Объединенная межвузовская математическая олимпиада **02.02.2020**

I вариант

Задача 1. Дан многочлен $F(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 100x^{99}$. Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен $G(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \ldots + g_{99}x^{99}$ такой, что для всех натуральных чисел $k \geqslant 2$ разность $F(k) - G(k)$ не кратна 100?

Задача 2. При каком наименьшем n существуют n чисел из интервала $(-1; 1)$, таких, что их сумма равна 0, а сумма их квадратов равна 30?

Задача 3. Пункты A и B, находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта A из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее — 20 км/ч, а скорость пешехода — 6 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке E. Через точку E проведена касательная к окружности, которая пересекает катет CB в точке D. Найдите длину DB, если $AE = 6$, а $BE = 2$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 12x^2 + 4xy + 3y^2 + 16x = -6 \\ 4x^2 - 12xy + y^2 + 12x - 10y = -7 \end{cases}.$$

Задача 6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$4\sin(3x) + 13\cos(3x) = 8\sin(x) + 11\cos(x).$$

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 11x^2 + ax - 8 = 0$ имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

Задача 8. Про тетраэдр $PQRS$ известно, что $PQ = 4$, $SR = 6$, $\angle QRS = \angle PSR = 50^\circ$, $\angle QSR = \angle PRS = 40^\circ$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек P, Q, R, S не меньше 6π. Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

Задача 9. Про функции $p(x)$ и $q(x)$ известно, что $p(0) = q(0) > 0$ и $p'(x)\sqrt{q'(x)} = \sqrt{2}$ для любого $x \in [0; 1]$. Докажите, что если $x \in [0; 1]$, то $p(x) + 2q(x) > 3x$.

Задача 10. Пете необходимо спаять электрическую схему, состоящую из 10 чипов, соединённых между собой проводами (один провод соединяет два различных чипа; два чипа может соединять не более одного провода), при этом из одного чипа должно выходить 9 проводов, из одного — 8, из одного — 7, из двух — по 5, из трёх — по 3, из одного — 2, из одного — 1. Может ли Петя спаять такую схему?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **02.02.2020**

II вариант

Задача 1. Дан многочлен $P(x) = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+101x^{100}$. Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен $Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \ldots + q_{100}x^{100}$ такой, что для всех натуральных чисел $k \geqslant 2$ разность $P(k) - Q(k)$ не кратна 2020?

Задача 2. При каком наименьшем n существуют n чисел из интервала $(-1; 1)$, таких, что их сумма равна 0, а сумма их квадратов равна 42?

Задача 3. Пункты A и B, находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта A из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее — 20 км/ч, а скорость пешехода — 7 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике PQR на катете PR как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу PQ в точке T. Через точку T проведена касательная к окружности, которая пересекает катет RQ в точке S. Найдите длину SQ, если $PT = 15$, а $QT = 5$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy + 12y^2 + 16y = -6 \\ x^2 - 12xy + 4y^2 - 10x + 12y = -7 \end{cases}.$$

Задача 6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin(x) + 8\cos(x) = 4\sin(8x) + 7\cos(8x).$$

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 14x^2 + ax - 27 = 0$ имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

Задача 8. Про тетраэдр $XYZT$ известно, что $XY = 6$, $TZ = 8$, $\angle YZT = \angle XTZ = 25°$, $\angle YTZ = \angle XZT = 65°$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек X, Y, Z, T не меньше 8π. Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

Задача 9. Про функции $s(x)$ и $t(x)$ известно, что $s(0) = t(0) > 0$ и $s'(x)\sqrt{t'(x)} = 5$ для любого $x \in [0; 1]$. Докажите, что если $x \in [0; 1]$, то $2s(x) + 5t(x) > 15x$.

Задача 10. В кружок ходит 10 человек, некоторые из которых между собой дружат. Может ли так быть, что в этом кружке один участник дружит с 9 другими, один участник — с 7 другими, один участник — с 6 другими, два участника — с 5 другими каждый, два участника — с 3 другими каждый, один участник — с 2 другими, два участника — с 1 другим каждый?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **02.02.2020**

III вариант

Задача 1. Дан многочлен $S(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots + 201x^{100}$. Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен $T(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \ldots + t_{100}x^{100}$ такой, что для всех натуральных чисел $k \geqslant 2$ разность $S(k) - T(k)$ не кратна 2020?

