Вариант I

Задача 1. Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых шести её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член d_1 удовлетворяет неравенству $d_1 \geqslant \frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать d_1?

Ответ: 5/9

Решение. Пусть d_n — n-й член прогрессии, d — разность прогрессии, $S_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ — сумма первых n членов прогрессии.

Выразим d_1 через S_3 и S_6. Заметим, что $S_3 = 3d_1 + 3d$, $S_6 = 6d_1 + 15d$, откуда $d_1 = \frac{5S_3 - S_6}{9}$. По условию $\frac{5S_3 - S_6}{9} \geqslant \frac{1}{2}$. Отсюда $5S_3 - S_6 \geqslant \frac{9}{2}$. Так как S_3 и S_6 по условию — натуральные числа, то наименьшее значение величины $5S_3 - S_6$ равно 5 (оно достигается, например, при $S_3 = 2$, $S_6 = 5$). Поэтому $\min d_1 = \frac{5}{9}$.

Задача 2. Даша написала на доске числа 9, 10, 11, …, 22, а потом стёрла одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

Ответ: 203.

Решение. Сумма чисел от 9 до 22 равна 217. Если стереть хотя бы одно число, то сумма оставшихся чисел не превосходит 208. Давайте последовательно перебирать варианты:

- если сумма 208, то стереть Даша могла только число 9; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 104:

$$22 + 21 + 20 + 19 + 12 + 10 = 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 11.$$

- если сумма 207, то стереть Даша могла только число 10; тогда оставшиеся числа можно разбить на три групп с суммой 69:

$$22 + 21 + 17 + 9 = 20 + 19 + 18 + 12 = 16 + 15 + 14 + 13 + 11.$$

- если сумма 206, то стереть Даша могла только число 11; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 103:

$$22 + 21 + 20 + 19 + 12 + 9 = 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 10.$$

- если сумма 205, то стереть Даша могла только число 12; тогда оставшиеся числа можно разбить на пять группы с суммой 41:

$$22 + 19 = 21 + 20 = 18 + 13 + 10 = 17 + 15 + 9 = 16 + 14 + 11.$$

- если сумма 204, то стереть Даша могла только число 13; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 102:

$$22 + 21 + 20 + 19 + 11 + 9 = 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 12 + 10.$$

- если Даша стёрла число 14, то на доске остались числа с суммой 203: их можно было бы разбить или на 7 групп с суммой 29, или на 29 групп с суммой 7, или на 203 группы с суммой 1; в какую-то группу попадёт число 22; поскольку вариантов с суммой 22 у нас нет, то в эту группу попадёт ещё хотя бы одно число; поэтому сумма в этой группе будет хотя бы 31; значит, в этом случае разбить числа на групы с одинаковой суммой не получится.

Задача 3. В хирургическом отделениии 4 операционных: I, II, III и IV. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной I, через некоторое время — в операционной II, ещё через некоторое время — в III, а потом и в IV.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 2 часа 32 минуты. За 30 минут до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 52 минуты, а ещё за 10 минут до этого — 30 минут. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

Ответ: Можно определить только продолжительность операции в операционной IV.

Решение. Для начала докажем, что продолжительности операций в операционных I, II и III нельзя определить однозначно. Действительно, несложно проверить, что если продолжительности операций равны 70, 39, 33, 10 или 56, 54, 32, 10 минут, то все условия задачи выполняются. Однако в этих двух вариантах продолжительности операций в операционных I, II и III различны.

Теперь докажем, что продолжительность операции в операционной IV можно однозначно восстановить. Для этого давайте заметим, что суммарная продолжительность операций за 40 и за 30 минут до конца операций выросла на 22 минуты. Это значит, что за 30 минут до конца операции в операционных I, II и III уже шли, иначе суммарная продолжительность увеличилась бы не более чем на 20 минут. Тогда к концу всех операций их суммарная продолжительность составляет $52+30\cdot 3 = 142$ минуты. Значит операция в операционной IV длилась $152 - 142 = 10$ минут.

Комментарий. Продолжительности операций могут быть равны в минутах $(70; 36+s; 36-s; 10)$, где $s \in [0;4]$ или $(55+t; 55-t; 32; 10)$, где $t \in [0;15]$.

Задача 4. В треугольнике ABC длины сторон равны 4, 5 и $\sqrt{17}$. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек X внутри треугольника ABC, для которых выполняется условие $XA^2 + XB^2 + XC^2 \leqslant 21$.

Ответ: $5\pi/9$.

Решение. Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\rho^2 = 21$.

Пусть G – точка пересечения медиан треугольника ABC. Представим

$$\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GX},\ \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GX},\ \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GX},$$

тогда

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 - 2\cdot\overrightarrow{GX}\cdot(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + 3\cdot GX^2.$$

Поскольку G – центр тяжести треугольника ABC, то

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0,$$

и $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Таким образом,

$$\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3\cdot GX^2 \leqslant \rho^2,$$

или

$$GX^2 \leqslant \frac{1}{9}\cdot(3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

Итак, геометрическим местом точек X, удовлетворяющих поставленному условию, является круг радиуса $\frac{1}{3}\sqrt{3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2}$ с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC.

Этот круг принадлежит треугольнику, если его радиус не больше, чем одна треть наименьшей из высот ΔABC:

$$\frac{1}{3}\sqrt{3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2} \leqslant \frac{2S_{\Delta ABC}}{3\max\{a,\, b, c\}}.$$

Значит, при выполнении условия

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} < \rho^2 \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{S_{\Delta ABC}}{\max\{a,\, b, c\}}\right)^2 \qquad (*)$$

искомая площадь равна $S = \frac{\pi}{9} \cdot (3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2)$.

По формуле Герона найдем площадь треугольника:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{(9+\sqrt{17})(9-\sqrt{17})(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)} = 8.$$

Вычислим

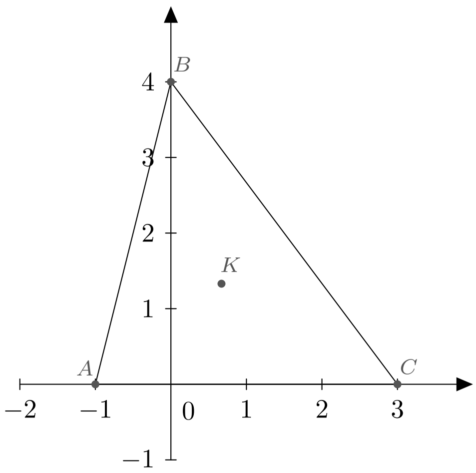
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} = \frac{58}{3},\ \frac{S_{\Delta ABC}}{\max\{a,\, b, c\}} = \frac{8}{5}.$$

Поскольку $\rho^2 = 21$, условие $(*)$ выполняется:

$$\frac{58}{3} < 21 \leqslant \frac{58}{3} + \frac{256}{75} = \frac{1706}{75}.$$

Значит, ответ: $S = \frac{\pi}{9} \cdot (63 - 58) = \frac{5\pi}{9}$.

Другое решение. Высота треугольника, проведенная к стороне длины 4, равна 4. Основание высоты делит эту сторону на отрезки, равные 1 и 3. Введем систему координат так, как показано на рисунке. Тогда $A(-1;\, 0)$, $B(0;\, 4)$, $C(3;\, 0)$.



$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = (x+1)^2 + y^2 + x^2 + (y-4)^2 + (x-3)^2 + y^2 = 3x^2 + 3y^2 - 4x - 8y + 26 \leqslant 21.$$

Перепишем неравенство так:

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 \leqslant \frac{5}{9}.$$

Оно определяет круг радиуса $R = \frac{\sqrt{5}}{3}$ с центром в точке $K(2/3;\, 4/3)$. Покажем, что все точки этого круга принадлежат треугольнику ABC. Для этого найдем расстояния от точки K до сторон треугольника. Уравнение стороны AB: $4x - y + 4 = 0$, расстояние до неё равно $d_1 = \frac{|4\cdot(2/3) - 4/3 + 4|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{16}{3\sqrt{17}}$. Уравнение стороны BC: $4x + 3y - 12 = 0$, расстояние $d_2 = \frac{|4\cdot(2/3) + 3\cdot(4/3) - 12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{16}{15}$. И расстояние от точки K до стороны AC равно, очевидно, $d_3 = \frac{4}{3}$. Наименьшее из расстояний d_2, тем не менее, больше, чем радиус круга R: $\frac{16}{15} > \frac{\sqrt{5}}{3}$. Поэтому весь круг и является той фигурой, площадь которой требуется найти, откуда $S = \pi R^2 = \frac{5\pi}{9}$.

Задача 5. Решите уравнение: $4(x^4 + 3x^2 + 3)(y^4 - 7y^2 + 14) = 21$.

Ответ: $\left(0; \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

Решение. Заметим, что $x^4 + 3x^2 + 3 \geqslant 3$ для каждого x, а $y^4 - 7y^2 + 14 = (y^2 - 7/2)^2 + 7/4 \geqslant 7/4$ для каждого y. Поэтому левая часть уравнения больше или равна $4 \cdot 3 \cdot 7/4 = 21$, притом равенство достигается только при $x = 0$ и $y^2 = 7/2$. Это и даёт ответ.

