

**Задача 1.** Для какого наибольшего натурального числа  $n$  существует натуральное число  $m$ , что выполняется равенство  $n! \cdot 7! = m!$ ? Как обычно, для натурального числа  $k$  через  $k!$  обозначается произведение натуральных чисел от 1 до  $k$ .

**Задача 2.** Функция  $f$  определена на целых числах и принимает целые значения. Известно, что для любых  $x$  и  $y$  выполняется равенство  $f(x) + f(y) = f(x + 1) + f(y - 1)$ . Чему равно  $f(1)$ , если  $f(2024) = 4202$  и  $f(4202) = 2024$ ? Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,001.

**Задача 3.** Действительные числа  $x, y, z$ , большие 1, таковы, что  $x^{\log_y z} = 2$ ,  $y^{\log_z x} = 4$ ,  $z^{\log_x y} = 8$ . Найдите  $x$ . Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,001.

**Задача 4.** На вечеринку пришли участники ОММО и ММО. Удивительно, но каждый из пришедших принимал участие только в одной из этих олимпиад. Каждые двое из пришедших или друзья, или враги. У каждого участника ММО на вечеринке среди друзей ровно 16 участников ММО и ровно 8 участников ОММО. У каждого участника ОММО на вечеринке среди врагов ровно 7 участников ММО и ровно 10 участников ОММО. Сколько человек пришли на вечеринку? Если ответов несколько, перечислите их все в порядке возрастания через точку с запятой; например, 24;25;26.

**Задача 5.** Точки  $A = (4, \frac{1}{4})$  и  $B = (-5, -\frac{1}{5})$  лежат на гиперболе  $xy = 1$ . Окружность с диаметром  $AB$  пересекает эту гиперболу ещё в двух точках  $X$  и  $Y$ . Найдите длину отрезка  $XY$ . Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,001.

**Задача 6.** Известны длины сторон треугольника  $ABC$ :  $AB = 14$ ,  $BC = 15$ ,  $CA = 13$ . Внутри отрезка  $AB$  выбрана точка  $D$ . Точка  $E$  выбирается наугад внутри отрезка  $AD$ . Перпендикуляр к отрезку  $AD$ , восстановленный в точке  $E$ , пересекает объединение отрезков  $AC$  и  $BC$  в точке  $F$ . Пусть точка  $D$  выбрана так, что среднее значение длины отрезка  $EF$  наибольшее возможное. Найдите длину отрезка  $AD$ . Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,001.

*Среднее значение длины отрезка  $EF$  — это предел при  $n \rightarrow \infty$  среднего арифметического длин отрезков  $EF$ , когда  $E$  пробегает  $n$  точек, делящих отрезок  $AD$  на  $n + 1$  равных частей.*