Вариант I

Задача 1. Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}?$$

Ответ: Рациональным

Замечание. ...и это число равно 1.

Решение. Обозначим $x=\underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}_{a}-\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}}_{b}$. Из формулы куба разности ясно, что

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b),$$
$$x^3=a^3-b^3-3abx.$$

Это уравнение имеет единственное решение, т. к. левая часть монотонно возрастает, а правая убывает. Подставим значения a и b: $a^3-b^3=4, ab=\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}=\sqrt[3]{\sqrt{5}^2-2^2}=1$

$$x^3=4-3x,$$
$$x=1.$$

Задача 2. На острове рыцарей и лжецов прошло математическое соревнование между командой рыцарей (которые всегда говорят правду) и командой лжецов (которые всегда лгут). В каждой команде было три человека. На соревновании предлагалось три задачи: одна по алгебре, другая по геометрии, третья по комбинаторике. После соревнования участники рассказали следующее.

Артем: Наша команда решила все задачи.
Борис: Мы решили ровно две задачи — по геометрии и комбинаторике.
Василий: Мы решили ровно две задачи — по алгебре и по геометрии.
Григорий: Наша команда справилась с задачей по алгебре.
Дмитрий: Мы не решили геометрию.
Евгений: Мы не решили только комбинаторику.

Определите состав команды рыцарей.

Ответ: ВГЕ.

Решение. Заменим имена первыми буквами. Если А рыцарь, то Б, В, Д и Е солгали. Но лжецов только трое, а значит А не может быть рыцарем. Аналогично, если Б рыцарь, то остальные пятеро солгали; если Д рыцарь, то А, Б, В, Е солгали. Следовательно, *А, Б и Д лжецы*, а *В, Г и Е рыцари.*

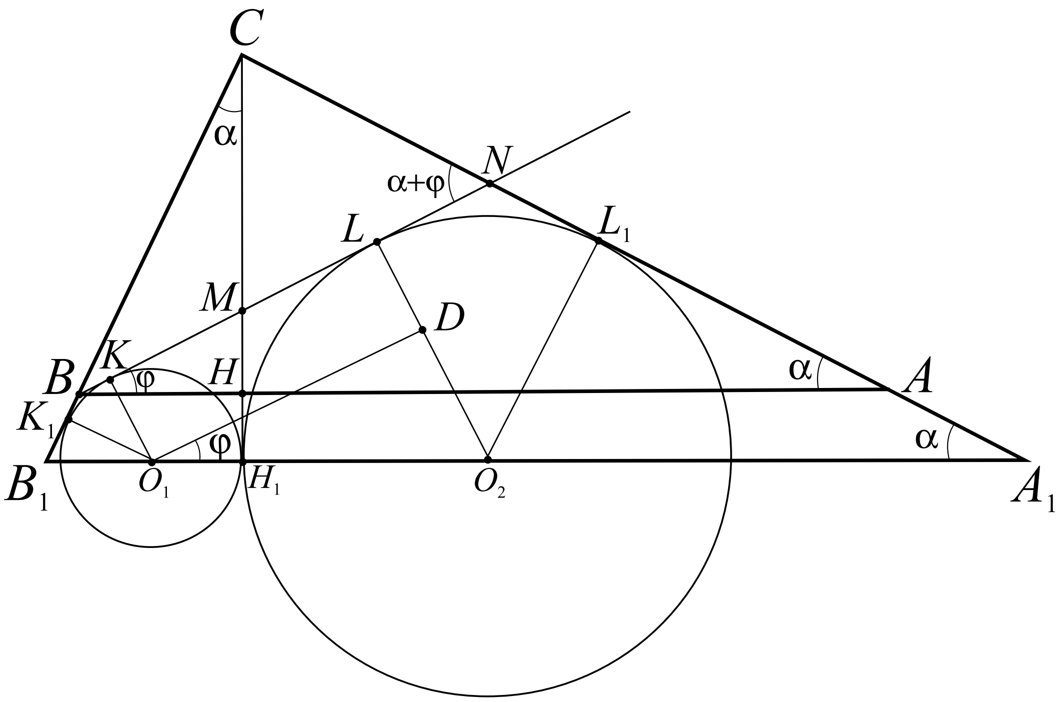
Задача 3. Владимир и Петр бегают кругами по стадиону, каждый со своей постоянной скоростью. Если они бегут в противоположных направлениях, то встречаются раз в 3 минуты, а если в одном направлении, то раз в 6 минут. За сколько минут Владимир пробегает один круг? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 4 или 12 минут.