Задача 6. Вычислите

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{2019\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{43}.$$

Ответ: -2021.

Решение. Из формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

выразим произведение тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}-1.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}=\frac{\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}}{\operatorname{tg}\left(\frac{(k+1)\pi}{43}-\frac{k\pi}{43}\right)}-1=\left(\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\right)^{-1}-1.$$

Складывая эти равенства для всех k от 1 до 2019 получаем, что выражение из условия равно

$$\left(\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{43}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\right)^{-1}-2019. \qquad (*)$$

Заметим, что

$$\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{43}=\operatorname{tg}\left(47\pi-\frac{\pi}{43}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{43},$$

а значит (*) равняется -2021.

Задача 7. При каком наибольшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1-2x+ax^2)^8$ будет равен -1540?

Ответ: -5.

Решение. Применяя полиномиальную формулу, получим

$$(1-2x+ax^2)^8=\sum_{n_1+n_2+n_3=8}\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot 1^{n_1}\cdot(-2x)^{n_2}\cdot(ax^2)^{n_3}=\sum_{n_1+n_2+n_3=8}\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(-2)^{n_2}\cdot a^{n_3}\cdot x^{n_2+2n_3}.$$

Для того, чтобы определить, какие слагаемые в сумме содержат x^4, нужно решить в неотрицательных целых числах систему уравнений:

$$\begin{cases} n_1+n_2+n_3=8 \\ n_2+2n_3=4 \end{cases}.$$

Из второго уравнения следует чётность n_2. В силу неотрицательности переменных n_2 может принимать значения 0, 2 и 4. Решая систему для каждого из данных n_2, будем иметь три случая:

1. $n_1=6$, $n_2=0$, $n_3=2$;
2. $n_1=5$, $n_2=2$, $n_3=1$;
3. $n_1=4$, $n_2=4$, $n_3=0$.

В каждом из них коэффициент при x^4 вычисляется по формуле: $\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(-2)^{n_2}\cdot a^{n_3}$. Тогда в каждом из перечисленных случаев будем иметь соответственно:

1. $\frac{8!}{6!\cdot 0!\cdot 2!}\cdot(-2)^0\cdot a^2=28a^2$;

2. $\frac{8!}{5!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot(-2)^2\cdot a^1 = 28\cdot 24a$;

3. $\frac{8!}{4!\cdot 4!\cdot 0!}\cdot(-2)^4\cdot a^0 = 28\cdot 40$

Таким образом, коэффициент при x^4 будет равен $28a^2 + 28\cdot 24a + 28\cdot 40$.

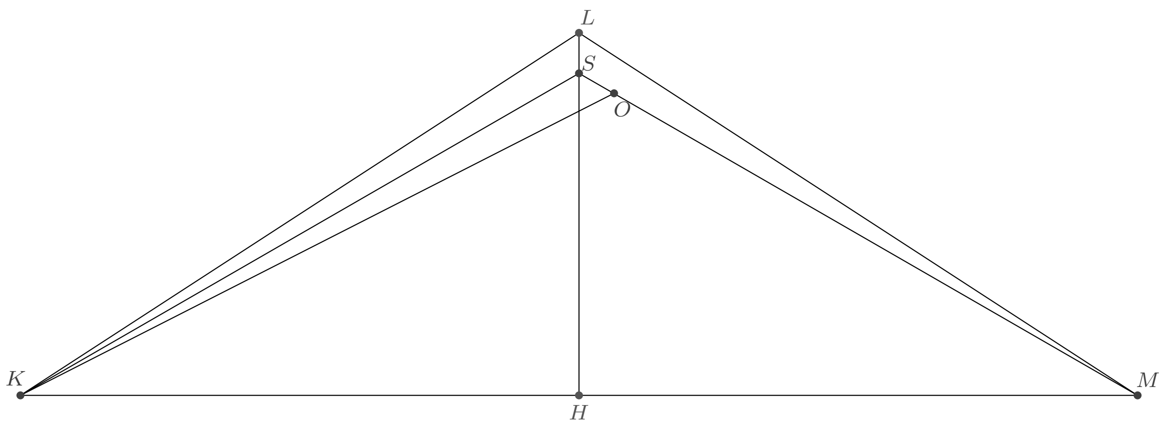
Так как по условию задачи данный коэффициент должен быть равен $-1540 = -28\cdot 55$, имеем уравнение: $28a^2+28\cdot 24a+28\cdot 40 = -28\cdot 55$. Разделив обе части уравнения на 28 и приведя подобные, получим $a^2 + 24a + 95 = 0$. Данное уравнение имеет два вещественных корня: $a_1 = -19$ и $a_2 = -5$.

Таким образом, наибольшее значение параметра a, при котором коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1 - 2x + ax^2)^8$ будет равен -1540 равно -5.

Задача 8. Дан равнобедренный треугольник KLM ($KL = LM$) с углом при вершине, равным $114°$. Точка O расположена внутри треугольника KLM так, что $\angle OMK = 30°$, а $\angle OKM = 27°$. Найдите величину угла $\angle LOM$.

Ответ: $150°$.

Решение. Пусть LH — высота/медиана/биссектриса треугольника. Пусть S — пересечение луча MO и отрезка LH. Заметим, что $KS = SM$. Например, поскольку в треугольнике KSM медиана SH совпала с высотой.



Посчитаем углы:
1. $\angle HLK = \frac{\angle KLM}{2} = 57°$;
2. $\angle LKM = 90° - \angle HLK = 33°$;
3. $\angle SKM = \angle SMK = 30°$;
4. $\angle LKS = \angle LKM - \angle SKM = 3°$;
5. $\angle SKO = \angle SKM - \angle OKM = 3°$, а значит $\angle SKO = \angle SKL$;
6. $\angle SOK = \angle OMK + \angle OKM = 57°$, а значит $\angle SOK = \angle SLK$.

Треугольники SKO и SKL равны по общей стороне KS и двум углам (пункты 5. и 6.) Следовательно, $KO = KL$, треугольник KOL — равнобедренный. Значит, угол $\angle LOK = 90° - \frac{\angle OKL}{2} = 87°$, $\angle KOM = 180° - \angle OKM - \angle OMK = 123°$, $\angle LOM = 360° - \angle LOK - \angle KOM = 150°$.

Другое решение. Несложно посчитать, что $\angle LKO = 6°$, $\angle LMO = 3°$. Докажем, что $\angle KLO = 87°$, а $\angle OLM = 27°$. Для этого воспользуемся *тригонометрической формой теоремы Чевы.* В соответствии с этой теоремой нам достаточно проверить, что

$$\frac{\sin 3°}{\sin 30°}\cdot\frac{\sin 27°}{\sin 6°}\cdot\frac{\sin 87°}{\sin 27°} = 1,$$

или $\sin 6°\cdot\sin 30° = \sin 3°\cdot\sin 87°$. Это очевидно:

$$\sin 6°\cdot\sin 30° = (2\cdot\sin 3°\cdot\cos 3°)\cdot\frac{1}{2} = \sin 3°\cdot\sin 87°.$$

Осталось лишь вычислить $\angle LOM$ из треугольника LOM.

Задача 9. Функция g определена на целых числах и принимает целые значения, причём $g(x) \neq x$ для каждого целого x. Назовём число a *красивым*, если для любого целого числа x выполнено $g(x) = g(a - x)$. Может ли каждое из чисел 739 и 741 быть красивым?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Предположим, что каждое из чисел 739 и 741 оказалось красивым. Тогда

$$g(x+2) = g(741 - (x+2)) = g(739 - x) = g(x).$$

Значит, найдутся такие целые числа a и b, что во всех чётных числах функция g принимает значение a, а во всех нечётных — значение b. С другой стороны, в точках 0 и 739 функция должна принимать одно и то же значение, откуда $a = b$. Тогда $g(a) = a$, противоречие.

Задача 10. Вася смастерил из стеклянных стержней призму. Призма имеет 171 боковое ребро и столько же рёбер в каждом из оснований. Вася задумался: «Можно ли параллельно перенести каждое из 513 рёбер призмы так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Васиной задумки?

Ответ: Нет, не возможна.

Решение. Предположим, что реализация Васиной задумки возможна, и рассмотрим замкнутую ломаную, образованную 513 рёбрами. Введём систему координат таким образом, что плоскость Oxy параллельна основаниям призмы, ось Oz перпендикулярна основаниям призмы, причём высота призмы равняется 1, а начало координат O совпадает с одной из вершин замкнутой ломаной.

Пойдём теперь по нашей ломаной, начиная с точки O. Каждый раз, когда мы переходим по ребру, которое лежало в основании, мы движемся в плоскости, параллельной Oxy, т.е. z-координата вершины ломаной не меняется. Если же мы проходим по ребру, которое было боковым ребром, мы меняем z-координату ровно на 1.

Таким образом, когда мы пройдём по всем 513 рёбрам и вернёмся в точку O, z-координата вершины, с одной стороны, должна стать 0, с другой стороны, она должна быть нечётной, т.к. мы 171 раз поменяли её чётность. Противоречие.

Вариант II

Задача 1. Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых семи её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член c_1 удовлетворяет неравенству $c_1 \geqslant \frac{1}{3}$. Какое наименьшее значение может принимать c_1?

