Объединенная межвузовская математическая олимпиада **06.02.2022**

I вариант

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального числа n число $5^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11.

Задача 2. Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 13 авантюристов есть рубины; ровно у 9 — изумруды; ровно у 15 — сапфиры; ровно у 6 — бриллианты. Кроме того, известно, что

- если у авантюриста есть сапфиры, то у него есть или изумруды, или бриллианты (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть изумруды, то у него есть или рубины, или сапфиры (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

Задача 3. Бригада рабочих трудилась на заливке катка на большом и малом полях, причем площадь большого поля в 2 раза больше площади малого поля. В той части бригады, которая работала на большом поле, было на 4 рабочих больше, чем в той части, которая работала на малом поле. Когда заливка большого катка закончилась, часть бригады, которая была на малом поле, еще работала. Какое наибольшее число рабочих могло быть в бригаде?

Задача 4. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $BC=8$ и $AC=4$. Найдите длину стороны AB, если длина вектора $4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}$ равна 10.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} a+c=4 \\ ac+b+d=6 \\ ad+bc=5 \\ bd=2 \end{cases}.$$

Задача 6. Решите уравнение $\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}}+\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}}=\arcsin\frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2^2 x+(a-6)\log_2 x+9-3a=0$$

имеет ровно два корня, один из которых в четыре раза больше, чем другой?

Задача 8. В треугольнике ABC сторона $AC=42$. Биссектриса CL делится точкой пересечения биссектрис треугольника в отношении $2:1$, считая от вершины. Найдите длину стороны AB, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 14.

Задача 9. Функция F определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $F(na,nb,nc)=n\cdot F(a,b,c)$, $F(a+n,b+n,c+n)=F(a,b,c)+n$, $F(a,b,c)=F(c,b,a)$. Найдите $F(58,59,60)$.

Задача 10. Пусть B — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $b\in B$, то $\frac{1}{b}\in B$ и $1-\frac{1}{b}\in B$. Может ли в B быть ровно 1000 элементов?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **06.02.2022**

II вариант

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального числа n число $4^{2n} + 2^{n+3} - 2^{n+1}$ делится на 7.

Задача 2. Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 5 авантюристов есть рубины; ровно у 11 — изумруды; ровно у 10 — сапфиры; ровно у 6 — бриллианты. Кроме того, известно, что

- если у авантюриста есть бриллианты, то у него есть или изумруды, или сапфиры (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть изумруды, то у него есть или рубины, или бриллианты (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

Задача 3. Бригада озеленителей трудилась на большом и малом футбольных полях, причем площадь большого поля в 2 раза больше площади малого поля. В той части бригады, которая трудилась на большом поле, было на 6 рабочих больше, чем в той части, которая трудилась на малом поле. Когда озеленение большого поля закончилось, часть бригады, которая была на малом поле, еще работала. Какое наибольшее число рабочих могло быть в бригаде?

Задача 4. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $AB = 8$ и $AC = 5$. Найдите длину стороны BC, если длина вектора $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}$ равна 10.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} a + c = -4 \\ ac + b + d = 6 \\ ad + bc = -5 \\ bd = 2 \end{cases}.$$

Задача 6. Решите уравнение $\arcsin \frac{x\sqrt{35}}{4\sqrt{13}} + \arcsin \frac{x\sqrt{35}}{3\sqrt{13}} = \arcsin \frac{x\sqrt{35}}{2\sqrt{13}}$.

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение

$$a \log_3^2 x - (2a + 3) \log_3 x + 6 = 0$$

имеет ровно два корня, один из которых в три раза больше, чем другой?

Задача 8. В треугольнике ABC сторона $AB = 40$. Центр I вписанной в треугольник окружности делит биссектрису AL в отношении $5 : 3$, считая от вершины. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если радиус вписанной в него окружности равен 15.

Задача 9. Функция f определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $f(na, nb, nc) = n \cdot f(a, b, c)$, $f(a+n, b+n, c+n) = f(a, b, c)+n$, $f(a, b, c) = f(c, b, a)$. Найдите $f(24, 25, 26)$.

Задача 10. Пусть A — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $a \in A$, то $\frac{1}{a} \in A$ и $\frac{1}{1-a} \in A$. Может ли в A быть ровно 1000 элементов?