Решение. Обозначим через x и y скорости Владимира и Петра (в *кругах / минуту*). Получим систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases}3(x+y)=1\\6(x-y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{1}{12}\end{cases}\qquad(1)$$

Подходят оба ответа, так как можно поменять местами бегунов. Другой способ получить $\frac{1}{12}$ как значение переменной x — заменить второе уравнение на $6(x-y)=-1$, что означает, что один из бегунов теперь не обгоняет другого на круг, а отстает на круг каждые 6 минут.



Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH. Луч с началом в точке B наклонен под углом 45° к гипотенузе и пересекает отрезки CH и AC в точках M и N соответственно. Найдите $\angle BAC$, если известно, что периметры треугольников BCM и MCN равны.

Ответ: 15°.

Решение.

Пусть угол наклона луча к гипотенузе $\varphi = 45^\circ$. Рассмотрим вневписанные окружности треугольников BCM и MCN с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно. Они касаются продолжения высоты CH в одной и той же точке H_1. Докажем это. Пусть периметр треугольник BCM равен $2p$. Поскольку $BK_1 = BK$ и $MH_1 = MK$ (как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки), то $CK_1 + CH_1 = CB + BK + CM + MK = CB + BM + CM = 2p$. Но $CK_1 = CH_1$ (как отрезки касательных). Отсюда следует, что $CH_1 = p$. Точно так же для треугольника CMN и вневписанной окружности с центром O_2 получим, что точка касания с продолжением высоты CH совпадает с H_1, поскольку по условию периметры треугольников BCM и MCN равны. Следовательно, H_1 является точкой внешнего касания вневписанных окружностей.

Центры окружностей лежат на пересечении отрезка $A_1B_1 \parallel AB$ (отрезок A_1B_1 проходит через точку H_1 перпендикулярно CH) с биссектрисами углов $\angle BCH = \alpha$ и $HCA = 90^\circ - \alpha$, где $\angle BAC = \alpha$ – угол, который нужно найти. Радиусы вневписанных окружностей равны $O_1K = O_1H_1 = p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $O_2L = O_2H_1 = p\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$. Проведем из точки O_1 перпендикуляр к отрезку O_2L. Основанием этого перпендикуляра является точка D. Очевидно, $O_1D \parallel BN$, поэтому $\angle DO_1O_2 = \varphi$. Из прямоугольного треугольника O_1O_2D найдем

$$\sin\varphi = \frac{DO_2}{O_1O_2} = \frac{O_2L - DL}{O_1H_1 + O_2H_1} = \frac{O_2H_1 - O_1H_1}{O_1H_1 + O_2H_1} = \frac{p(\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})}{p(\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})}.$$

Выполним упрощение тригонометрического выражения:

$$\frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-t}{1+t} - t}{\frac{1-t}{1+t} + t} = \frac{1 - t^2 - 2t}{1 + t^2}, \quad t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\alpha$, $\frac{2t}{1+t^2} = \sin\alpha$, получим

$$\sin\varphi = \cos\alpha - \sin\alpha, \quad 0^\circ < \alpha \leq 45^\circ.$$

Теперь выразим α через φ:
$\sin\varphi = \sqrt{2}\cos(\alpha + 45^\circ)$, $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\right) - 45^\circ$. Подставим $\varphi = 45^\circ$: $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}\right) - 45^\circ = \arccos\dfrac{1}{2} - 45^\circ = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

Задача 5. Решите уравнение

$$\left[\frac{3x^2+8}{2}\right] = \frac{15x^2-7}{5},$$

где через $[c]$ обозначена целая часть действительного числа c, то есть наибольшее целое число, не превосходящее c.

Ответ: $\pm\sqrt{47/15}$ и $\pm\sqrt{52/15}$

Решение. Обозначим правую часть через t, тогда $\frac{15x^2-7}{5} = t$, откуда $x^2 = \frac{5t+7}{15}$. Правую часть равенства заменим на t, а в левую подставим полученное выражение x^2 через t. После упрощения дроби в левой части получим

$$\left[\frac{5t+47}{10}\right] = t$$
$$\frac{5t+47}{10} - t \in [0,1)$$
$$47 - 5t \in [0,10),$$

откуда $t = 8$ или $t = 9$. Этому соответствуют $x = \pm\sqrt{47/15}$ и $\pm\sqrt{52/15}$.