Ответ: 5/14

Решение. Пусть c_n — n-й член прогрессии, d — разность прогрессии, $S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ — сумма первых n членов прогрессии.

Выразим c_1 через S_3 и S_7. Заметим, что $S_3 = 3c_1 + 3d$, $S_7 = 7c_1 + 21d$, откуда $c_1 = \frac{7S_3 - S_7}{14}$. По условию $\frac{7S_3 - S_7}{14} \geqslant \frac{1}{3}$. Отсюда $7S_3 - S_7 \geqslant \frac{14}{3}$. Так как S_3 и S_7 по условию — натуральные числа, то наименьшее значение величины $7S_3 - S_7$ равно 5 (оно достигается, например, при $S_3 = 1$, $S_7 = 2$). Поэтому $\min c_1 = \frac{5}{14}$.

Задача 2. Саша написал на доске числа 7, 8, 9, ..., 17, а потом стёр одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

Ответ: 121.

Решение. Сумма чисел от 7 до 17 равна 132. Если стереть хотя бы одно число, то сумма оставшихся чисел не превосходит 125. Давайте последовательно перебирать варианты:

- если сумма 125, то стереть Саша мог только число 7; тогда оставшиеся числа можно разбить на пять групп с суммой 25:

$$8 + 17 = 9 + 16 = 10 + 15 = 11 + 14 = 12 + 13.$$

- если сумма 124, то стереть Саша мог только число 8; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 62:

$$17 + 16 + 15 + 14 = 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 7.$$

- если сумма 123, то стереть Саша мог только число 9; тогда оставшиеся числа можно разбить на три группы с суммой 41:

$$17 + 16 + 8 = 15 + 14 + 12 = 13 + 11 + 10 + 7.$$

- если сумма 122, то стереть Саша мог только число 10; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 61:

$$17 + 16 + 15 + 13 = 14 + 12 + 11 + 9 + 8 + 7.$$

- если Саша стёр число 11, то на доске остались числа с суммой 121: их можно было бы разбить или на 11 групп с суммой 11, или на 121 группу с суммой 1; но в какую-то группу попадёт число 17, поэтому сумма в этой группе будет хотя бы 17; значит, в этом случае разбить числа на групы с одинаковой суммой не получится.

Задача 3. В хирургическом отделениии 4 операционных: 1, 2, 3 и 4. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной 1, через некоторое время — в операционной 2, ещё через некоторое время — в 3, а потом и в 4.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 2 часа 7 минут. За 18 минут до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 60 минут, а ещё за 15 минут до этого — 25 минут. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

Ответ: Можно определить только продолжительность операции в операционной 4.

Решение. Для начала докажем, что продолжительности операций в операционных 1, 2 и 3 нельзя определить однозначно. Действительно, несложно проверить, что если продолжительности операций равны 58, 29, 27, 13 или 46, 45, 23, 13 минут, то все условия задачи выполняются. Однако в этих двух вариантах продолжительности операций в операционных 1, 2 и 3 различны.

Теперь докажем, что продолжительность операции в операционной 4 можно однозначно восстановить. Для этого давайте заметим, что суммарная продолжительность операций за 33 и за 18 минут до конца операций выросла на 35 минут. Это значит, что за 18 минут до конца операции в операционных 1, 2, 3 уже шли, иначе суммарная продолжительность увеличилась бы не более чем на 30 минут. Тогда к концу всех операций их суммарная продолжительность составляет $60 + 18 \cdot 3 = 114$ минуты. Значит операция в операционной 4 длилась $127 - 114 = 13$ минут.

Комментарий. Продолжительности операций могут быть равны в минутах $(58; 28+s; 28-s; 13)$, где $s \in [0; 5]$ или $(45.5+t; 45.5-t; 23; 13)$, где $t \in [0; 12.5]$.

Задача 4. В треугольнике XYZ длины сторон равны 2, 7 и $5\sqrt{3}$. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек A внутри треугольника XYZ, для которых выполняется условие $AX^2 + AY^2 + AZ^2 \leqslant 43$.

Ответ: $\pi/9$.

Решение. Обозначим $YZ = a$, $XZ = b$, $XY = c$, $\rho^2 = 43$.

Пусть G – точка пересечения медиан треугольника XYZ. Представим

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{GX} - \overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{GY} - \overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{GZ} - \overrightarrow{GA},$$

тогда

$$AX^2 + AY^2 + AZ^2 = GX^2 + GY^2 + GZ^2 - 2 \cdot \overrightarrow{GA} \cdot (\overrightarrow{GX} + \overrightarrow{GY} + \overrightarrow{GZ}) + 3 \cdot GA^2.$$

Поскольку G – центр тяжести треугольника XYZ, то

$$\overrightarrow{GX} + \overrightarrow{GY} + \overrightarrow{GZ} = 0,$$

и $GX^2 + GY^2 + GZ^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Таким образом,

$$\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \cdot GA^2 \leqslant \rho^2,$$

или

$$GA^2 \leqslant \frac{1}{9} \cdot (3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

Итак, геометрическим местом точек A, удовлетворяющих поставленному условию, является круг радиуса $\frac{1}{3}\sqrt{3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2}$ с центром в точке пересечения медиан треугольника XYZ.

Этот круг принадлежит треугольнику, если его радиус не больше, чем одна треть наименьшей из высот ΔXYZ:

$$\frac{1}{3}\sqrt{3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2} \leqslant \frac{2S_{\Delta XYZ}}{3\max\{a,\, b,\, c\}}.$$

Значит, при выполнении условия

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} < \rho^2 \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{S_{\Delta XYZ}}{\max\{a,\, b,\, c\}}\right)^2 \qquad (*)$$

искомая площадь равна $S = \frac{\pi}{9} \cdot (3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2)$.

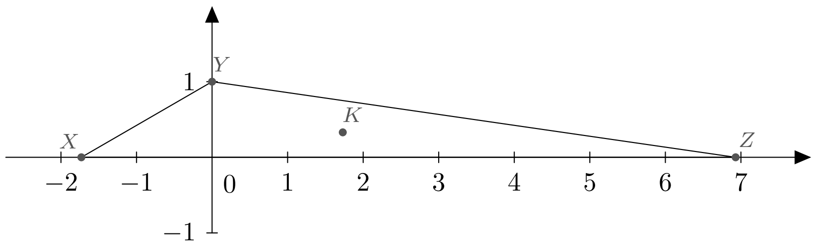
По формуле Герона найдем площадь треугольника:

$$S_{\Delta XYZ} = \frac{1}{4}\sqrt{(9 + 5\sqrt{3})(9 - 5\sqrt{3})(5\sqrt{3} + 5)(5\sqrt{3} - 5)} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Вычислим
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{128}{3},\ \frac{S_{\Delta XYZ}}{\max\{a,\,b,c\}}=\frac{1}{2}.$$
Поскольку $\rho^2=43$, условие $(*)$ выполняется:
$$\frac{128}{3}<43\leqslant\frac{128}{3}+\frac{1}{3}=43.$$

Значит, ответ: $S=\frac{\pi}{9}\cdot(129-128)=\frac{\pi}{9}$.

Другое решение. Высота треугольника, проведенная к стороне длины $5\sqrt{3}$, равна 1. Основание высоты делит эту сторону на отрезки, равные $\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$. Введем систему координат так, как показано на рисунке. Тогда $X(-\sqrt{3};\,0)$, $Y(0;\,1)$, $Z(4\sqrt{3};\,0)$.



$$AX^2+AY^2+AZ^2=(x+\sqrt{3})^2+y^2+x^2+(y-1)^2+(x-4\sqrt{3})^2+y^2=3x^2+3y^2-6\sqrt{3}x-2y+52\leqslant 43.$$

Перепишем неравенство так:
$$\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leqslant\frac{1}{9}.$$
Оно определяет круг радиуса $R=\frac{1}{3}$ с центром в точке $K(\sqrt{3};\,1/3)$. Покажем, что все точки этого круга принадлежат треугольнику XYZ. Для этого найдем расстояния от точки K до сторон треугольника. Уравнение стороны XY: $\ x-y\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$, расстояние до неё равно $d_1=\frac{|\sqrt{3}-\sqrt{3}/3+\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$. Уравнение стороны YZ: $\ x+4\sqrt{3}y-4\sqrt{3}=0$, расстояние $d_2=\frac{|\sqrt{3}+4\cdot(\sqrt{3}/3)-4\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+(4\sqrt{3})^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{21}$. Расстояние от точки K до стороны XZ, очевидно, является наименьшим из трех и равно $d_3=\frac{1}{3}=R$. Поэтому круг принадлежит треугольнику, отсюда искомая площадь равна $S=\pi R^2=\frac{\pi}{9}$.

Задача 5. Решите уравнение: $4(x^4+3x^2+1)(y^4-5y^2+19)=51$.

Ответ: $\left(0;\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Решение. Заметим, что $x^4+3x^2+1\geqslant 1$ для каждого x, а $y^4-5y^2+19=(y^2-5/2)^2+51/4\geqslant 51/4$ для каждого y. Поэтому левая часть уравнения больше или равна $4\cdot1\cdot51/4=51$, притом равенство достигается только при $x=0$ и $y^2=5/2$. Это и даёт ответ.

