более $40 - 30 = 10$. Такое же рассуждение про зверей, которые два последних года были на празднике «лисами», показывает, что настоящих лис не более чем

$40 - 10 - 25 = 5$. Два года назад на маскараде было 28 «волков», и всё это были не настоящие волки, настоящих же не более $40 - 28 = 12$. Итак, волков, лис и зайцев вместе не более чем $12 + 5 + 10 = 27$. Это значит, что барсуков как минимум $40 - 27 = 13$, и это самый многочисленный вид животных в лесу.

Заметим, что можно подобрать количество зверей каждого вида и так распределить маски, чтобы все условия задачи выполнялись. От участников олимпиады приводить такой пример не требовалось, но любознательный читатель, мы надеемся, сможет при желании его придумать.

6. *Ответ.* Например, 12769. См. рисунок.



Этот пароль удовлетворяет Ваниным требованиям. Посмотрим, как можно соединить без самопересечений его цифры. Цифру 7 с какой-то цифрой соединить надо, это может быть либо 2, либо 6. Пусть, например, мы провели отрезок 7-6. Теперь 9 можно соединить только с 6. Далее неизбежно надо провести отрезки 7-2 и 2-1, и мы получаем линию, изображённую на рисунке. Если бы мы сначала вместо 7-6 провели 7-2, линия получилась бы та же самая. Таким образом, эта линия единственна.

Комментарий. Интересно, что устраивающий Ваню пароль из четырёх цифр придумать невозможно. Не существует и пароля из шести и более цифр. Пятизначных паролей возможно восемь: 12769, 96721, 14389, 98341, 32947, 74923, 78163, 36187. Впрочем, линии для всех восьми паролей одной и той же формы, а отличаются только поворотом, симметрией или направлением вычерчивания.

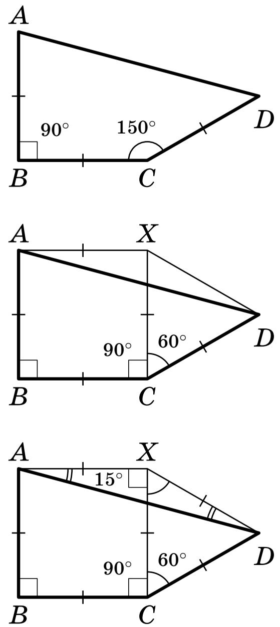
7 класс

1. *Ответ.* $2 \times 505 \times 2 = 2020$.

2. См. решение задачи 2 для 6 класса.

3. *Решение.* Два яблока, которые уравновесили у Саши четыре других, назовём *спелыми*. Они составляют половину общего веса яблок, и поэтому не могли оказаться на одной чаше весов у Тани. Значит, одна чаша весов у Тани — это одно спелое яблоко и два неспелых, и вместе они тоже составляют половину общего веса. Тогда эти два неспелых яблока весят столько же, сколько и второе спелое.

4. *Ответ.* 45° и 75°.



Решение. Обозначим вершины четырёхугольника как на рисунке.

Достроим ABC до квадрата $ABCX$. В треугольнике XCD угол XCD равен $\angle BCD - \angle BCX = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$, а стороны CX и CD равны. Значит, треугольник XCD — равнобедренный с углом 60°, т. е. равносторонний (в частности, отрезок XD также равен стороне квадрата).

Теперь, когда мы поняли, что наш четырёхугольник получается из квадрата и правильного треугольника, можно посчитать его углы. Треугольник AXD равнобедренный с углом $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ при вершине.

Поэтому

$$\angle XAD = \angle XDA = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Значит,

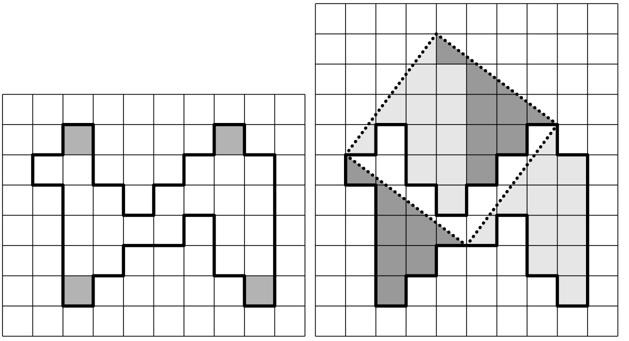
$$\angle BAD = \angle BAX - \angle XAD = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ;$$
$$\angle ADC = \angle XDC - \angle XDA = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$

5. См. решение задачи 5 для 6 класса.

6. *Ответ.* а) Нельзя; б) можно.

Решение. Заметим, что площадь верблюда — 25 клеток. То есть складывать нам предстоит квадрат со стороной 5.

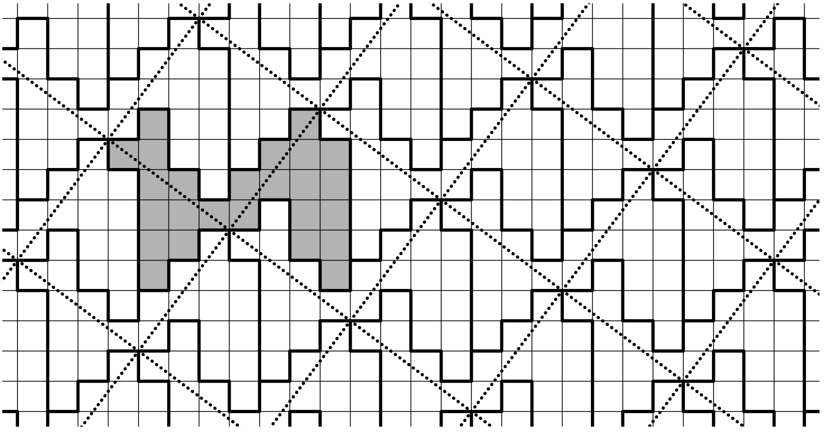
а) Посмотрим на 4 клетки, отмеченные на рисунке. Любые две из них «далеко друг от друга»: разделены минимум 4 строками или столбцами. Поэтому при разрезании две отмеченные клетки не могут попасть в одну часть (такая часть не уместилась бы в квадрат 5×5). Значит, чтобы сложить квадрат 5×5, верблюда необходимо разрезать хотя бы на 4 части (если резать по клеточкам).