Задача 6. Вася написал на доске четыре числа: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $Y \neq \operatorname{ctg} x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными и положительными. Всегда ли Петя может определить, где именно какое число?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение. Докажем существование таких чисел x и z, что $\sin z = \operatorname{tg} x$, $\cos z = Y = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, и, кроме того, $\cos x = \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}$. Тогда на доске находятся, во-первых, числа $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, а, во-вторых, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, и невозможно определить, где какое число.

Решаем уравнение: $\cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, откуда $\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \cos^2 x = \sin x$. Возведя уравнение в квадрат и раскрыв тангенс, получаем $(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos^2 x = \sin^2 x$. Обозначив $\sin^2 x = t$, получаем $(1-2t)(1-t) = t$ или $1 - 4t + 2t^2 = 0$.

Это уравнение имеет подходящий корень $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$. Осталось убедиться, что при таком значении $\sin^2 x$ все четыре числа различны. Это правда, так как числа из одной пары $\sin x, \cos x$ или $\sin z, \cos z$ совпадают при квадрате синуса, равном $\frac{1}{2}$; совпадение чисел из разных пар означает равенство и вторых чисел тоже, откуда тангенс угла равен его синусу или косинусу, что также не выполняется при найденном значении. Кроме того, все эти числа меньше единицы, поэтому котангенса среди них нет. Можно также просто вычислить эти числа:

$$\sqrt{\sqrt{2}-1},\ \sqrt{2-\sqrt{2}},\ \sqrt{\sqrt{1/2}},\ \sqrt{1-\sqrt{1/2}}.$$

Задача 7.

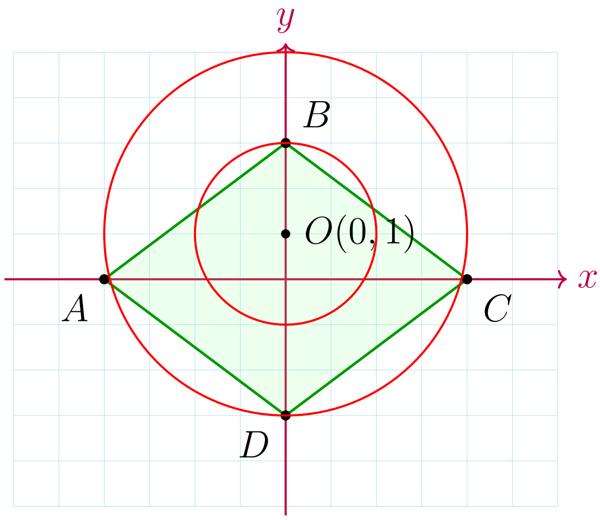
При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 12 \\ x^2 + (y-1)^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет нечетное количество решений?

Ответ: ± 2 или ± 4.

Решение. Множество решений первого уравнения — ромб $ABCD$ (см. рисунок). Множество решений второго уравнения — окружность с центром O радиуса a. Заметим, что рисунок симметричен относительно оси y, следовательно, нечетное количество решений возможно только в том случае, если решению соответствует точка B или точка D. Одновременно проходить через B и D окружность не может, а значит в обоих случаях число решений будет нечетным.



В первом случае радиус окружности равен 2. Во втором случае радиус окружности равен 4.

Кроме положительных значений параметра a подходит и отрицательное.

Задача 8. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°, AC = 3\,\text{см}, CB = 4\,\text{см}$. Высота призмы равна $12\,\text{см}$. Точка K лежит на отрезке AC_1, причем $AK = \frac{1}{3}AC_1$. Муравей начал движение из точки K и движется со скоростью $1\frac{\text{см}}{\text{сек}}$ по поверхности призмы. За какое наименьшее время в секундах муравей может достигнуть точки B_1?

Ответ: 10.