Задача 6. Вычислите
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{47}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{47}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{47}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{2021\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{2022\pi}{47}.$$

Ответ: -2021.

Решение. Из формулы
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$
выразим произведение тангенсов:
$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}-1.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{47}=\frac{\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{47}-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{47}}{\operatorname{tg}\left(\frac{(k+1)\pi}{47}-\frac{k\pi}{47}\right)}-1=\left(\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{47}-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{47}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{47}\right)^{-1}-1.$$

Складывая эти равенства для всех k от 1 до 2021 получаем, что выражение из условия равно

$$\left(\operatorname{tg}\frac{2022\pi}{47}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{47}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{47}\right)^{-1}-2021. \qquad (*)$$

Заметим, что

$$\operatorname{tg}\frac{2022\pi}{47}=\operatorname{tg}\left(43\pi+\frac{\pi}{47}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{47},$$

а значит (*) равняется -2021.

Задача 7. При каком наибольшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1-3x+ax^2)^8$ будет равен 70?

Ответ: -4.

Решение. Применяя полиномиальную формулу, получим

$$(1-3x+ax^2)^8=\sum_{n_1+n_2+n_3=8}\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot 1^{n_1}\cdot(-3x)^{n_2}\cdot(ax^2)^{n_3}=\sum_{n_1+n_2+n_3=8}\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(-3)^{n_2}\cdot a^{n_3}\cdot x^{n_2+2n_3}.$$

Для того, чтобы определить, какие слагаемые в сумме содержат x^4, нужно решить в неотрицательных целых числах систему уравнений:

$$\begin{cases} n_1+n_2+n_3=8 \\ n_2+2n_3=4 \end{cases}.$$

Из второго уравнения следует чётность n_2. В силу неотрицательности переменных n_2 может принимать значения 0, 2 и 4. Решая систему для каждого из данных n_2, будем иметь три случая:

1. $n_1=6$, $n_2=0$, $n_3=2$;
2. $n_1=5$, $n_2=2$, $n_3=1$;
3. $n_1=4$, $n_2=4$, $n_3=0$.

В каждом из них коэффициент при x^4 вычисляется по формуле: $\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(-3)^{n_2}\cdot a^{n_3}$. Тогда в каждом из перечисленных случаев будем иметь соответственно:

1. $\frac{8!}{6!\cdot 0!\cdot 2!}\cdot(-3)^0\cdot a^2=28a^2$;
2. $\frac{8!}{5!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot(-3)^2\cdot a^1=28\cdot 54a$;
3. $\frac{8!}{4!\cdot 4!\cdot 0!}\cdot(-3)^4\cdot a^0=14\cdot 405$

Таким образом, коэффициент при x^4 будет равен $28a^2+28\cdot 54a+14\cdot 405$.

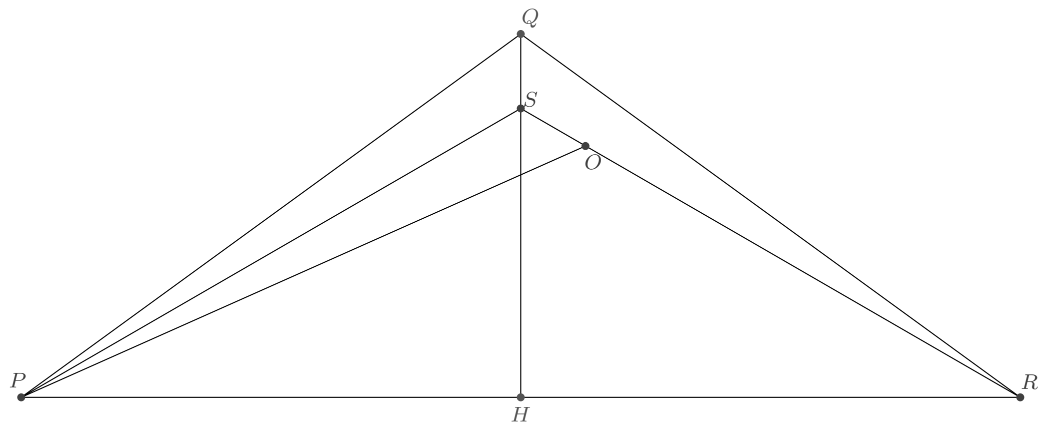
Так как по условию задачи данный коэффициент должен быть равен $70=14\cdot 5$, имеем уравнение: $28a^2+28\cdot 54a+14\cdot 405=14\cdot 5$. Приведя подобные и разделив обе части уравнения на 28, получим $a^2+54a+200=0$. Данное уравнение имеет два вещественных корня: $a_1=-50$ и $a_2=-4$.

Таким образом, наибольшее значение параметра a, при котором коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1-3x+ax^2)^8$ будет равен 70 равно -4.

Задача 8. Дан равнобедренный треугольник PQR ($PQ=QR$) с углом при вершине, равным 108°. Точка O расположена внутри треугольника PQR так, что $\angle ORP=30^\circ$, а $\angle OPR=24^\circ$. Найдите величину угла $\angle QOR$.

Ответ: 150°.

Решение. Пусть QH — высота/медиана/биссектриса треугольника. Пусть S — пересечение луча RO и отрезка QH. Заметим, что $PS = SR$. Например, поскольку в треугольнике PSR медиана SH совпала с высотой.



Посчитаем углы:
1. $\angle HQP = \frac{\angle PQR}{2} = 54^\circ$;
2. $\angle QPR = 90^\circ - \angle HQP = 36^\circ$;
3. $\angle SPR = \angle SRP = 30^\circ$;
4. $\angle QPS = \angle QPR - \angle SPR = 6^\circ$;
5. $\angle SPO = \angle SPR - \angle OPR = 6^\circ$, а значит $\angle SPO = \angle SPQ$;
6. $\angle SOP = \angle ORP + \angle OPR = 54^\circ$, а значит $\angle SOP = \angle SQP$.

Треугольники SPO и SPQ равны по общей стороне PS и двум углам (пункты 5. и 6.) Следовательно, $PO = PQ$, треугольник POQ — равнобедренный. Значит, угол $\angle QOP = 90^\circ - \frac{\angle OPQ}{2} = 84^\circ$, $\angle POR = 180^\circ - \angle OPR - \angle ORP = 126^\circ$, $\angle QOR = 360^\circ - \angle QOP - \angle POR = 150^\circ$

Другое решение. Несложно посчитать, что $\angle QPO = 12^\circ$, $\angle QRO = 6^\circ$. Докажем, что $\angle PQO = 84^\circ$, а $\angle OQR = 24^\circ$. Для этого воспользуемся *тригонометрической формой теоремы Чевы.* В соответствии с этой теоремой нам достаточно проверить, что

$$\frac{\sin 6^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sin 24^\circ}{\sin 12^\circ} \cdot \frac{\sin 84^\circ}{\sin 24^\circ} = 1,$$

или $\sin 12^\circ \cdot \sin 30^\circ = \sin 6^\circ \cdot \sin 84^\circ$. Это очевидно:

$$\sin 12^\circ \cdot \sin 30^\circ = (2 \cdot \sin 6^\circ \cdot \cos 6^\circ) \cdot \frac{1}{2} = \sin 6^\circ \cdot \sin 84^\circ.$$

Осталось лишь вычислить $\angle QOR$ из треугольника QOR.

Задача 9. Функция G определена на целых числах и принимает целые значения, причём для каждого целого числа c найдётся такое число x, что $G(x) \neq c$. Назовём число a *нестандартным*, если для любого целого числа x выполнено $G(x) = G(a - x)$. Может ли каждое из чисел 267 и 269 быть нестандартным?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Предположим, что каждое из чисел 267 и 269 оказалось нестандартным. Тогда

$$G(x + 2) = G(269 - (x + 2)) = G(267 - x) = G(x).$$

Значит, найдутся такие целые числа a и b, что во всех чётных числах функция G принимает значение a, а во всех нечётных — значение b. С другой стороны, в точках 0 и 267 функция должна принимать одно и то же значение, откуда $a = b$. Тогда функция постоянная, противоречие.

Задача 10. Аня смастерила из стеклянных стержней призму. Призма имеет 373 боковых ребра и столько же рёбер в каждом из оснований. Аня задумалась: «Можно ли параллельно перенести каждое из 1119 рёбер призмы так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Аниной задумки?

Ответ: Нет, не возможна.

Решение. Предположим, что реализация Аниной задумки возможна, и рассмотрим замкнутую ломаную, образованную 1119 рёбрами. Введём систему координат таким образом, что плоскость Oxy параллельна основаниям призмы, ось Oz перпендикулярна основаниям призмы, причём высота призмы равняется 1, а начало координат O совпадает с одной из вершин замкнутой ломаной.

Пойдём теперь по нашей ломаной, начиная с точки O. Каждый раз, когда мы переходим по ребру, которое лежало в основании, мы движемся в плоскости, параллельной Oxy, т.е. z-координата вершины ломаной не меняется. Если же мы проходим по ребру, которое было боковым ребром, мы меняем z-координату ровно на 1.

Таким образом, когда мы пройдём по всем 1119 рёбрам и вернёмся в точку O, z-координата вершины, с одной стороны, должна стать 0, с другой стороны, она должна быть нечётной, т.к. мы 373 раза поменяли её чётность. Противоречие.