III вариант

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального числа n число $7^{2n} + 10^{n+1} + 2 \cdot 10^n$ делится на 13.

Задача 2. Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 4 авантюристов есть рубины; ровно у 10 — изумруды; ровно у 6 — сапфиры; ровно у 14 — бриллианты. Кроме того, известно, что

- если у авантюриста есть рубины, то у него есть или изумруды, или бриллианты (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть изумруды, то у него есть или рубины, или сапфиры (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

Задача 3. Бригада рабочих стелила линолеум на складе магазина и в кассовом зале, причем площадь склада в 3 раза больше площади кассового зала. В той части бригады, которая работала на складе, было на 5 рабочих больше, чем в той части, которая работала в кассовом зале. Когда работа на складе была закончена, часть бригады, которая работала в кассовом зале, еще работала. Какое наибольшее число рабочих могло быть в бригаде?

Задача 4. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $BC = 5$ и $AB = 4$. Найдите длину стороны AC, если длина вектора $3\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ равна 10.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} a + c = -7 \\ ac + b + d = 18 \\ ad + bc = -22 \\ bd = 12 \end{cases}.$$

Задача 6. Решите уравнение $\arcsin \frac{2x}{\sqrt{15}} + \arcsin \frac{3x}{\sqrt{15}} = \arcsin \frac{4x}{\sqrt{15}}$.

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_4^2 x + (a-4)\log_4 x + a - 5 = 0$$

имеет ровно два корня, один из которых в четыре раза больше, чем другой?

Задача 8. В треугольнике ABC сторона $BC = 35$. Центр I вписанной в треугольник окружности делит биссектрису AL в отношении $5 : 2$, считая от вершины. Найдите длину стороны AB, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 10.

Задача 9. Функция G определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $G(na, nb, nc) = n \cdot G(a, b, c)$, $G(a+n, b+n, c+n) = G(a, b, c) + n$, $G(a, b, c) = G(c, b, a)$. Найдите $G(89, 90, 91)$.

Задача 10. Пусть D — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $d \in D$, то $1 - \frac{1}{d} \in D$ и $1 - d \in D$. Может ли в D быть ровно 1000 элементов?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **06.02.2022**

IV вариант

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального числа n число $6^{2n} + 2^{n+2} + 12 \cdot 2^n$ делится на 17.

Задача 2. Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 9 авантюристов есть рубины; ровно у 8 — изумруды; ровно у 2 — сапфиры; ровно у 11 — бриллианты. Кроме того, известно, что

- если у авантюриста есть бриллианты, то у него есть или рубины, или сапфиры (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть рубины, то у него есть или изумруды, или бриллианты (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

Задача 3. Бригада лесорубов пилила деревья на большой и малой делянках, причем площадь малой делянки в 3 раза меньше площади большой делянки. В той части бригады, которая работала на большой делянке, было на 8 лесорубов больше, чем в той части, которая работала на малой делянке. Когда заготовка деревьев на большой делянке закончилась, часть бригады, которая была на малой делянке, еще работала. Какое наибольшее число лесорубов могло быть в бригаде?

Задача 4. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $AB = 5$, $AC = 8$ и $BC = 4$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ ac + b + d = -1 \\ ad + bc = -5 \\ bd = 6 \end{cases}.$$

Задача 6. Решите уравнение $\arcsin \frac{x\sqrt{5}}{3} + \arcsin \frac{x\sqrt{5}}{6} = \arcsin \frac{7x\sqrt{5}}{18}$.

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение

$$a \log_5^2 x - (2a + 5) \log_5 x + 10 = 0$$

имеет ровно два корня, один из которых в пять раз больше, чем другой?

Задача 8. В треугольнике ABC сторона $BC = 28$. Биссектриса BL делится точкой пересечения биссектрис треугольника в отношении $4 : 3$, считая от вершины. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если радиус вписанной в него окружности равен 12.

Задача 9. Функция g определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $g(na, nb, nc) = n \cdot g(a, b, c)$, $g(a+n, b+n, c+n) = g(a, b, c)+n$, $g(a, b, c) = g(c, b, a)$. Найдите $g(14, 15, 16)$.

Задача 10. Пусть C — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $c \in C$, то $\frac{1}{1-c} \in C$ и $\frac{c}{1-c} \in C$. Может ли в C быть ровно 1000 элементов?