б) Как разрезать верблюда и сложить квадрат — показано на рисунке.

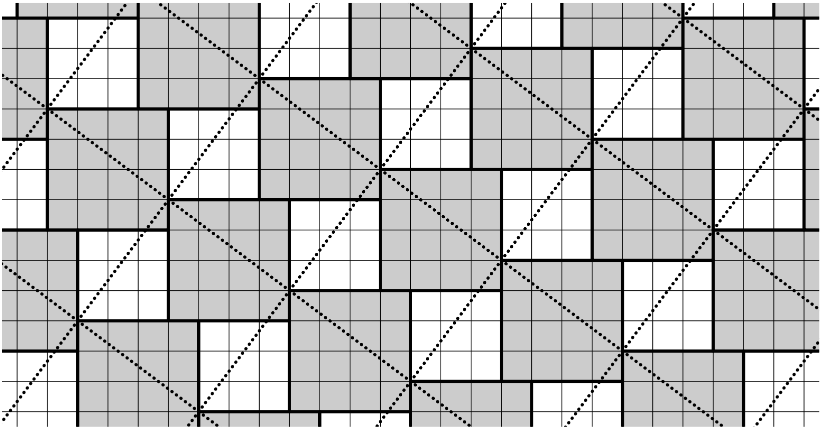
Комментарии. 1. Решив пункт а), можно догадаться, что в пункте б) сторона квадрата должна идти не по линиям сетки. Чтобы найти на клетчатой бумаге отрезок длины 5, не идущий по линиям сетки, полезно вспомнить про египетский треугольник (прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5).

2. Можно заметить, что сдвинутыми копиями верблюда можно замостить плоскость как паркетом (см. рис.). Отметив соответствующие точки верблюдов (на рисунке взяты «носы»), мы увидим, что они расположены в вершинах квадратной решетки.



Посмотрим на один из таких квадратов. Каждая его часть — кусочек одного из сдвинутых верблюдов. Сдвинув их обратно, мы получим разрезание исходного верблюда на части, из которых можно сложить квадрат. Остаётся найти такое положение квадрата, при котором частей получается три.

Подобным образом замощения помогают решить разные задачи на разрезание. Например, при помощи замощения квадратами, показанного ниже, можно доказать теорему Пифагора!



8 класс

1. *Ответ.* Да, мог.

Решение. Пусть промежуток между буквами равен 6 см. Тогда Том мог каждой буквой испачкать три доски, рисуя каждую букву с отступом 3 см от края доски. Всего он испачкает 9 досок. А Гек мог каждой цифрой испачкать только две доски, отступая 0,5 см с края доски и оставляя чистую доску в качестве промежутка между буквами. Всего он испачкает 8 досок.

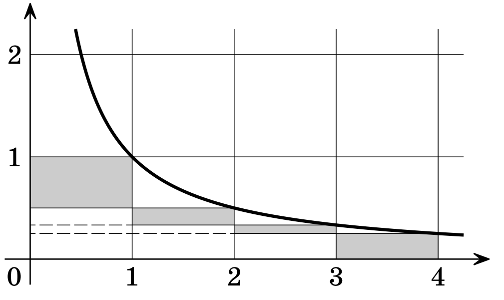
2. *Ответ.* 1.

Решение. Пусть Миша устал, отметив точку с абсциссой n. Посмотрим, как устроена фигура, состоящая из всех точек, закрашенных ровно один раз. На отрезке абсцисс $[i-1, i]$, где $i=1, \ldots, n-1$, это прямоугольник ширины 1 с высотой $h_i = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$. На отрезке $[n-1; n]$ это прямоугольник ширины 1 с высотой $h_n = \frac{1}{n}$. Тогда площадь фигуры

$$S = 1 \cdot h_1 + 1 \cdot h_2 + \ldots + 1 \cdot h_n = \\ = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = 1.$$

Комментарии. 1. Можно провести рассуждение по индукции. Пусть Маша красит прямоугольник сразу, как только Миша отметил точку. Когда Миша отметит точку $(1; 1)$, Маша закрасит прямоугольник площади 1. Далее, когда Миша отмечает точку с абсциссой n, Маша закрашивает прямоугольник площади $1/n$ первый раз и площади $1/n$ — второй раз (остальное придётся на точки, уже закрашенные более одного раза). Таким образом, площадь фигуры, состоящей из всех точек, закрашенных ровно один раз, не изменяется.

2. Наглядно этот факт можно увидеть, «сдвинув» все прямоугольники к оси ординат.



3. *Ответ.* $3k$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение. В самом деле, из чисел, кратных 3, число 1 получить не удастся, так как если число N кратно 3, то и $N+3$ кратно 3, а если $N=5k$ кратно 3, то и k кратно 3, так как 3 и 5 взаимно простые. А значит, все получающиеся в результате этих операций числа будут кратны 3, но 1 не делится на 3.

Пусть N не кратно 3. Заметим, что числа N, $N+3$, $N+6$, $N+9$ и $N+12$ также не кратны 3 и имеют разные остатки при делении на 5, значит, одно из них кратно 5. Следовательно, после первой операции деления на 5 Вера получит число, не кратное 3 и не превышающее $\dfrac{N+12}{5} = 0{,}2N+2{,}4$, что строго меньше N при $N>3$. Иными словами, после каждого деления на 5 Верины числа уменьшаются, пока не получится число 1 или 2. Но из числа 2 за два шага также получается число 1.

Комментарий. Формулировка этой задачи похожа на известную открытую проблему — гипотезу Коллатца. С данным натуральным числом N проводится следующая операция: если N чётно, то оно делится на два, а если нечётно, то оно умножается на три и к результату прибавляется один (получается число $3N+1$), после чего процесс повторяется. Гипотеза состоит в том, что рано или поздно в результате таких операций получится единица. На данный момент с использованием распределенных вычислений гипотеза проверена до чисел порядка 10^{21}, в наиболее сложных случаях для получения единицы требуется порядка 3000 шагов.

4. *Ответ.* Да, верно.

Решение. Заметим, что в каждом матче разыгрывается 2 очка, за один круг проводится $20 \cdot 19/2 = 190$ матчей. Тогда за один круг будет разыграно 380 очков, а после окончания турнира каждая команда наберёт по 38 очков. Далее предположим, что требуемой пары команд не найдётся.

