МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

46

Московская городская олимпиада школьников по математике (1983 год).

Заключительный тур.

10 класс.

1. Пусть $A_1; B_1; C_1$ - точки, в которых окружность, вписанная в $\triangle ABC$, касается сторон BC, AC, AB соответственно. Дано, что $|AA_1|=|BB_1|=|CC_1|$. Доказать, что $\triangle ABC$ - правильный.
2. Доказать, что 4^m-4^n делится на 3^{k+1} тогда и только тогда, когда $m-n$ делится на 3^k. Решить задачу а) при $k=1,2,3$ б) при любом k (m,n,k - натуральные).
3. На доске после занятия кружка осталась запись: "Вычислить
$$t(0)-t\left(\frac{\pi}{5}\right)+t\left(\frac{2\pi}{5}\right)-t\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\dots+t\left(\frac{8\pi}{5}\right)-t\left(\frac{9\pi}{5}\right),$$
где $t(x)=\cos 5x+\dots\cos 4x+\dots\cos 3x+\dots\cos 2x+\dots\cos x+\dots$."
Увидев её, студент мех-мата сказал товарищу, что он может вычислить эту сумму даже не зная значений стёртых с доски коэффициентов. Не ошибается ли он?
4. В пространстве выбрано 8 точек, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, и проведено 17 отрезков, у каждого из которых оба конца лежат в упомянутых точках. а) Доказать, что отрезки образуют хотя бы один треугольник; б) доказать, что треугольников на самом деле не меньше 4[x].
5. За круглым столом сидят 13 рыцарей из S кланов $(1\leq s<13)$ и каждый держит золотой или серебряный кубок с элем, причем золотых кубков тоже S штук. Король Артур повелел каждому рыцарю передать свой кубок соседу справа и повторять это до тех пор, пока какие-нибудь два рыцаря из одного клана не получат оба золотые кубки. Доказать, что желание короля всегда будет исполнено (все рыцари неподвижно сидят лицом к столу и передают кубки так, что каждый получает кубок от левого соседа и передаёт свой кубок правому соседу одновременно).