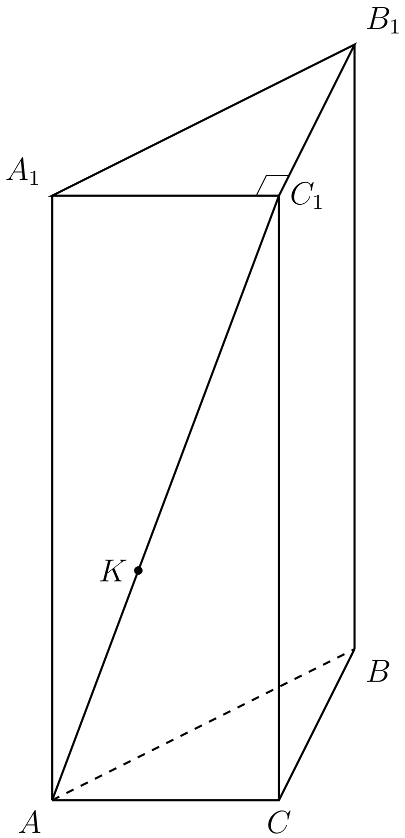
Решение. Рассмотрим развертку призмы без нижнего основания. Опустим перпендикуляры KK_1 и KK_2 на стороны A_1C_1 и CC_1. Точки K_1 и K_2 делят стороны A_1C_1 и CC_1 в отношении $1:2$. Кратчайший путь насекомого будет одним из отрезков KB_1, KB_1', KB_1''. Их длины можно найти по теореме Пифагора в $\triangle KK_1B_1, \triangle KK_1B_1'$ и $\triangle KK_2B_1''$. Для этого сперва вычислим длины катетов в этих треугольниках:

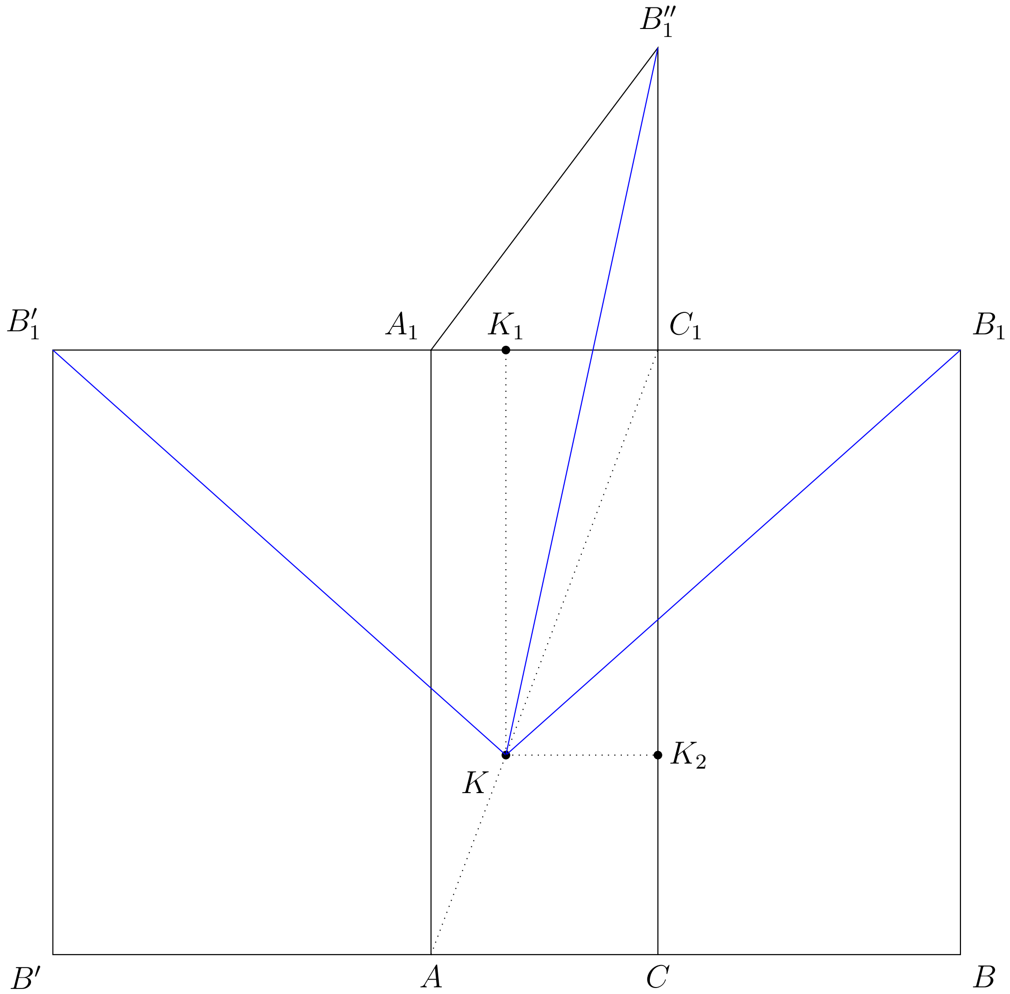
$$B_1'K_1 = 5 + \frac{1}{3}\cdot 3 = 6,\ KK_1 = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8,\ K_1B_1 = \frac{2}{3}\cdot 3 + 4 = 6,\ K_2B_1'' = \frac{2}{3}\cdot 12 + 4 = 12, KK_2 = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2.$$