Вариант III

Задача 1. Сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых семи её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член a_1 удовлетворяет неравенству $a_1 \leqslant \frac{2}{3}$. Какое наибольшее значение может принимать a_1?

Ответ: 9/14

Решение. Пусть a_n — n-й член прогрессии, d — разность прогрессии, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — сумма первых n членов прогрессии.

Выразим a_1 через S_4 и S_7. Заметим, что $S_4 = 4a_1 + 6d$, $S_7 = 7a_1 + 21d$, откуда $a_1 = \frac{7S_4 - 2S_7}{14}$. По условию $\frac{7S_4 - 2S_7}{14} \leqslant \frac{2}{3}$. Отсюда $7S_4 - 2S_7 \leqslant \frac{28}{3}$. Так как S_4 и S_7 по условию — натуральные числа, то наименьшее значение величины $7S_4 - 2S_7$ равно 9 (оно достигается, например, при $S_4 = 3$, $S_7 = 9$). Поэтому $\max a_1 = \frac{9}{14}$.

Задача 2. Маша написала на доске числа 4, 5, 6, …, 16, а потом стёрла одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

Ответ: 121.

Решение. Сумма чисел от 4 до 16 равна 130. Если стереть хотя бы одно число, то сумма оставшихся чисел не превосходит 126. Давайте последовательно перебирать варианты:

- если сумма 126, то стереть Маша могла только число 4; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 63:

$$16 + 15 + 14 + 13 + 5 = 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6.$$

- если сумма 125, то стереть Маша могла только число 5; тогда оставшиеся числа можно разбить на пять групп с суммой 25:

$$16 + 9 = 15 + 10 = 14 + 11 = 13 + 12 = 8 + 7 + 6 + 4.$$

- если сумма 124, то стереть Маша могла только число 6; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 62:

$$16 + 15 + 14 + 13 + 4 = 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 5$$

- если сумма 123, то стереть Маша могла только число 7; тогда оставшиеся числа можно разбить на три группы с суммой 41:

$$16 + 15 + 10 = 14 + 13 + 9 + 5 = 12 + 11 + 8 + 6 + 4.$$

- если сумма 122, то стереть Маша могла только число 8; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 61:

$$16 + 15 + 14 + 12 + 4 = 13 + 11 + 10 + 9 + 7 + 6 + 5.$$

- если Маша стёрла число 9, то на доске остались числа с суммой 121: их можно было бы разбить или на 11 групп с суммой 11, или на 121 группу с суммой 1; но в какую-то группу попадёт число 16, поэтому сумма в этой группе будет хотя бы 16; значит, в этом случае разбить числа на групы с одинаковой суммой не получится.

Задача 3. В хирургическом отделениии 4 операционных: А, Б, В и Г. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной А, через некоторое время — в операционной Б, ещё через некоторое время — в В, а потом и в Г.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 3 часа 5 минут. За 36 минут до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 46 минут, а ещё за 10 минут до этого — 19 минут. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

Ответ: Можно определить только продолжительность операции в операционной Г.

Решение. Для начала докажем, что продолжительности операций в операционных А, Б и В нельзя определить однозначно. Действительно, несложно проверить, что если продолжительности операций равны 65, 45, 44, 31 или 56, 55, 43, 31 минут, то все условия задачи выполняются. Однако в этих двух вариантах продолжительности операций в операционных А, Б и В различны.

Теперь докажем, что продолжительность операции в операционной Г можно однозначно восстановить. Для этого давайте заметим, что суммарная продолжительность операций за 46 и за 36 минут до конца операций выросла на 27 минут. Это значит, что за 36 минут до конца операции в операционных А, Б и В уже шли, иначе суммарная продолжительность увеличилась бы не более чем на 20 минут. Тогда к концу всех операций их суммарная продолжительность составляет $46 + 36 \cdot 3 = 154$ минуты. Значит операция в операционной Г длилась $185 - 154 = 31$ минуту.

Комментарий. Продолжительности операций могут быть равны в минутах $(65; 44.5+s; 44.5-s; 31)$, где $s \in [0; 1.5]$ или $(55.5 + t; 55.5 - t; 43; 31)$, где $t \in [0; 9.5]$.

Задача 4. В треугольнике PQR длины сторон равны 4, 7 и 9. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек M внутри треугольника PQR, для которых выполняется условие $MP^2 + MQ^2 + MR^2 \leqslant 50$.

Ответ: $4\pi/9$.

Решение. Обозначим $QR = a$, $PR = b$, $PQ = c$, $\rho^2 = 50$.

Пусть G – точка пересечения медиан треугольника PQR. Представим

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{GP} - \overrightarrow{GM},\ \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{GQ} - \overrightarrow{GM},\ \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{GR} - \overrightarrow{GM},$$

тогда

$$MP^2 + MQ^2 + MR^2 = GP^2 + GQ^2 + GR^2 - 2 \cdot \overrightarrow{GM} \cdot (\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR}) + 3 \cdot GM^2.$$

Поскольку G – центр тяжести треугольника PQR, то

$$\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = 0,$$

и $GP^2 + GQ^2 + GR^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Таким образом,

$$\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \cdot GM^2 \leqslant \rho^2,$$

или

$$GM^2 \leqslant \frac{1}{9} \cdot (3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

Итак, геометрическим местом точек M, удовлетворяющих поставленному условию, является круг радиуса $\frac{1}{3}\sqrt{3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2}$ с центром в точке пересечения медиан треугольника PQR.

Этот круг принадлежит треугольнику, если его радиус не больше, чем одна треть наименьшей из высот ΔPQR:

$$\frac{1}{3}\sqrt{3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2} \leqslant \frac{2S_{\Delta PQR}}{3\max\{a,\, b, c\}}.$$

Значит, при выполнении условия

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} < \rho^2 \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{S_{\Delta PQR}}{\max\{a,\, b, c\}}\right)^2 \qquad (*)$$

искомая площадь равна $S = \frac{\pi}{9} \cdot (3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2)$.

По формуле Герона найдем площадь треугольника:

$$S_{\Delta PQR} = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6} = 6\sqrt{5}.$$

Вычислим

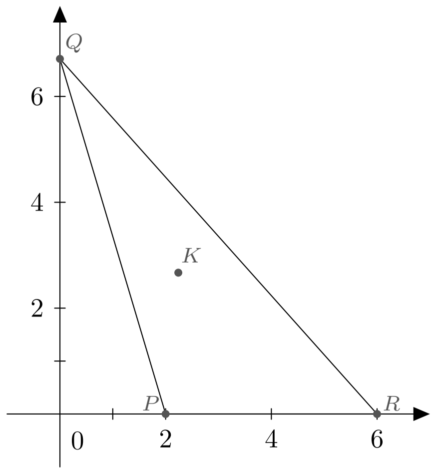
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = \frac{146}{3}, \ \frac{S_{\Delta PQR}}{\max\{a, b, c\}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Поскольку $\rho^2 = 50$, условие $(*)$ выполняется:

$$\frac{146}{3} < 50 \leqslant \frac{146}{3} + \frac{80}{27} = \frac{1394}{27}.$$

Значит, ответ: $S = \frac{\pi}{9} \cdot (150 - 146) = \frac{4\pi}{9}$.

Другое решение. Высота треугольника, проведенная к стороне длины 4, равна $3\sqrt{5}$. Основание высоты лежит на продолжении этой стороны и удалено от её концов на расстояния, равные 2 и 6. Введем систему координат так, как показано на рисунке. Тогда $P(2;\,0)$, $Q(0;\,3\sqrt{5})$, $R(6;\,0)$.



$$MP^2 + MQ^2 + MR^2 = (x-2)^2 + y^2 + x^2 + (y - 3\sqrt{5})^2 + (x-6)^2 + y^2 = 3x^2 + 3y^2 - 16x - 6\sqrt{5}y + 85 \leqslant 50.$$

Перепишем неравенство так:

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \sqrt{5}\right)^2 \leqslant \frac{4}{9}.$$

Оно определяет круг радиуса $R = \frac{2}{3}$ с центром в точке $K(8/3;\,\sqrt{5})$. Покажем, что все точки этого круга принадлежат треугольнику PQR. Для этого найдем расстояния от точки K до сторон треугольника. Уравнение стороны PQ: $3\sqrt{5}x + 2y - 6\sqrt{5} = 0$, расстояние до неё равно $d_1 = \frac{|3\sqrt{5}\cdot(8/3) + 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5}|}{\sqrt{(3\sqrt{5})^2 + 2^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{7}$. Уравнение стороны QR: $x\sqrt{5} + 2y - 6\sqrt{5} = 0$, расстояние $d_2 = \frac{|\sqrt{5}\cdot(8/3) + 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5}|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$. И расстояние от точки K до стороны PR равно, очевидно, $d_3 = \sqrt{5}$. Наименьшее из расстояний d_2, тем не менее, больше, чем радиус круга R: $\frac{4\sqrt{5}}{9} > \frac{2}{3}$. Поэтому весь круг и является той фигурой, площадь которой требуется найти, откуда $S = \pi R^2 = \frac{4\pi}{9}$.

Задача 5. Решите уравнение: $(x^4 + 9x^2 + 4)(y^4 - 3y^2 + 17) = 59$.