Назовём команду с наибольшим числом очков после первого круга *лидером*. На первом круге лидер набрал не менее 29 очков, так как в противном случае всеми командами набрано не более $28 + 27 + \ldots + 9 = 370$ очков, что меньше, чем общее число очков, разыгранное во всех матчах первого круга.

Следовательно, на первом круге лидер выиграл не менее 10 матчей. Тогда на втором круге он в матчах с этими командами также выиграет или сыграет вничью (в противном случае найдётся требуемая пара команд), а следовательно, в матчах второго круга он наберёт не менее 10 очков. Общая сумма очков лидера за два круга составит не менее 39 очков. Противоречие.

Комментарии. 1. В последней части решения фактически доказано, что в первом круге лидер набрал не более 28 очков. Рассуждая аналогично, можно доказать, что команда с наименьшим числом очков после первого круга набрала в нём не менее 10 очков. Тогда по принципу Дирихле найдутся две команды с одинаковым числом очков. Противоречие.

2. В случае нечетного числа команд утверждение задачи неверно. Опишем пример для $2n+1$ команд. Занумеруем их от 1 до $2n+1$. Пусть в первом круге во встречах команд, разность номеров которых больше n, побеждает команда с меньшим номером, а остальные игры заканчиваются вничью. Во втором круге наоборот, если разность номеров больше n, игра заканчивается вничью, а в остальных встречах побеждает команда с большим номером. Тогда команда с номером i в первом круге набирает $3n+1-i$ очков, а во втором $n-1+i$.

5. *Первое решение* (основано на работе участника олимпиады А. Маланьина). По замечательному свойству трапеции точка пересечения продолжений боковых сторон P, точка пересечения диагоналей O и середина основания AD точка M лежат на одной прямой (см. рис. 1). Пусть K, L — середины диагоналей AC и BD. Тогда $KL \parallel AD$, то есть $AKLD$ — тоже трапеция, и по её замечательному свойству точка O, точка пересечения её диагоналей H и точка M лежат на одной прямой. Следовательно, точки P, H и M лежат на одной прямой.

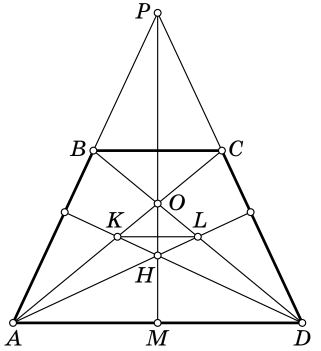


Рис. 1

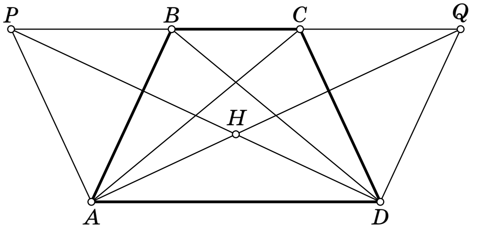


Рис. 2

Для завершения доказательства рассмотрим треугольник APD, в нём точка H — точка пересечения высот к сторонам AP и PD, следовательно, медиана PM проходит через его ортоцентр и является высотой. Таким образом, треугольник APD — равнобедренный, откуда немедленно следует, что и трапеция $ABCD$ — равнобокая.

Комментарий. Идею с ортоцентром можно реализовать и без использования замечательного свойства, рассмотрев треугольник KLM.

Второе решение. Пусть перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке H. Продлим их до пересечения с прямой BC в точках P и Q соответственно (см. рис. 2). Так как AQ пересекает BD в середине и $BQ \parallel AD$, то $ABQD$ — параллелограмм. Следовательно, $AB = DQ$ и $\angle AQD = \angle BAQ$. Аналогично $APCD$ — параллелограмм, и $CD = AP$ и $\angle APD = \angle PDC$. Отметим, что $\angle BAQ = \angle PDC$, как дополняющие вертикальные при вершине H до 90°, тогда и $\angle AQD = \angle APD$.

Значит, трапеция $APQD$ — вписанная, следовательно она равнобокая. Тогда $AB = DQ = AP = CD$, что и требовалось.

6. *Ответ.* 15.

Решение. Если Полина возьмёт себе все черви, все тузы, всех королей и всех дам, то Василиса не сможет набрать очки на тузе, короле и даме червей, т. е. наберёт не больше 15 очков.

Теперь докажем, что при любом выборе Полины Василиса может заработать не меньше 15 очков. Выложим карты в клетки таблицы 4×9 (в одном столбце карты одного достоинства, в одной строке — карты одной масти). Докажем, что если Полина закрасила черным 18 клеток, то Василиса может выделить не менее 15 непересекающихся *хороших* пар: в каждой паре две клетки разного цвета, находящиеся в одной строке или одном столбце. (Тогда Василиса на ход одной картой из пары сможет отвечать ходом второй карты из этой пары и заработать 15 очков.)

Назовём *типом* столбца количество чёрных клеток в нём. Сначала Василиса рассматривает столбцы типа 2 (если они есть). Каждый из них, очевидно, разбивается на две хорошие пары.

Далее Василиса рассматривает пары столбцов типа 0 и 4. Каждая такая пара, очевидно, разбивается на четыре хорошие пары клеток.

Далее Василиса рассматривает пары столбцов типа 1 и 3. Каждая такая пара тоже разбивается на четыре хорошие пары клеток (см. рис. 1).

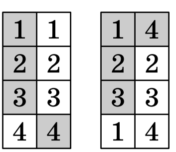


Рис. 1

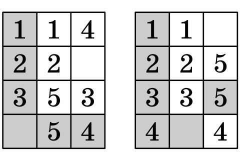


Рис. 2

Когда указанные пары столбцов закончатся, в силу симметрии можно считать, что «необработанными» останутся только столбцы типов 4 и 1. Если это a столбцов типа 4 и b столбцов типа 1, то $4a + b = 3b$, т. е. $b = 2a$. В тройке из столбца типа 4 и двух столбцов типа 1 Василиса сможет выделить не менее пяти хороших пар клеток (см. рис. 2).