Теперь найдем длину каждого из трёх путей.

$$KB_1 = \sqrt{8^2+6^2} = 10,\ KB_1' = \sqrt{8^2+6^2} = 10,\ KB_1'' = \sqrt{12^2+2^2} = \sqrt{148}.$$

Кратчайший путь имеет длину $10\,\text{см}$ и займет 10 секунд.





Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ уравнению

$$2\left(f(x)+f(y)\right)=\max\left\{2\,f(x+y), x-y, y-x\right\}.$$

Ответ: $f(x)=\frac{|x|}{2}$.
Решение. Подставим:

$$\begin{array}{llll} y=x & 4f(x)=\max\left(2f(2x),0\right) & \Longrightarrow & f(x)\geqslant 0. \\ y=x=0 & 4f(0)=\max\left(2f(0),0\right)=2f(0) & \Longrightarrow & f(0)=0. \\ y=0 & 2f(x)=\max\left(2\,f(x),x,-x\right)\geqslant\max\left(x,-x\right)=|x| & \Longrightarrow & f(x)\geqslant\dfrac{|x|}{2}. \\ y=-x & 2\left(f(x)+f(-x)\right)=\max\left(2\,f(0),2x,-2x\right)=\max\left(2x,-2x\right)=2|x| & \Longrightarrow & f(x)+f(-x)=|x|. \end{array}$$

Учитывая, что

$$f(x)\geqslant\frac{|x|}{2} \quad \text{и} \quad f(-x)\geqslant\frac{|-x|}{2}, \tag{1}$$

получаем

$$|x|=f(x)+f(-x)\geqslant|x|.$$

Значит, неравенства в (1) являются равенствами. В частности, $f(x)=\frac{|x|}{2}$ при всех вещественных x.
Покажем, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.
При $xy\geqslant 0$

$$2\left(f(x)+f(y)\right)=|x|+|y|=|x+y|,$$
$$2\left(f(x)+f(y)\right)=|x|+|-y|\geqslant|x-y|,$$
$$2\left(f(x)+f(y)\right)=\max(|x+y|,|x-y|)=\max(2f(x+y),|x-y|).$$

При $xy \leqslant 0$

$$2\left(f(x)+f(y)\right)=|x|+|-y|=|x-y|,$$
$$2\left(f(x)+f(y)\right)=|x|+|y|\geqslant|x+y|,$$
$$2\left(f(x)+f(y)\right)=\max(|x+y|,|x-y|)=\max(2f(x+y),|x-y|).$$

Что равносильно уравнению из условия задачи.

Задача 10. Дана последовательность $a_k=\frac{1}{k^2+k}, k\in\mathbb{N}$. Известно, что $a_p+a_{p+1}+\ldots+a_{q-1}=\frac{1}{43}$ для некоторых натуральных p и q $(p<q)$. Найдите $p+q$.

Ответ: 1848.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, поэтому $a_p+a_{p+1}+\ldots+a_{q-1}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+1}+\ldots-\frac{1}{q}$. Кроме первого и последнего, слагаемые сокращаются в соседних парах, поэтому $a_p+\ldots+a_{q-1}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$. И далее

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{43}.$$

Преобразуем: $\frac{q-p}{pq}=\frac{1}{43}$, а значит $43q-43p-pq+43^2=43^2$. Поэтому

$$(43-p)(43+q)=43^2,\ p<q$$

Отсюда $43-p=1$ и $43+q=43^2$, а значит $p=43-1$, $q=43^2-43$ и $p+q=43^2-1=1848$.

Вариант II

Задача 1. Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}?$$

Ответ: Рациональным

Замечание. ...и это число равно 2.

