Объединенная межвузовская математическая олимпиада **28.02.2021**

I вариант

Задача 1. Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых шести её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член d_1 удовлетворяет неравенству $d_1 \geqslant \frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать d_1?

Задача 2. Даша написала на доске числа $9, 10, 11, \ldots, 22$, а потом стёрла одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

Задача 3. В хирургическом отделениии 4 операционных: I, II, III и IV. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной I, через некоторое время — в операционной II, ещё через некоторое время — в III, а потом и в IV.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 2 часа 32 минуты. За 30 минут до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 52 минуты, а ещё за 10 минут до этого — 30 минут. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

Задача 4. В треугольнике ABC длины сторон равны 4, 5 и $\sqrt{17}$. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек X внутри треугольника ABC, для которых выполняется условие $XA^2 + XB^2 + XC^2 \leqslant 21$.

Задача 5. Решите уравнение: $4(x^4 + 3x^2 + 3)(y^4 - 7y^2 + 14) = 21$.

Задача 6. Вычислите

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{2019\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{43}.$$

Задача 7. При каком наибольшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1 - 2x + ax^2)^8$ будет равен -1540?

Задача 8. Дан равнобедренный треугольник KLM ($KL = LM$) с углом при вершине, равным 114°. Точка O расположена внутри треугольника KLM так, что $\angle OMK = 30^\circ$, а $\angle OKM = 27^\circ$. Найдите величину угла $\angle LOM$.

Задача 9. Функция g определена на целых числах и принимает целые значения, причём $g(x) \neq x$ для каждого целого x. Назовём число a *красивым*, если для любого целого числа x выполнено $g(x) = g(a - x)$. Может ли каждое из чисел 739 и 741 быть красивым?

Задача 10. Вася смастерил из стеклянных стержней призму. Призма имеет 171 боковое ребро и столько же рёбер в каждом из оснований. Вася задумался: «Можно ли параллельно перенести каждое из 513 рёбер призмы так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Васиной задумки?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **28.02.2021**

II вариант

Задача 1. Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых семи её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член c_1 удовлетворяет неравенству $c_1 \geqslant \frac{1}{3}$. Какое наименьшее значение может принимать c_1?

Задача 2. Саша написал на доске числа $7, 8, 9, \ldots, 17$, а потом стёр одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

Задача 3. В хирургическом отделениии 4 операционных: 1, 2, 3 и 4. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной 1, через некоторое время — в операционной 2, ещё через некоторое время — в 3, а потом и в 4.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 2 часа 7 минут. За 18 минут до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 60 минут, а ещё за 15 минут до этого — 25 минут. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

Задача 4. В треугольнике XYZ длины сторон равны 2, 7 и $5\sqrt{3}$. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек A внутри треугольника XYZ, для которых выполняется условие $AX^2 + AY^2 + AZ^2 \leqslant 43$.

Задача 5. Решите уравнение: $4(x^4 + 3x^2 + 1)(y^4 - 5y^2 + 19) = 51$.

Задача 6. Вычислите

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{47} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{47} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{k\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{47} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{2021\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{2022\pi}{47}.$$

Задача 7. При каком наибольшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1 - 3x + ax^2)^8$ будет равен 70?

Задача 8. Дан равнобедренный треугольник PQR ($PQ = QR$) с углом при вершине, равным 108°. Точка O расположена внутри треугольника PQR так, что $\angle ORP = 30^\circ$, а $\angle OPR = 24^\circ$. Найдите величину угла $\angle QOR$.

Задача 9. Функция G определена на целых числах и принимает целые значения, причём для каждого целого числа c найдётся такое число x, что $G(x) \neq c$. Назовём число a *нестандартным*, если для любого целого числа x выполнено $G(x) = G(a - x)$. Может ли каждое из чисел 267 и 269 быть нестандартным?

Задача 10. Аня смастерила из стеклянных стержней призму. Призма имеет 373 боковых ребра и столько же рёбер в каждом из оснований. Аня задумалась: «Можно ли параллельно перенести каждое из 1119 рёбер призмы так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Аниной задумки?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **28.02.2021**

III вариант

Задача 1. Сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых семи её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член a_1 удовлетворяет неравенству $a_1 \leqslant \frac{2}{3}$. Какое наибольшее значение может принимать a_1?