Ответ: $\left(0; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Решение. Заметим, что $x^4 + 9x^2 + 4 \geqslant 4$ для каждого x, а $y^4 - 3y^2 + 17 = (y^2 - 3/2)^2 + 59/4 \geqslant 59/4$ для каждого y. Поэтому левая часть уравнения больше или равна $4 \cdot 59/4 = 59$, притом равенство достигается только при $x = 0$ и $y^2 = 3/2$. Это и даёт ответ.

Задача 6. Вычислите

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{2021\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2022\pi}{43}.$$

Ответ: -2021.

Решение. Из формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

выразим произведение тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}-1.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}=\frac{\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}}{\operatorname{tg}\left(\frac{(k+1)\pi}{43}-\frac{k\pi}{43}\right)}-1=\left(\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\right)^{-1}-1.$$

Складывая эти равенства для всех k от 1 до 2021 получаем, что выражение из условия равно

$$\left(\operatorname{tg}\frac{2022\pi}{43}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\right)^{-1}-2021. \qquad (*)$$

Заметим, что

$$\operatorname{tg}\frac{2022\pi}{43}=\operatorname{tg}\left(47\pi+\frac{\pi}{43}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{43},$$

а значит (*) равняется -2021.

Задача 7. При каком наименьшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1-2x+ax^2)^8$ будет равен -1540?

Ответ: -19.

Решение. Применяя полиномиальную формулу, получим

$$(1-2x+ax^2)^8=\sum_{n_1+n_2+n_3=8}\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot 1^{n_1}\cdot(-2x)^{n_2}\cdot(ax^2)^{n_3}=\sum_{n_1+n_2+n_3=8}\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(-2)^{n_2}\cdot a^{n_3}\cdot x^{n_2+2n_3}.$$

Для того, чтобы определить, какие слагаемые в сумме содержат x^4, нужно решить в неотрицательных целых числах систему уравнений:

$$\begin{cases} n_1+n_2+n_3=8 \\ n_2+2n_3=4 \end{cases}.$$

Из второго уравнения следует чётность n_2. В силу неотрицательности переменных n_2 может принимать значения 0, 2 и 4. Решая систему для каждого из данных n_2, будем иметь три случая:

1. $n_1=6$, $n_2=0$, $n_3=2$;
2. $n_1=5$, $n_2=2$, $n_3=1$;
3. $n_1=4$, $n_2=4$, $n_3=0$.

В каждом из них коэффициент при x^4 вычисляется по формуле: $\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(-2)^{n_2}\cdot a^{n_3}$. Тогда в каждом из перечисленных случаев будем иметь соответственно:

1. $\frac{8!}{6!\cdot 0!\cdot 2!}\cdot(-2)^0\cdot a^2=28a^2$;

2. $\frac{8!}{5!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot(-2)^2\cdot a^1=28\cdot 24a$;

3. $\frac{8!}{4!\cdot 4!\cdot 0!}\cdot(-2)^4\cdot a^0=28\cdot 40$

Таким образом, коэффициент при x^4 будет равен $28a^2+28\cdot 24a+28\cdot 40$.

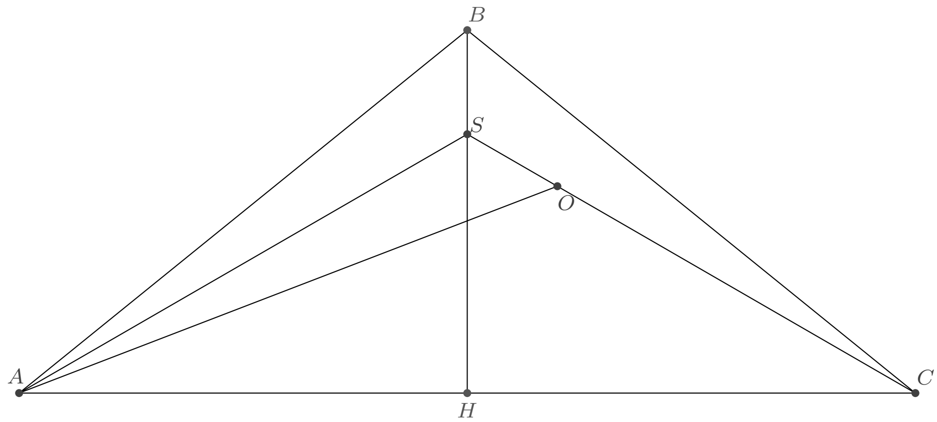
Так как по условию задачи данный коэффициент должен быть равен $-1540=-28\cdot 55$, имеем уравнение: $28a^2+28\cdot 24a+28\cdot 40=-28\cdot 55$. Разделив обе части уравнения на 28 и приведя подобные, получим $a^2+24a+95=0$. Данное уравнение имеет два вещественных корня: $a_1=-19$ и $a_2=-5$.

Таким образом, наибольшее значение параметра a, при котором коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1-2x+ax^2)^8$ будет равен -1540 равно -19.

Задача 8. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) с углом при вершине, равным $102°$. Точка O расположена внутри треугольника ABC так, что $\angle OCA=30°$, а $\angle OAC=21°$. Найдите величину угла $\angle BOA$.

Ответ: $81°$.

Решение. Пусть BH — высота/медиана/биссектриса треугольника. Пусть S — пересечение луча CO и отрезка BH. Заметим, что $AS=SC$. Например, поскольку в треугольнике ASC медиана SH совпала с высотой.



Посчитаем углы:
1. $\angle HBA=\frac{\angle ABC}{2}=51°$;
2. $\angle BAC=90°-\angle HBA=39°$;
3. $\angle SAC=\angle SCA=30°$;
4. $\angle BAS=\angle BAC-\angle SAC=9°$;
5. $\angle SAO=\angle SAC-\angle OAC=9°$, а значит $\angle SAO=\angle SAB$;
6. $\angle SOA=\angle OCA+\angle OAC=51°$, а значит $\angle SOA=\angle SBA$.

Треугольники SAO и SAB равны по общей стороне AS и двум углам (пункты 5. и 6.) Следовательно, $AO=AB$, треугольник AOB — равнобедренный. Значит, угол $\angle BOA=90°-\frac{\angle OAB}{2}=81°$.

Другое решение. Несложно посчитать, что $\angle BAO=18°$, $\angle BCO=9°$. Докажем, что $\angle ABO=81°$, а $\angle OBC=21°$. Для этого воспользуемся *тригонометрической формой теоремы Чевы.* В соответствии с этой теоремой нам достаточно проверить, что

$$\frac{\sin 9°}{\sin 30°}\cdot\frac{\sin 21°}{\sin 18°}\cdot\frac{\sin 81°}{\sin 21°}=1,$$

или $\sin 18°\cdot\sin 30°=\sin 9°\cdot\sin 81°$. Это очевидно:

$$\sin 18°\cdot\sin 30°=(2\cdot\sin 9°\cdot\cos 9°)\cdot\frac{1}{2}=\sin 9°\cdot\sin 81°.$$

Осталось лишь вычислить $\angle BOA$ из треугольника BOA.

Задача 9. Функция F определена на целых числах и принимает целые значения, причём для каждого целого числа c найдётся такое число x, что $F(x)\neq c$. Назовём число a *занимательным*, если для любого целого числа x выполнено $F(x) = F(a - x)$. Может ли каждое из чисел 412, 414 и 451 быть занимательным?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Предположим, что каждое из чисел 412, 414 и 451 оказалось занимательным. Тогда

$$F(x+2) = F(414 - (x+2)) = F(412 - x) = F(x).$$

Значит, найдутся такие целые числа a и b, что во всех чётных числах функция F принимает значение a, а во всех нечётных — значение b. С другой стороны, в точках 0 и 451 функция должна принимать одно и то же значение, откуда $a = b$. Тогда функция постоянная, противоречие.

Задача 10. Петя смастерил из стеклянных стержней пирамиду. Пирамида имеет 373 боковых ребра и столько же рёбер в основании. Петя задумался: «Можно ли параллельно перенести каждое из 746 рёбер пирамиды так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Петиной задумки?

Ответ: Нет, не возможна.

Решение. Предположим, что реализация Петиной задумки возможна, и рассмотрим замкнутую ломаную, образованную 746 рёбрами. Введём систему координат таким образом, что плоскость Oxy параллельна основанию пирамиды, ось Oz перпендикулярна основанию пирамиды, причём высота пирамиды равняется 1, а начало координат O совпадает с одной из вершин замкнутой ломаной.

Пойдём теперь по нашей ломаной, начиная с точки O. Каждый раз, когда мы переходим по ребру, которое лежало в основании, мы движемся в плоскости, параллельной Oxy, т.е. z-координата вершины ломаной не меняется. Если же мы проходим по ребру, которое было боковым ребром, мы меняем z-координату ровно на 1.

Таким образом, когда мы пройдём по всем 746 рёбрам и вернёмся в точку O, z-координата вершины, с одной стороны, должна стать 0, с другой стороны, она должна быть нечётной, т.к. мы 373 раза поменяли её чётность. Противоречие.

Вариант IV

Задача 1. Сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых девяти её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член b_1 удовлетворяет неравенству $b_1 \leqslant \frac{3}{4}$. Какое наибольшее значение может принимать b_1?