Решение. Обозначим $x=\underbrace{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}_{a}-\underbrace{\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}}_{b}$. Из формулы куба разности ясно, что

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b),$$
$$x^3=a^3-b^3-3abx.$$

Это уравнение имеет единственное решение, т. к. левая часть монотонно возрастает, а правая убывает. Подставим значения a и b: $a^3-b^3=14, ab=\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\cdot\left(5\sqrt{2}-7\right)}=\sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2-7^2}=1,$

$$x^3=14-3x,$$
$$x=2.$$

Задача 2. На острове рыцарей и лжецов прошло математическое соревнование между командой рыцарей (которые всегда говорят правду) и командой лжецов (которые всегда лгут). В каждой команде было три человека. На соревновании предлагалось три задачи: одна по алгебре, другая по геометрии, третья по комбинаторике. После соревнования участники рассказали следующее.

Андрей:	Наша команда не решила задачу по алгебре.
Борис:	Мы решили задачи по геометрии и комбинаторике.
Василий:	Мы решили задачи по алгебре и по геометрии.
Геннадий:	Наша команда справилась с задачей по алгебре, но всего решила две задачи.
Дмитрий:	Мы не решили только геометрию.
Евгений:	Мы не решили только комбинаторику.

Определите состав команды рыцарей.

Ответ: ВГЕ

Решение. Заменим имена первыми буквами. Из несовместности высказываний следует, что среди Б, Д, Е не более 1 рыцаря, а значит среди А, В и Г не менее 2 рыцарей, а значит *В, Г — рыцари*, а *А — лжец*. Следовательно, команда рыцарей решила задачи по алгебре и геометрии, а комбинаторику не решила. Отсюда следует, что *Б солгал*, *Д солгал*, а *Е сказал правду*.

Задача 3. Владимир и Петр бегают кругами по стадиону, каждый со своей постоянной скоростью. Если они бегут в противоположных направлениях, то встречаются раз в 4 минуты, а если в одном направлении, то раз в 12 минут. За сколько минут Владимир пробегает один круг? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 6 или 12 минут.

Решение. Обозначим через x и y скорости Владимира и Петра (в *кругах / минуту*). Получим систему двух линейных уравнений:

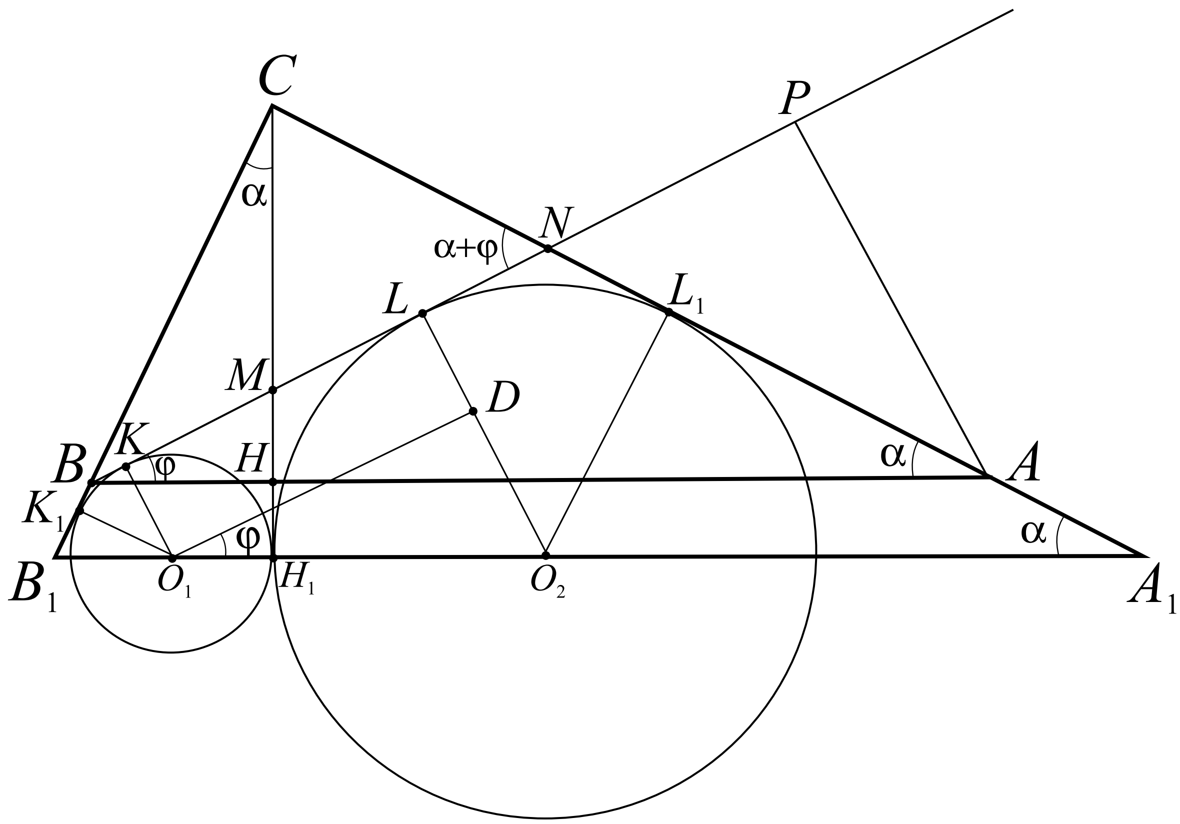
$$\begin{cases}4(x+y)=1\\12(x-y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\y=\frac{1}{12}\end{cases}\tag{2}$$