Задача 2. Маша написала на доске числа $4, 5, 6, \ldots, 16$, а потом стёрла одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

Задача 3. В хирургическом отделениии 4 операционных: А, Б, В и Г. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной А, через некоторое время — в операционной Б, ещё через некоторое время — в В, а потом и в Г.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 3 часа 5 минут. За 36 минут до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 46 минут, а ещё за 10 минут до этого — 19 минут. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

Задача 4. В треугольнике PQR длины сторон равны 4, 7 и 9. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек M внутри треугольника PQR, для которых выполняется условие $MP^2 + MQ^2 + MR^2 \leqslant 50$.

Задача 5. Решите уравнение: $(x^4 + 9x^2 + 4)(y^4 - 3y^2 + 17) = 59$.

Задача 6. Вычислите

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{2021\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2022\pi}{43}.$$

Задача 7. При каком наименьшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1 - 2x + ax^2)^8$ будет равен -1540?

Задача 8. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом при вершине, равным 102°. Точка O расположена внутри треугольника ABC так, что $\angle OCA = 30^\circ$, а $\angle OAC = 21^\circ$. Найдите величину угла $\angle BOA$.

Задача 9. Функция F определена на целых числах и принимает целые значения, причём для каждого целого числа c найдётся такое число x, что $F(x) \neq c$. Назовём число a *занимательным*, если для любого целого числа x выполнено $F(x) = F(a - x)$. Может ли каждое из чисел 412, 414 и 451 быть занимательным?

Задача 10. Петя смастерил из стеклянных стержней пирамиду. Пирамида имеет 373 боковых ребра и столько же рёбер в основании. Петя задумался: «Можно ли параллельно перенести каждое из 746 рёбер пирамиды так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Петиной задумки?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **28.02.2021**

IV вариант

Задача 1. Сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых девяти её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член b_1 удовлетворяет неравенству $b_1 \leqslant \frac{3}{4}$. Какое наибольшее значение может принимать b_1?

Задача 2. Паша написал на доске числа $4, 5, 6, \ldots, 14$, а потом стёр одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

Задача 3. В хирургическом отделениии 4 операционных: A, B, C и D. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной A, через некоторое время — в операционной B, ещё через некоторое время — в C, а потом и в D.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 2 часа 38 минут. За 24 минуты до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 1 час 9 минут, а ещё за 15 минут до этого — 33 минуты. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

Задача 4. В треугольнике KLM длины сторон равны 8, $3\sqrt{17}$ и 13. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек P внутри треугольника KLM, для которых выполняется условие $PK^2 + PL^2 + PM^2 \leqslant 145$.

Задача 5. Решите уравнение: $2(x^4 + 3x^2 + 6)(y^4 - 5y^2 + 12) = 69$.

Задача 6. Вычислите

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{47}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{47}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{47}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{2019\pi}{47}\cdot\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{47}.$$

Задача 7. При каком наименьшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1 - 3x + ax^2)^8$ будет равен 70?

Задача 8. Дан равнобедренный треугольник XYZ ($XY = YZ$) с углом при вершине, равным 96°. Точка O расположена внутри треугольника XYZ так, что $\angle OZX = 30^\circ$, а $\angle OXZ = 18^\circ$. Найдите величину угла $\angle YOX$.

Задача 9. Функция f определена на целых числах и принимает целые значения, причём $f(x) \neq x$ для каждого целого x. Назовём число a *любопытным*, если для любого целого числа x выполнено $f(x) = f(a - x)$. Может ли каждое из чисел 60, 62 и 823 быть любытным?

Задача 10. Лена смастерила из стеклянных стержней пирамиду. Пирамида имеет 171 боковое ребро и столько же рёбер в основании. Лена задумалась: «Можно ли параллельно перенести каждое из 342 рёбер пирамиды так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Лениной задумки?