Ответ: 11/15

Решение. Пусть b_n — n-й член прогрессии, d — разность прогрессии, $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ — сумма первых n членов прогрессии.

Выразим b_1 через S_4 и S_9. Заметим, что $S_4 = 4b_1 + 6d$, $S_9 = 9b_1 + 36d$, откуда $b_1 = \frac{6S_4 - S_9}{15}$. По условию $\frac{6S_4 - S_9}{15} \leqslant \frac{3}{4}$. Отсюда $6S_4 - S_9 \leqslant \frac{45}{4}$. Так как S_4 и S_9 по условию — натуральные числа, то наименьшее значение величины $6S_4 - S_9$ равно 11 (оно достигается, например, при $S_4 = 2$, $S_9 = 1$). Поэтому $\max b_1 = \frac{11}{15}$.

Задача 2. Паша написал на доске числа 4, 5, 6, ..., 14, а потом стёр одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

Ответ: 91.

Решение. Сумма чисел от 4 до 14 равна 99. Если стереть хотя бы одно число, то сумма оставшихся чисел не превосходит 95. Давайте последовательно перебирать варианты:

- если сумма 95, то стереть Паша мог только число 4; тогда оставшиеся числа можно разбить на пять групп с суммой 19:
$$14 + 5 = 13 + 6 = 12 + 7 = 11 + 8 = 10 + 9.$$
- если сумма 94, то стереть Паша мог только число 5; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 47:
$$14 + 13 + 12 + 8 = 11 + 10 + 9 + 7 + 6 + 4.$$
- если сумма 93, то стереть Паша мог только число 6; тогда оставшиеся числа можно разбить на три группы с суммой 31:
$$14 + 13 + 4 = 12 + 11 + 8 = 10 + 9 + 7 + 5.$$
- если сумма 92, то стереть Паша мог только число 7; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 46:
$$14 + 13 + 11 + 8 = 12 + 10 + 9 + 6 + 5 + 4.$$
- если Паша стёр число 8, то на доске остались числа с суммой 91: их можно было бы разбить или на 7 групп с суммой 13, или на 13 групп с суммой 7, или на 91 группы с суммой 1; но в какую-то группу попадёт число 14, поэтому сумма в этой группе будет хотя бы 14; значит, в этом случае разбить числа на групы с одинаковой суммой не получится.

Задача 3. В хирургическом отделениии 4 операционных: A, B, C и D. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной A, через некоторое время — в операционной B, ещё через некоторое время — в C, а потом и в D.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 2 часа 38 минут. За 24 минуты до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 1 час 9 минут, а ещё за 15 минут до этого — 33 минуты. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

Ответ: Можно определить только продолжительность операции в операционной D.

Решение. Для начала докажем, что продолжительности операций в операционных A, B и C нельзя определить однозначно. Действительно, несложно проверить, что если продолжительности операций равны 72, 35, 34, 17 или 56, 55, 30, 17 минут, то все условия задачи выполняются. Однако в этих двух вариантах продолжительности операций в операционных A, B и C различны.

Теперь докажем, что продолжительность операции в операционной D можно однозначно восстановить. Для этого давайте заметим, что суммарная продолжительность операций за 39 и за 24 минут до конца операций выросла на 36 минут. Это значит, что за 24 минуты до конца операции в операционных A, B и C уже шли, иначе суммарная продолжительность увеличилась бы не более чем на 30 минут. Тогда к концу всех операций их суммарная продолжительность составляет $69 + 24 \cdot 3 = 141$ минуту. Значит операция в операционной D длилась $158 - 141 = 17$ минут.

Комментарий. Продолжительности операций могут быть равны в минутах $(72; 35.5+s; 35.5-s; 17)$, где $s \in [0; 3.5]$ или $(55.5 + t; 55.5 - t; 30; 17)$, где $t \in [0; 16.5]$.

Задача 4. В треугольнике KLM длины сторон равны 8, $3\sqrt{17}$ и 13. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек P внутри треугольника KLM, для которых выполняется условие $PK^2 + PL^2 + PM^2 \leqslant 145$.

Ответ: $49\pi/9$.

Решение. Обозначим $LM = a$, $KM = b$, $KL = c$, $\rho^2 = 145$.

Пусть G – точка пересечения медиан треугольника KLM. Представим

$$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{GK} - \overrightarrow{GP},\ \overrightarrow{PL} = \overrightarrow{GL} - \overrightarrow{GP},\ \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{GM} - \overrightarrow{GP},$$

тогда

$$PK^2 + PL^2 + PM^2 = GK^2 + GL^2 + GM^2 - 2 \cdot \overrightarrow{GP} \cdot (\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{GM}) + 3 \cdot GP^2.$$

Поскольку G – центр тяжести треугольника KLM, то

$$\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{GM} = 0,$$

и $GK^2 + GL^2 + GM^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Таким образом,

$$\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \cdot GP^2 \leqslant \rho^2,$$

или

$$GP^2 \leqslant \frac{1}{9} \cdot (3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

Итак, геометрическим местом точек P, удовлетворяющих поставленному условию, является круг радиуса $\frac{1}{3}\sqrt{3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2}$ с центром в точке пересечения медиан треугольника KLM.

Этот круг принадлежит треугольнику, если его радиус не больше, чем одна треть наименьшей из высот ΔKLM:

$$\frac{1}{3}\sqrt{3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2} \leqslant \frac{2S_{\Delta KLM}}{3\max\{a,\, b,\, c\}}.$$

Значит, при выполнении условия

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} < \rho^2 \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{S_{\Delta KLM}}{\max\{a,\, b,\, c\}}\right)^2 \qquad (*)$$

искомая площадь равна $S = \frac{\pi}{9} \cdot (3\rho^2 - a^2 - b^2 - c^2)$.

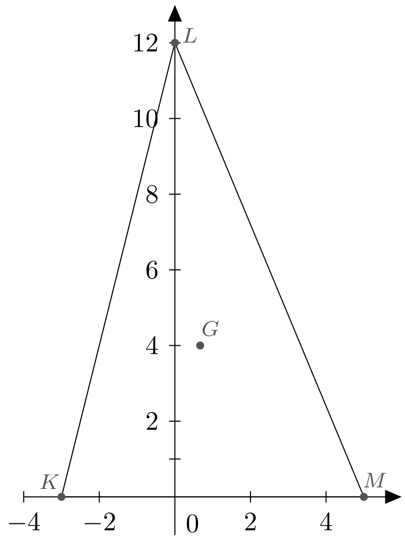
По формуле Герона найдем площадь треугольника:

$$S_{\Delta KLM} = \frac{1}{4}\sqrt{(21 + 3\sqrt{17})(21 - 3\sqrt{17})(3\sqrt{17} - 5)(3\sqrt{17} + 5)} = 48.$$

Вычислим
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{386}{3},\ \frac{S_{\Delta KLM}}{\max\{a,\,b,c\}}=\frac{48}{13}.$$
Поскольку $\rho^2=145$, условие $(*)$ выполняется:
$$\frac{386}{3}<145\leqslant\frac{386}{3}+\frac{9216}{507}=\frac{74450}{507}.$$

Значит, ответ: $S=\frac{\pi}{9}\cdot(435-386)=\frac{49\pi}{9}$.

Другое решение. Высота треугольника, проведенная к стороне длины 8, равна 12. Основание высоты делит эту сторону на отрезки, равные 3 и 5. Введем систему координат так, как показано на рисунке. Тогда $K(-3;\,0)$, $L(0;\,12)$, $M(5;\,0)$.



$$PK^2+PL^2+PM^2=(x+3)^2+y^2+x^2+(y-12)^2+(x-5)^2+y^2=3x^2+3y^2-4x-24y+178\leqslant 145.$$

Перепишем неравенство так:
$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-4)^2\leqslant\frac{49}{9}.$$

Оно определяет круг радиуса $R=\frac{7}{3}$ с центром в точке $G(2/3;\,4)$. Покажем, что все точки этого круга принадлежат треугольнику KLM. Для этого найдем расстояния от точки G до сторон треугольника. Уравнение стороны KL: $4x-y+12=0$, расстояние до неё равно $d_1=\frac{|4\cdot(2/3)-4+12|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{32}{3\sqrt{17}}$. Уравнение стороны LM: $12x+5y-60=0$, расстояние $d_2=\frac{|12\cdot(2/3)+5\cdot 4-60|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{32}{13}$. И расстояние от точки G до стороны KM равно, очевидно, $d_3=4$. Наименьшее из расстояний d_2, тем не менее, больше, чем радиус круга R: $\frac{32}{13}>\frac{7}{3}$. Поэтому весь круг и является той фигурой, площадь которой требуется найти, откуда $S=\pi R^2=\frac{49\pi}{9}$.

Задача 5. Решите уравнение: $2(x^4+3x^2+6)(y^4-5y^2+12)=69$.

Ответ: $\left(0;\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Решение. Заметим, что $x^4+3x^2+6\geqslant 6$ для каждого x, а $y^4-5y^2+12=(y^2-5/2)^2+23/4\geqslant 23/4$ для каждого y. Поэтому левая часть уравнения больше или равна $2\cdot 6\cdot 23/4=69$, притом равенство достигается только при $x=0$ и $y^2=5/2$. Это и даёт ответ.