Подходят оба ответа, так как можно поменять местами бегунов. Другой способ получить $\frac{1}{12}$ как значение переменной x — заменить второе уравнение на $12(x-y)=-1$, что означает, что один из бегунов теперь не обгоняет другого на круг, а *отстает* на круг каждые 12 минут.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90^\circ$) гипотенуза $AB=10$. Через вершину B проведена прямая, пересекающая высоту CH и катет AC в точках M и N соответственно. Известно, что расстояние от точки A до этой прямой равно 6, а периметры треугольников BCM и MCN равны. Найдите BC.

Ответ: $\sqrt{41} - 3$.

Решение.



Пусть угол наклона прямой BN к гипотенузе равен φ. Рассмотрим вневписанные окружности треугольников BCM и MCN с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно. Они касаются продолжения высоты CH в одной и той же точке H_1. Докажем это. Пусть периметр треугольник BCM равен $2p$. Поскольку $BK_1 = BK$ и $MH_1 = MK$ (как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки), то $CK_1 + CH_1 = CB + BK + CM + MK = CB + BM + CM = 2p$. Но $CK_1 = CH_1$ (как отрезки касательных). Отсюда следует, что $CH_1 = p$. Точно так же для треугольника CMN и вневписанной окружности с центром O_2 получим, что точка касания с продолжением высоты CH совпадает с H_1, поскольку по условию периметры треугольников BCM и MCN равны. Следовательно, H_1 является точкой внешнего касания вневписанных окружностей.

Центры окружностей лежат на пересечении отрезка $A_1B_1 \parallel AB$ (отрезок A_1B_1 проходит через точку H_1 перпендикулярно CH) с биссектрисами углов $\angle BCH = \alpha$ и $HCA = 90^\circ - \alpha$, где $\angle BAC = \alpha$ – угол, который нужно найти. Радиусы вневписанных окружностей равны $O_1K = O_1H_1 = p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $O_2L = O_2H_1 = p \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$. Проведем из точки O_1 перпендикуляр к отрезку O_2L. Основанием этого перпендикуляра является точка D. Очевидно, $O_1D \parallel BN$, поэтому $\angle DO_1O_2 = \varphi$. Из прямоугольного треугольника O_1O_2D найдем

$$\sin\varphi = \frac{DO_2}{O_1O_2} = \frac{O_2L - DL}{O_1H_1 + O_2H_1} = \frac{O_2H_1 - O_1H_1}{O_1H_1 + O_2H_1} = \frac{p(\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})}{p(\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})}.$$

Выполним упрощение тригонометрического выражения:
$$\frac{\operatorname{tg}(45^\circ-\frac{\alpha}{2})-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}(45^\circ-\frac{\alpha}{2})+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1-t}{1+t}-t}{\frac{1-t}{1+t}+t}=\frac{1-t^2-2t}{1+t^2},\quad t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$
Поскольку $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\cos\alpha$, $\frac{2t}{1+t^2}=\sin\alpha$, получим
$$\sin\varphi=\cos\alpha-\sin\alpha,\quad 0^\circ<\alpha\le 45^\circ.$$
Умножим это равенство на AB, тогда $AB\sin\varphi=AB\cos\alpha-AB\sin\alpha$, но $AB\sin\varphi=AP$, где P – основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую BN. Таким образом, $AP=AC-BC$. По условию $AP=6$ и $AC^2+BC^2=AB^2=100$. Отсюда $AC=\sqrt{41}+3$, $BC=\sqrt{41}-3$.