Так как $3a = a + b \leqslant 9$, то на всей доске останется не более трёх нехороших пар, т. е. Василиса «потеряет» не больше 3 очков.

Комментарий. Рассмотрим следующий граф. Карты будут вершинами, а ребрами соединим пары карт одной масти или одного достоинства. Тогда игра заключается в том, что Полина делит этот граф на две равные доли (удаляя рёбра между вершинами, попавшими в одну долю), а Василиса ищет в нём наибольшее паросочетание. Помочь в этом может следующая теорема.

Теорема (Холл). Если в двудольном графе для любого натурального k любые k вершин одной из долей связаны по крайней мере с k вершинами другой, то граф разбивается на пары.

Задача Василисы — найти наибольший подграф, для которого условия теоремы Холла выполняются. Это можно сделать следующим образом. В одной из долей найдём наибольшую группу из k вершин, для которой нарушаются условия теоремы Холла, то есть эта группа связана менее чем с k вершинами из другой доли. Для этого необходимо, чтобы в другую долю попало не более $k-1$ карточек, у которых масть или достоинство совпадает с какой-то карточкой из этой группы. Тогда при условии, что $k \leqslant 9$, всего карточек, у которых совпадает масть или достоинство, не менее $9+3k$, из них в первой доле должно быть не менее $9+3k-(k-1)=10+2k$ карточек. Из неравенства $10+2k \leqslant 18$ получаем, что $k \leqslant 4$. Если $k \leqslant 3$, то эту группу вершин выкинем из графа. Для оставшегося графа выполняются условия теоремы Холла. Если $k=4$, то из такой группы (в силу того же неравенства) хотя бы одна вершина связана с вершиной из другой доли. Её и оставим, а оставшиеся три выкинем, и опять для оставшегося графа выполняются условия теоремы Холла. А если $k>9$, то достаточно проделать всё то же самое для другой доли, можно доказать, что там соответствующая группа будет содержать не более 9 вершин.

9 класс

1. *Ответ*. Да, существует.

Решение. Например, подходит число

$$1212343456567979808 0.$$

Поскольку $2020 = 101 \cdot 20$, а числа 101 и 20 взаимно простые, достаточно отдельно убедиться в делимости приведённого числа на 20 и на 101. Ясно, что на 20 оно делится.

Чтобы показать, что оно также делится на 101, можно заметить, что любое число вида $\overline{a0a00\ldots0}$ делится на 101, а наше число представляется в виде суммы чисел такого вида.

Комментарий. Перечислим и некоторые другие идеи, которые могут привести к решению.

Заметив, что $1111 \vdots 101$, можно прийти к таким ответам, как $11112222333\ldots99990000$.

Обнаружив, что $10^{10}+1 \vdots 101$, можно получить числа вида 12345679801234567980.

Также есть примеры, в которых каждая цифра повторяется по одному разу, такие как 1237548960. В подборе этих чисел может помочь признак делимости на 101, который аналогичен признаку делимости на 11: если разбить запись числа на блоки по две цифры (начиная с конца), то знакопеременная сумма полученных двузначных чисел должна быть кратна 101 (например, $12-37+54-89+60=0 \vdots 101$).

2. *Ответ*. Да, всегда.

Решение. Рассмотрим два треугольника, образованных такими шестью палочками. Упорядочим длины сторон первого треугольника и обозначим их через $A>B>C$; длины сторон второго аналогично обозначим через $a>b>c$; также без ограничения общности считаем, что самая длинная палочка оказалась в первом треугольнике, то есть $A>a$. Из неравенства треугольника следует, что $A<B+C$ и $a<b+c$.

Тогда возьмём в качестве сторон искомого треугольника A, $B+a$, $C+b+c$. Осталось проверить, что выполнены все три неравенства треугольника:

$$A<B+C<(B+a)+(C+b+c);$$
$$B+a<A+(b+c)<A+(C+b+c);$$
$$C+b+c<B+a+a<B+A+a=A+(B+a).$$

Комментарий. Существуют и другие способы получить требуемый треугольник. Например, если упорядочить длины всех шести палочек в порядке убывания $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6$, то можно составить треугольник со сторонами a_1, a_2+a_4, $a_3+a_5+a_6$.

3. *Ответ*. Да, смогут.

Решение. Докажем, что богатыри справятся с любым количеством голов Змея, если оно делится на 2 или на 3.

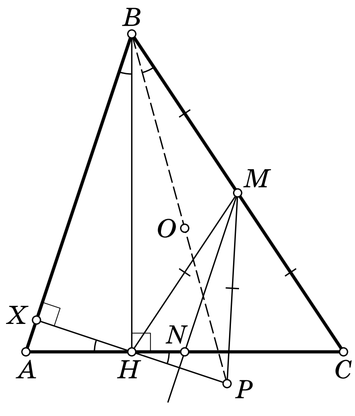
Для этого удостоверимся, что они всегда могут уменьшить количество голов так, чтобы оно снова делилось на 2 или на 3.

Если количество голов делится на 4, примем его за $4x$; тогда после удара Алеши Поповича их станет $3x - 3$, что будет делиться на 3.

Если количество голов делится на 3, примем его за $3x$; тогда после удара Добрыни Никитича их станет $2x - 2$, что будет делиться на 2.

Если же количество голов делится на 2, но не делится на 4, примем его за $4x - 2$; тогда после удара Ильи Муромца их станет $2x - 2$, что снова будет делиться на 2.

Действуя таким образом, мы сможем каждым ходом уменьшать количество голов, пока не избавимся от них совсем. Поскольку 20^{20} делится на 4, то с таким Змеем богатыри справятся.



4. *Первое решение*. Отметим середины M и N сторон BC и AC соответственно (см. рис.). Заметим, что треугольник BHC — прямоугольный, а точка M — середина его гипотенузы BC. Значит, $MB = MC = MH$. Поскольку точки H и P симметричны относительно прямой MN, то $MH = MP$. Следовательно, точки B, H, P, C лежат на одной окружности с центром в точке M. Отсюда $\angle PBC = \angle PHC$, так как эти углы опираются на одну дугу PC.

Обозначим точку пересечения прямых PH и AB через X. Заметим, что $PH \perp MN$ из-за симметрии точек H и P относительно прямой MN. Кроме того, $MN \parallel AB$ как средняя линия треугольника ABC. Таким образом, $PH \perp AB$. Отсюда следует, что $\angle PBC = \angle PHC = \angle AHX = 90^\circ - \angle BAC$.