Задача 2. При каком наименьшем n существуют n чисел из интервала $(-1; 1)$, таких, что их сумма равна 0, а сумма их квадратов равна 36?

Задача 3. Пункты A и B, находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта A из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее — 20 км/ч, а скорость пешехода — 6,5 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике XYZ на катете XZ как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу XY в точке W. Через точку W проведена касательная к окружности, которая пересекает катет ZY в точке V. Найдите длину VY, если $XW = 12$, а $YW = 4$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 16x^2 + 8xy + 4y^2 + 20x + 2y = -7 \\ 8x^2 - 16xy + 2y^2 + 20x - 14y = -11 \end{cases}.$$

Задача 6. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$2\sin(6x) + 9\cos(6x) = 6\sin(2x) + 7\cos(2x).$$

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 15x^2 + ax - 64 = 0$ имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

Задача 8. Про тетраэдр $KLMN$ известно, что $KL = 5$, $NM = 6$, $\angle LMN = \angle KNM = 35^\circ$, $\angle LNM = \angle KMN = 55^\circ$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек K, L, M, N не больше 6π. Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

Задача 9. Про функции $a(x)$ и $b(x)$ известно, что $a(0) = b(0) > 0$ и $a'(x)\sqrt{b'(x)} = 2$ для любого $x \in [0; 1]$. Докажите, что если $x \in [0; 1]$, то $a(x) + 8b(x) > 6x$.

Задача 10. В отряде 10 человек. Каждый день из них нужно выбирать двух дежурных (при этом одна и та же пара не может дежурить дважды). Могло ли так оказаться, что через несколько дней один человек дежурил 9 раз, двое — по 8 раз, двое — по 5 раз, четверо — по 3 раза, один — 1 раз?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **02.02.2020**

IV вариант

Задача 1. Дан многочлен $A(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots + 199x^{99}$. Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_{99}x^{99}$ такой, что для всех натуральных чисел $k \geqslant 2$ разность $A(k) - B(k)$ не кратна 199?

Задача 2. При каком наименьшем n существуют n чисел из интервала $(-1; 1)$, таких, что их сумма равна 0, а сумма их квадратов равна 40?

Задача 3. Пункты A и B, находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта A из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее — 20 км/ч, а скорость пешехода — 5,5 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике KLM на катете KM как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу KL в точке G. Через точку G проведена касательная к окружности, которая пересекает катет ML в точке F. Найдите длину FL, если $KG = 5$, а $LG = 4$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^2 + 8xy + 16y^2 + 2x + 20y = -7 \\ 2x^2 - 16xy + 8y^2 - 14x + 20y = -11 \end{array} \right. .$$

Задача 6. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$14\sin(3x) - 3\cos(3x) = 13\sin(2x) - 6\cos(2x).$$

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + 16x^2 + ax + 64 = 0$ имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

Задача 8. Про тетраэдр $ABCD$ известно, что $AB = 7$, $DC = 8$, $\angle BCD = \angle ADC = 75^\circ$, $\angle BDC = \angle ACD = 15^\circ$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек A, B, C, D не больше 8π. Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

Задача 9. Про функции $f(x)$ и $g(x)$ известно, что $f(0) = g(0) > 0$ и $f'(x)\sqrt{g'(x)} = 3$ для любого $x \in [0; 1]$. Докажите, что если $x \in [0; 1]$, то $2f(x) + 3g(x) > 9x$.

Задача 10. В стране 10 городов, между некоторыми из которых проложена дорога (каждая дорога соединяет ровно два города, между двумя городами есть не более одной дороги, сменить одну дорогу на другую можно только в каком-то городе). Может ли так быть, что из одного города выходит 9 дорог, из одного — 8, из двух — по 7, из двух — по 6, из двух — по 4, из одного — 2, из одного — 1?