Задача 6. Вычислите
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{47}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{47}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{47}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{2019\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{47}.$$

Ответ: -2021.

Решение. Из формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

выразим произведение тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}-1.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{47}=\frac{\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{47}-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{47}}{\operatorname{tg}\left(\frac{(k+1)\pi}{47}-\frac{k\pi}{47}\right)}-1=\left(\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{47}-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{47}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{47}\right)^{-1}-1.$$

Складывая эти равенства для всех k от 1 до 2019 получаем, что выражение из условия равно

$$\left(\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{47}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{47}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{47}\right)^{-1}-2019. \qquad (*)$$

Заметим, что

$$\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{47}=\operatorname{tg}\left(43\pi-\frac{\pi}{47}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{47},$$

а значит (*) равняется -2021.

Задача 7. При каком наименьшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1-3x+ax^2)^8$ будет равен 70?

Ответ: -50.

Решение. Применяя полиномиальную формулу, получим

$$(1-3x+ax^2)^8=\sum_{n_1+n_2+n_3=8}\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot 1^{n_1}\cdot(-3x)^{n_2}\cdot(ax^2)^{n_3}=\sum_{n_1+n_2+n_3=8}\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(-3)^{n_2}\cdot a^{n_3}\cdot x^{n_2+2n_3}.$$

Для того, чтобы определить, какие слагаемые в сумме содержат x^4, нужно решить в неотрицательных целых числах систему уравнений:

$$\begin{cases} n_1+n_2+n_3=8 \\ n_2+2n_3=4 \end{cases}.$$

Из второго уравнения следует чётность n_2. В силу неотрицательности переменных n_2 может принимать значения 0, 2 и 4. Решая систему для каждого из данных n_2, будем иметь три случая:

1. $n_1=6$, $n_2=0$, $n_3=2$;
2. $n_1=5$, $n_2=2$, $n_3=1$;
3. $n_1=4$, $n_2=4$, $n_3=0$.

В каждом из них коэффициент при x^4 вычисляется по формуле: $\frac{8!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot(-3)^{n_2}\cdot a^{n_3}$. Тогда в каждом из перечисленных случаев будем иметь соответственно:

1. $\frac{8!}{6!\cdot 0!\cdot 2!}\cdot(-3)^0\cdot a^2=28a^2$;
2. $\frac{8!}{5!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot(-3)^2\cdot a^1=28\cdot 54a$;
3. $\frac{8!}{4!\cdot 4!\cdot 0!}\cdot(-3)^4\cdot a^0=14\cdot 405$

Таким образом, коэффициент при x^4 будет равен $28a^2 + 28 \cdot 54a + 14 \cdot 405$.

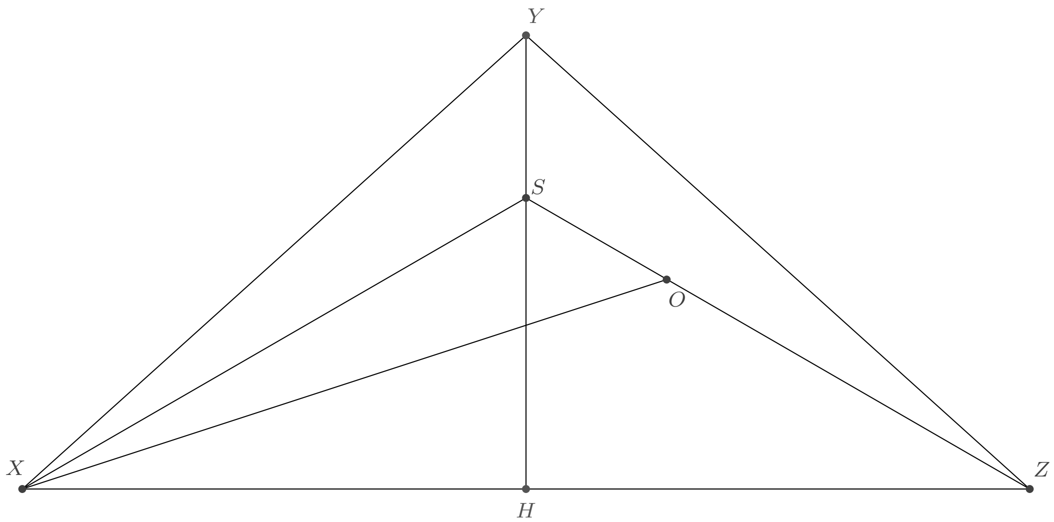
Так как по условию задачи данный коэффициент должен быть равен $70 = 14 \cdot 5$, имеем уравнение: $28a^2 + 28 \cdot 54a + 14 \cdot 405 = 14 \cdot 5$. Приведя подобные и разделив обе части уравнения на 28, получим $a^2 + 54a + 200 = 0$. Данное уравнение имеет два вещественных корня: $a_1 = -50$ и $a_2 = -4$.

Таким образом, наибольшее значение параметра a, при котором коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1 - 3x + ax^2)^8$ будет равен 70 равно -50.

Задача 8. Дан равнобедренный треугольник XYZ ($XY = YZ$) с углом при вершине, равным $96°$. Точка O расположена внутри треугольника XYZ так, что $\angle OZX = 30°$, а $\angle OXZ = 18°$. Найдите величину угла $\angle YOX$.

Ответ: $78°$.

Решение. Пусть YH — высота/медиана/биссектриса треугольника. Пусть S — пересечение луча ZO и отрезка YH. Заметим, что $XS = SZ$. Например, поскольку в треугольнике XSZ медиана SH совпала с высотой.



Посчитаем углы:

1. $\angle HYX = \frac{\angle XYZ}{2} = 48°$;
2. $\angle YXZ = 90° - \angle HYX = 42°$;
3. $\angle SXZ = \angle SZX = 30°$;
4. $\angle YXS = \angle YXZ - \angle SXZ = 12°$;
5. $\angle SXO = \angle SXZ - \angle OXZ = 12°$, а значит $\angle SXO = \angle SXY$;
6. $\angle SOX = \angle OZX + \angle OXZ = 48°$, а значит $\angle SOX = \angle SYX$.

Треугольники SXO и SXY равны по общей стороне XS и двум углам (пункты 5. и 6.) Следовательно, $XO = XY$, треугольник XOY — равнобедренный. Значит, угол $\angle YOX = 90° - \frac{\angle OXY}{2} = 78°$.

Другое решение. Несложно посчитать, что $\angle YXO = 24°$, $\angle YZO = 12°$. Докажем, что $\angle XYO = 78°$, а $\angle OYZ = 18°$. Для этого воспользуемся *тригонометрической формой теоремы Чевы.* В соответствии с этой теоремой нам достаточно проверить, что

$$\frac{\sin 12°}{\sin 30°} \cdot \frac{\sin 18°}{\sin 24°} \cdot \frac{\sin 78°}{\sin 18°} = 1,$$

или $\sin 24° \cdot \sin 30° = \sin 12° \cdot \sin 78°$. Это очевидно:

$$\sin 24° \cdot \sin 30° = (2 \cdot \sin 12° \cdot \cos 12°) \cdot \frac{1}{2} = \sin 12° \cdot \sin 78°.$$

Осталось лишь вычислить $\angle YOX$ из треугольника YOX.

Задача 9. Функция f определена на целых числах и принимает целые значения, причём $f(x) \neq x$ для каждого целого x. Назовём число a *любопытным*, если для любого целого числа x выполнено $f(x) = f(a - x)$. Может ли каждое из чисел 60, 62 и 823 быть любытным?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Предположим, что каждое из чисел 60, 62 и 823 оказалось любытным. Тогда

$$f(x+2) = f(62-(x+2)) = f(60-x) = f(x).$$

Значит, найдутся такие целые числа a и b, что во всех чётных числах функция f принимает значение a, а во всех нечётных — значение b. С другой стороны, в точках 0 и 823 функция должна принимать одно и то же значение, откуда $a = b$. Тогда $f(a) = a$, противоречие.

Задача 10. Лена смастерила из стеклянных стержней пирамиду. Пирамида имеет 171 боковое ребро и столько же рёбер в основании. Лена задумалась: «Можно ли параллельно перенести каждое из 342 рёбер пирамиды так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Лениной задумки?

Ответ: Нет, не возможна.

Решение. Предположим, что реализация Лениной задумки возможна, и рассмотрим замкнутую ломаную, образованную 342 рёбрами. Введём систему координат таким образом, что плоскость Oxy параллельна основанию пирамиды, ось Oz перпендикулярна основанию пирамиды, причём высота пирамиды равняется 1, а начало координат O совпадает с одной из вершин замкнутой ломаной.

Пойдём теперь по нашей ломаной, начиная с точки O. Каждый раз, когда мы переходим по ребру, которое лежало в основании, мы движемся в плоскости, параллельной Oxy, т.е. z-координата вершины ломаной не меняется. Если же мы проходим по ребру, которое было боковым ребром, мы меняем z-координату ровно на 1.

Таким образом, когда мы пройдём по всем 342 рёбрам и вернёмся в точку O, z-координата вершины, с одной стороны, должна стать 0, с другой стороны, она должна быть нечётной, т.к. мы 171 раз поменяли её чётность. Противоречие.