С другой стороны, заметим, что если точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, то $\angle BOC = 2\angle BAC$ как центральный угол, и из суммы углов равнобедренного треугольника BOC получаем, что $\angle OBC = 90^\circ - \angle BAC$. Имеем $\angle OBC = \angle PBC$, а значит, точки B, O и P действительно лежат на одной прямой.

Второе решение. Воспользуемся теоремой о прямой Штейнера.

Прямая Штейнера. Точки, симметричные произвольной точке L описанной окружности треугольника MNK относительно его сторон, лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр (точку пересечения высот) треугольника MNK.

Несложно заметить, что точка H лежит на окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC (это окружность девяти точек треугольника ABC). По условию точка P симметрична точке H относительно средней линии, параллельной стороне AB. Заметим, что точка B симметрична точке H относительно средней линии, параллельной стороне AC. Получается, что прямая BP — это прямая Штейнера точки H относительно серединного треугольника (треугольника, образованного серединами сторон треугольника ABC). Тогда на этой прямой лежит ортоцентр серединного треугольника, который и является центром описанной окружности треугольника ABC.

5. *Первое решение.* Разобьём всех гостей на упорядоченные тройки; первому человеку из тройки наденем цилиндр с буквой А, второму — с буквой Б, третьему — с буквой В. Для этого поставим гостей в шеренгу (это можно сделать $(3n)!$ способами), первых трёх объединим в одну тройку, вторых трёх — в другую и т. д. Поскольку тройки можно переставлять внутри шеренги и получать то же самое разбиение на тройки, то каждое разбиение посчитано $n!$ раз. Таким образом, количество способов разбить гостей на упорядоченные тройки равно $(3n)!/n!$.

Теперь для того, чтобы разбить гостей на хороводы, достаточно разбить на хороводы первых n человек из своих троек (эти хороводы могут состоять из одного человека), а затем поставить после каждого человека его тройку, что можно сделать единственным образом. Докажем индукцией по n, что количество способов сделать это равно $n!$, что завершит решение.

База для $n = 1$ очевидна. Пусть утверждение верно для n, докажем его для $n + 1$. Расставим n человек в хороводы, это можно сделать $n!$ способами. В каждом разбиении на хороводы n человек есть ровно $n + 1$ место, куда можно поставить оставшегося человека: в каждом существующем хороводе из k человек таких мест ровно k, а ещё можно выделить этого человека в новый хоровод.

Замечание. Последнее рассуждение можно упростить, если заметить, что каждое разбиение на хороводы соответствует перестановке на множестве из n элементов, представленной в форме циклов, а количество перестановок, как известно, равно $n!$.

Второе решение. Занумеруем людей числами от 1 до $3n$. Есть как раз $(3n)!$ способов расставить этих людей в ряд, поэтому достаточно установить взаимно однозначное соответствие между такими расстановками и разбиениями на хороводы.

Возьмём любую расстановку, наденем всем цилиндры в порядке АБВАБВ...АБВ слева направо. Мысленно разделим людей подряд на n троек. В первый хоровод берём подряд всех людей от начала и до той тройки включительно, где стоит человек с номером 1 (и замыкаем в хоровод); во второй хоровод берём следующие тройки подряд до той включительно, где стоит человек с наименьшим из оставшихся номеров (и замыкаем в хоровод), и так далее.

Обратно, по набору хороводов легко восстановить расстановку: берём хоровод, где стоит человек 1, находим тройку АБВ, в которой он находится, «разрезаем» хоровод сразу за этой тройкой, вытягиваем в линию и ставим в начало расстановки. Далее берём человека с наименьшим номером из оставшихся, находим «его» хоровод, так же разрезаем и подсоединяем к расстановке и т. д.

6. *Ответ*. Да, мог.

Решение. Рассмотрим число N и последовательность, которую Глеб мог выписать на доску. Исходное число a обозначим через a_1, а все последующие через a_2, a_3, ..., a_n. Из условия имеем $N=a_kq_k+a_{k+1}$ при $1\leqslant k\leqslant n-1$, а также $N=a_nq_n$, где через q_k обозначены неполные частные от делений.

Мы хотим добиться выполнения неравенства

$$\frac{a_1}{N}+\frac{a_2}{N}+\ldots+\frac{a_n}{N}>100.$$

Как нетрудно видеть, $N<a_k(q_k+1)$, откуда $a_k/N>1/(q_k+1)$; кроме того, $a_n/N=1/q_n$. Следовательно, достаточно добиться выполнения неравенства

$$\frac{1}{q_1+1}+\frac{1}{q_2+1}+\ldots+\frac{1}{q_{n-1}+1}+\frac{1}{q_n}>100.$$

Покажем, что существуют такие изначальные числа N и a, что при всех $k<n$ выполнено $q_k=k$ и $q_n=n+1$. Если это удастся, то задача будет решена, так как неравенство

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>100,$$

как известно, верно при достаточно больших n (см. комментарий 1 в конце решения).

Итак, мы выбрали неполные частные, осталось найти подходящие N и a_k. Заметим, что равенство

$$a_k=\frac{N-a_{k+1}}{k}, \tag{1}$$

дополненное неравенством $a_k>a_{k+1}$, эквивалентно тому, что a_{k+1} является остатком от деления N на a_k с неполным частным k.

Сначала выберем $a_n=1$ и $N=n+1$. Далее определим все a_k по формуле (1), начиная с конца. Часть из полученных чисел, возможно, окажутся рациональными; однако, как легко видеть, если N и все a_k домножить на произвольное число, равенства (1) сохранятся, как и условие последнего деления $N=(n+1)a_n$. Просто домножим N и все a_k на их общий знаменатель, и они станут целыми. Осталось убедиться, что все a_k положительные и что $a_k>a_{k+1}$.

Для этого сначала докажем индукцией по k, что $0<a_k<$ $<N/k$. База $k=n$ очевидна, так как $a_n=N/(n+1)$. Пусть мы доказали для $k+1$, докажем для k. Так как $0<a_{k+1}<N/k$,

то $0 < N - a_{k+1} < N$, а заменяя $N - a_{k+1}$ на ka_k согласно (1), получаем искомое $0 < a_k < N/k$.

