87

8 класс.

1. Доказать, что если $a > b > 0$ и $\frac{x}{a} < \frac{y}{b}$, то справедливо неравенство $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) > \frac{x+y}{a+b}$.

2. Школьник хочет вырезать из квадрата размером $2n \times 2n$ наибольшее количество прямоугольников размером $1 \times (n+1)$. Каково это количество, если: а) $n < 3$; б) $n > 3$; в) $n = 3$?

3. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Доказать, что каждая команда учащихся будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса.

4. В пятиугольнике $ABCDE$ углы при вершинах B и D – прямые, $\angle BCA = \angle DCE$, а точка M – середина стороны AE. Доказать, что $MB = MD$.

5. Можно ли выбрать некоторые натуральные числа так, чтобы при любом натуральном значении n хотя бы одно из чисел $n, n+50$ было выбрано и хотя бы одно из чисел $n, n+1987$ не было выбрано?

87

10 класс.

1. а) Доказать, что из трех положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа x и y, что $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1$.

б) Верно ли, что указанные два числа можно выбрать из любых четырех чисел?

2. Углы, образованные сторонами правильного треугольника с некоторой плоскостью, равны α, β и γ. Доказать, что одно из чисел $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ равно сумме двух других.

3. На клетчатой бумаге закрашены 17 единичных клеток. Доказать, что их можно покрыть прямоугольниками, сумма периметров которых не превосходит 100, причем расстояние между любыми точками разных прямоугольников не меньше $\sqrt{2}$.

4. Можно ли разбить множество целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого значения n числа $n, n-50, n+1987$ принадлежали трем разным множествам?

5. В некотором царстве, территория которого имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решает созвать всех жителей к 7 ч вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень посылает с поручением гонца, который может передать любое указание любому другому жителю, который в свою очередь может передать любое указание любому другому жителю и т.д. Каждый житель до поступления указания находится в известном месте (у себя дома) и может передвигаться со скоростью 3 км/ч в любом направлении (по прямой). Доказать, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели прийти к началу бала.