Осталось заметить, что при $k < n$

$$a_k = \frac{N - a_{k+1}}{k} > \frac{N - \dfrac{N}{k+1}}{k} = \frac{N}{k+1} > a_{k+1}.$$

Это завершает доказательство того, что полученная последовательность a_k искомая.

Комментарии. 1. Докажем, что для любого натурального d можно выбрать несколько первых членов последовательности $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, чтобы их сумма была больше d. Например, можно взять первые $2^{2d} - 1$ чисел. Действительно, их можно разбить на $2d$ частей: в первой части число $\frac{1}{2}$, во второй — числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$, в третьей — от $\frac{1}{5}$ до $\frac{1}{8}$ и т. д., то есть в m-й части числа от $\frac{1}{2^{m-1}+1}$ до $\frac{1}{2^m}$. Тогда для каждого m от 1 до $2d$ в m-ю часть попадут 2^{m-1} чисел, и их сумма будет не менее $\frac{1}{2^m} \cdot 2^{m-1} = \frac{1}{2}$, поэтому сумма всех чисел окажется не менее d.

2. Нетрудно видеть, что неполные частные q_k возрастают с ростом k, так как соотношение $a_k q_k + a_{k+1} = N = a_{k+1} q_{k+1} + a_{k+2}$ не может выполняться при $a_k > a_{k+1} > a_{k+2}$ и $q_k \geqslant q_{k+1}$. Аналогично можно показать, что самое последнее частное хотя бы на 2 больше предпоследнего. Отсюда ясно, что используемая выше последовательность q_k в некотором смысле «минимальна».

3. Можно показать, что в качестве общего знаменателя, на который мы домножали полученные в решении числа a_k, чтобы они стали целыми, можно было взять $n!$. Тогда нетрудно вычислить $N = (n+1)!$ и

$$a_k = (n+1)!\,(k-1)!\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n+1)!}\right).$$

10 класс

1. *Ответ.* $\dfrac{x^2 - 10x + 15}{11}$.

Решение. Пусть искомый многочлен $P(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда

$$\begin{aligned}
&P(x) + P(x+1) + \ldots + P(x+10) = \\
&\qquad = a(x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+10)^2) + \\
&\qquad\qquad + b(x + (x+1) + \ldots + (x+10)) + 11c = \\
&\qquad = a(11x^2 + (2+4+\ldots+20)x + (1 + 2^2 + \ldots + 10^2)) + \\
&\qquad\qquad + b(11x + 1 + 2 + \ldots + 10) + 11c = \\
&\qquad = 11ax^2 + 110ax + 385a + 11bx + 55b + 11c = \\
&\qquad = 11ax^2 + (110a + 11b)x + (385a + 55b + 11c).
\end{aligned}$$

Получаем равенство квадратных трехчленов

$$11ax^2 + (110a + 11b)x + (385a + 55b + 11c) \quad \text{и} \quad x^2.$$

Это равносильно равенству коэффициентов, то есть системе уравнений

$$\begin{cases} 11a = 1, \\ 110a + 11b = 0, \\ 385a + 55b + 11c = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $a = \frac{1}{11}$, $b = -\frac{10}{11}$, $c = \frac{15}{11}$.

2. *Решение.* Обозначим количество фильмов за n. Представим, что человек купил билеты на те фильмы, которые ему понравились. Тогда всего продано $8n$ билетов, причем поскольку мужчинам и женщинам продано одинаковое количество билетов, то $4n$ билетов купили мужчины и $4n$ — женщины. Тогда фильмов, на которых хотя бы 7 из 8 билетов продано женщинам, не более чем $\frac{4n}{7}$, значит, других хотя бы $n - \frac{4n}{7} = \frac{3}{7}n$, а это и есть фильмы, понравившиеся хотя бы 2 мужчинам.

3. *Ответ*. Нет.

Решение. Допустим, такой 19-угольник существует.

Рассмотрим градусные меры 19 центральных углов, опирающихся на стороны: α_1, α_2, ..., α_{19}. Угол между $(i+1)$-й и i-й сторонами, измеренный в градусах, равен

$$\frac{360 - \alpha_i - \alpha_{i+1}}{2},$$

а значит, это число целое для любого $1 \leqslant i \leqslant 19$ (для удобства записи считаем, что $\alpha_{20} = \alpha_1$). Это означает, что $\alpha_i + \alpha_{i+1}$ — целое четное число.

Тогда $\alpha_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{19}) - (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_4 + \alpha_5) - \ldots - (\alpha_{18} + \alpha_{19}) = 360 - (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_4 + \alpha_5) - \ldots - (\alpha_{18} + \alpha_{19})$ тоже целое четное число. Аналогично можно доказать, что каждое α_i — целое четное число.

Поскольку все стороны в 19-угольнике разные, то и центральные углы, опирающиеся на них, должны быть разными, то есть $\alpha_i \neq \alpha_j$.

Тогда $360 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{19} \geqslant 2 + 4 + \ldots + 38 = \frac{19 \cdot (2+38)}{2} = 380$. Противоречие.

4. *Решение*. Заметим, что OA касается описанной окружности треугольника AXY, так как

$$\angle BAO = 90^\circ - \angle C = \angle MYC = \angle XYA.$$

Пусть F — точка на окружности, описанной около ABC, такая что $AF \perp BC$. Ясно, что

$$\angle AEF = \angle AEB + \angle BEF = \angle ACB + \angle BAF = \\ = \angle ACD + \angle DAC = \angle ADM = \angle AEM.$$

Получаем, что E, M и F лежат на одной прямой. Кроме того, $\angle MEC = \angle FEC = \angle FAC = \angle MYC$, что значит, что E, Y, M и C лежат на одной окружности. Далее,

$$\angle AEY = \angle AEC - \angle YEC = 180^\circ - \angle ABC - \angle YMC = \\ = 90^\circ - \angle ABC = \angle AXY,$$

т. е. E лежит на описанной окружности треугольника AXY. Тогда OE — касательная, так как $OE = OA$ и OA — касательная к окружности AXY.

5. *Решение*. Поскольку $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$, то сумма квадратов всех чисел на доске увеличивается в два раза с каждым ходом. Из формулы

$$(n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \\ + (n+3)^2 + (n+4)^2 = 8n^2 + 8n + 44$$

ясно, что сумма квадратов 8 последовательных целых чисел даёт остаток 4 при делении на 8. Значит, сумма квадратов 1000 последовательных целых чисел тоже даёт остаток 4 при делении на 8.

Таким образом, после первого хода сумма квадратов чисел на доске всегда будет делиться на 8, и, следовательно, на доске никогда больше не появятся 1000 последовательных целых чисел.

Замечание. Число 1000 в условии этой задачи можно заменить на произвольное чётное число. Доказательство основано на том, что сумма квадратов 2^k последовательных целых чисел даёт остаток 2^{k-1} при делении на 2^k.

6. *Ответ.* При любых k.

Решение. Рассмотрим множество клеток A_1, которое является вертикальным отрезком длины k. Заметим, что каждый столбец пересекает A_1 по 0 или k клеткам, а каждая строка или диагональ — по 0 или 1 клетке.

Рассмотрим множество A_2, которое состоит из k копий отрезка A_1, каждая из которых получается из предыдущей переносом на вектор $(k, 0)$. Таким образом, A_2 состоит из k отрезков длины k, разделённых $k-1$ пустыми столбцами. Заметим, что любая строка или столбец пересекают A_2 по 0 или k клеткам, а каждая диагональ — по 0 или 1 клетке (так как никакая диагональ не пересекает две копии A_1 в A_2).

Множество A_3 состоит из k копий A_2, каждая из которых получается переносом предыдущей на вектор (k^2, k^2). Любая строка, столбец или диагональ, параллельная вектору $(1, -1)$, пересекает не более одной копии A_2 в A_3, а любая диагональ, параллельная вектору $(1, 1)$, либо не пересекает ни одной, либо пересекает все копии A_2 в A_3. Следовательно, строки, столбцы и диагонали, параллельные вектору $(1, 1)$, пересекают 0 или k клеток из A_3, а диагонали, параллельные вектору $(1, -1)$ пересекают 0 или 1 клетку.

Аналогично построим множество A_4: оно состоит из k копий A_3, каждая из которых получается переносом на вектор $(k^3, -k^3)$ из предыдущей. Любая строка, столбец или диагональ, параллельная вектору $(1, 1)$, пересекает не более одной копии A_3 в A_4, а любая диагональ, параллельная вектору $(1, -1)$, либо не пересекает ни одной, либо пересекает все копии. Следовательно, любая строка, столбец или диагональ пересекает A_4 по 0 или k клеткам.

Замечание. Получившийся пример можно рассматривать как проекцию узлов 4-мерного куба $k \times k \times k \times k$ на плоскость.

11 класс, первый день

1. *Решение.* Например, подходит число

$$98987676545431312020$$

(существуют и другие примеры). Поскольку $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$, число делится на 2020, если оно делится на 4, 5 и 101. Приведённое число оканчивается на 20, следовательно, делится на 4 и 5. Числа вида $\overline{abab}$ равны $101 \cdot \overline{ab}$, а поскольку приведённое число раскладывается в сумму чисел вида $\overline{abab} \cdot 10^k$, оно делится на 101.

2. *Ответ.* Нет, не существует.

Решение. Покажем, что любая функция, удовлетворяющая условиям, имеет период 3. Действительно, из уравнения следует, что f не принимает значения 1. В самом деле, если $f(x) = 1$, то $f(x+1) = f(x+1) + 1$, что невозможно. Следовательно, $f(x+1) = \frac{1}{1-f(x)}$, поэтому, применяя последовательно это равенство, получаем

$$f(x+3) = \frac{1}{1-f(x+2)} = \frac{f(x+1)-1}{f(x+1)} = 1 - \frac{1}{f(x+1)} = f(x).$$

3. См. решение задачи 4 для 9 класса.

4. *Ответ.* 23.

Решение. Каждый двухклеточный прямоугольник содержит чёрную и белую клетки, поэтому если вырезано 9 белых клеток, то больше $32 - 9 = 23$ прямоугольников вырезать не получится.

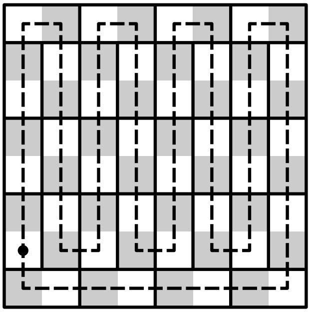


Рис. 1

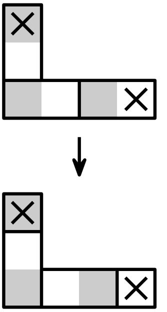


Рис. 2

Разрежем доску так, как показано на рис. 1. Вырезанные из доски клетки при разрезании «испортят» не более 10 прямоугольников. Следовательно, у нас уже есть по крайней мере 22 целых прямоугольника. Покажем, как увеличить количество целых прямоугольников на 1. Рассмотрим изображённую на рис. 1 замкнутую цепочку клеток (по цепи идём от клетки a2 вверх). Поскольку вырезаны как белые, так и чёрные клетки, в этой цепи обязательно есть вырезанная белая клетка, за которой идёт вырезанная чёрная клетка. Если эти клетки соседние, то они «портят» только один прямоугольник, значит, при таком разрезании будет не менее 23 целых прямоугольников. В противном случае, если между ними есть ещё клетки, разделим доску между ними так, чтобы новый прямоугольник начинался сразу после вырезанной белой клетки (см. рис. 2). Тогда количество целых прямоугольников увеличится на 1. Следовательно, опять будет не менее 23 целых прямоугольников.

5. *Ответ.* Да, существует.

Первое решение. Покажем, что если у тетраэдра два скрещивающихся ребра перпендикулярны и имеют длины a и b, то существует сечение тетраэдра, которое является квадратом со стороной $ab/(a+b)$.

Разделим четыре остальных ребра тетраэдра в отношении $k:(1-k)$, считая от концов ребра длины b (см. рис. 1). Соединив точки деления, получим сечение, которое является параллелограммом со сторонами длины ka и $(1-k)b$ в силу подобия треугольников. На самом деле, это сечение является прямоугольником, поскольку стороны параллелограмма параллельны перпендикулярным рёбрам тетраэдра по обратной теореме Фалеса и, следовательно, тоже перпендикулярны. Осталось подобрать k таким образом, чтобы стороны прямоугольника были равны, т. е. $ka=(1-k)b$, откуда $k=b/(a+b)$. При этом сторона получившегося квадрата будет равна $ka=ab/(a+b)$.

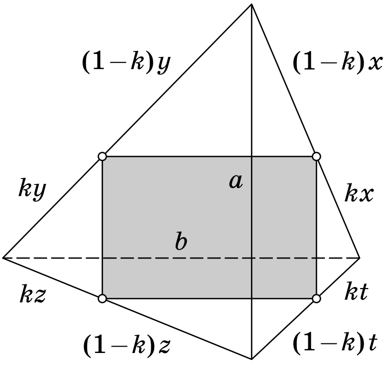


Рис. 1

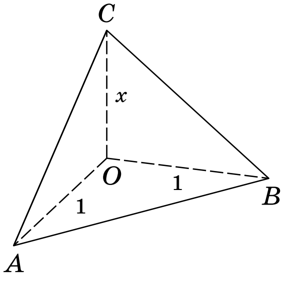


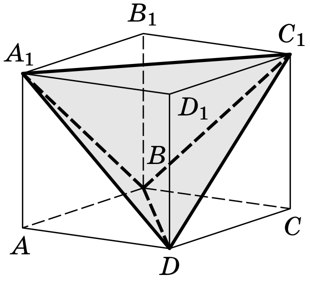
Рис. 2

Рассмотрим теперь три взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O. Отложим на этих прямых от точки O отрезки $OA=1$, $OB=1$, $OC=x$, где x — некоторый параметр (см. рис. 2). В тетраэдре $OABC$ есть три пары скрещивающихся перпендикулярных рёбер: ребро OC перпендикулярно плоскости OAB, следовательно, перпендикулярно ребру AB, лежащему в этой плоскости; аналогично рёбра OA и OB перпендикулярны рёбрам BC и AC соответственно. Покажем, что можно подобрать параметр $x>0$ так, что сторона одного из построенных квадратных сечений будет в 100 раз больше стороны другого. Рассмотрим пару перпендикулярных скрещивающихся рёбер CO и AB длин x и $\sqrt{2}$. По доказанному утверждению длина стороны соответствующего квадратного сечения равна $c_1(x)=x\sqrt{2}/(x+\sqrt{2})$. Теперь возьмём пару перпендикулярных скрещивающихся рёбер OA и CB длины 1 и $\sqrt{x^2+1}$. Сторона соответствующего квадратного сечения будет равна $c_2(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{c_2(x)}{c_1(x)}$. Она непрерывна при $x>0$ и $f(1)=1$. Далее, $c_2(x)>\dfrac{1}{2}$, поэтому $f(x)>\dfrac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}x}>\dfrac{1}{2x}$

(при $x > 0$), т. е. $f(1/200) > 100$. По теореме о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке $[1/200; 1]$ существует такое x^*, что $f(x^*) = 100$. Для найденного x^* возьмём получившийся тетраэдр $OABC$. Искомый тетраэдр подобен $OABC$ с коэффициентом подобия $1/c_1(x^*)$.

Второе решение. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, боковые грани которого являются квадратами с диагоналями, равными 200, а верхняя и нижняя грани — ромбы. Рассмотрим тетраэдр A_1BDC_1 (см. рис.). Поскольку диагонали граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны, а диагонали его противоположных граней попарно параллельны, пары скрещивающихся рёбер тетраэдра перпендикулярны. Согласно первому решению у такого тетраэдра есть три квадратных сечения, параллельных парам его скрещивающихся рёбер. Сторона квадратного сечения тетраэдра, параллельного рёбрам A_1B и C_1D, будет равна 100. Покажем, что можно выбрать ромб в верхнем и нижнем основании параллелепипеда таким образом, что квадратное сечение тетраэдра, параллельное рёбрам A_1C_1 и BD, будет иметь сторону длины 1. Спроектируем параллелепипед на верхнюю грань, при этом рёбра тетраэдра A_1BDC_1 спроектируются на стороны ромба $A_1B_1C_1D_1$, а квадрат сечения тетраэдра, параллельного прямым BD и A_1C_1, спроектируется в равный ему квадрат, вершины которого будут лежать на сторонах ромба $A_1B_1C_1D_1$. Сторона вписанного в ромб квадрата не превосходит меньшей диагонали ромба, поэтому, устремляя длину меньшей диагонали ромба к 0, получим квадрат со стороной, сколь угодно близкой к нулю. В тоже время, если в качестве ромба взять квадрат, то сторона вписанного квадрата будет равна 100. В силу непрерывности изменения длины стороны вписанного квадрата найдётся такой ромб, что сторона вписанного в него квадрата равна 1, что и требовалось.



6. *Решение.* Рассмотрим набор из 2^k подряд идущих чисел, квадраты этих чисел имеют тот же набор остатков при делении на 2^k, что и набор чисел 1^2, 2^2, 3^2, ..., $(2^k)^2$. Поскольку

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(2^k)^2 = \\ = \frac{2^k(2^k+1)(2\cdot 2^k+1)}{6} = 2^{k-1}\frac{(2^k+1)(2\cdot 2^k+1)}{3},$$

сумма квадратов 2^k подряд идущих чисел делится на 2^{k-1}, но не делится на 2^k.

Представим число $2n$ в виде $2^k\cdot l$, где l нечётно. Тогда сумма $2n$ последовательных квадратов разбивается на l сумм вида $2^{k-1}t_i$, где все t_i нечётны, поэтому вся сумма также делится на 2^{k-1}, но не делится на 2^k. Следовательно, наибольшая степень двойки, на которую делится сумма квадратов $2n$ последовательных чисел, зависит только от n, но не от самих чисел.

В то же время сумма квадратов имеющихся чисел после замены удваивается. Действительно, заменив числа a и b на $a-b$ и $a+b$, получим: $(a-b)^2+(a+b)^2=2a^2+2b^2=2(a^2+b^2)$. Таким образом, снова получить набор из $2n$ подряд идущих чисел нельзя.