Задача 5. Решите уравнение
$$\left[\frac{6\sqrt{x}+5}{5}\right]=\frac{9\sqrt{x}-8}{5},$$
где через $[c]$ обозначена целая часть действительного числа c, то есть наибольшее целое число, не превосходящее c.

Ответ: $784/81, 121/9, 1444/81$

Решение. Обозначим правую часть через t, тогда $\frac{9\sqrt{x}-8}{5}=t$, откуда $\sqrt{x}=\frac{5t+8}{9}$. Правую часть равенства заменим на t, а в левую подставим полученное выражение $\sqrt{x}$ через t. После упрощения дроби в левой части получим
$$\left[\frac{10t+31}{15}\right]=t$$
$$\frac{10t+31}{15}-t\in[0,1)$$
$$31-5t\in[0,15),$$
откуда $t=4,5,6$. Этому соответствуют $\sqrt{x}=28/9, 33/9, 38/9$ и $x=784/81, 1089/81=121/9, 1444/81$.

Задача 6. Вася написал на доске четыре числа: $\sin x$, $\operatorname{ctg}x$, $\operatorname{tg}x$ и $Y\neq\cos x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными и положительными. Всегда ли Петя может определить, где именно какое число?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение. Докажем существование таких чисел x и z, что $\operatorname{tg}z=\sin x$, $\operatorname{ctg}z=Y=\frac{1}{\sin x}$, и, кроме того, $\operatorname{ctg}x=\sin z$. Тогда на доске находятся, во-первых, числа $\sin x$, $\operatorname{ctg}x$ и $\operatorname{tg}x$, а, во-вторых, $\sin z$, $\operatorname{ctg}z$, $\operatorname{tg}z$, и невозможно определить, где какое число.

Возведём равенство $\operatorname{ctg}x=\sin z$ в степень минус два (это можно делать, так как ищем положительные решения) и получим $\operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\sin^2 z}=\operatorname{ctg}^2z+1=\frac{1}{\sin^2x+1}$. Таким образом, необходимо решить уравнение $\operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\sin^2x}+1$, что, после заменеы $t=\cos^2x$ превращается в $\frac{1}{t}-1=\frac{1}{1-t}+1$, откуда $(1-t)-t(1-t)=t+t(1-t)$ или $2t^2-4t+1=0$.

Это уравнение имеет подходящий корень $1-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 1$. Осталось убедиться, что при таком значении $\cos^2x$ все четыре числа различны. Это правда, так как числа из одной пары $\operatorname{tg}x, \operatorname{ctg}x$ или $\operatorname{tg}z, \operatorname{ctg}z$ совпадают при квадрате косинуса, равном 1; совпадение чисел из разных пар означает равенство и вторых чисел тоже, откуда синус угла равен его тангенсу или контангенсу, что также не выполняется при найденном значении. Кроме того, $\cos x$ отсутствует на доске, так как $y>1$; аналогично для $\cos z$. Можно также просто вычислить эти числа:
$$\sqrt{\sqrt{2}-1},\ \sqrt{2-\sqrt{2}},\ \sqrt{\sqrt{1/2}},\ \sqrt{1-\sqrt{1/2}}.$$

Задача 7. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} 3|x|+4|y|=12\\ x^2+(y-1)^2=a^2\end{cases}$$

имеет наибольшее количество решений?

Ответ: $\frac{16}{5} < a < 4$ или $-\frac{16}{5} > a > -4$

Решение. Множество решений первого уравнения — ромб $ABCD$ (см. рисунок). Множество решений второго уравнения — окружность с центром O радиуса a. Обозначим K — проекция точки O на прямую BC и N — проекция точки O на прямую CD.

По теореме Пифагора $|OC| = \sqrt{17}$. Найдем $|OK|$ и $|ON|$. Рассмотрим треугольник BOC его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot |OB| \cdot |QC| = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |OK|$. Отсюда $|OK| = 2 \cdot 4/5 = \frac{8}{5}$. Аналогично получаем $|ON| = \frac{16}{5}$.

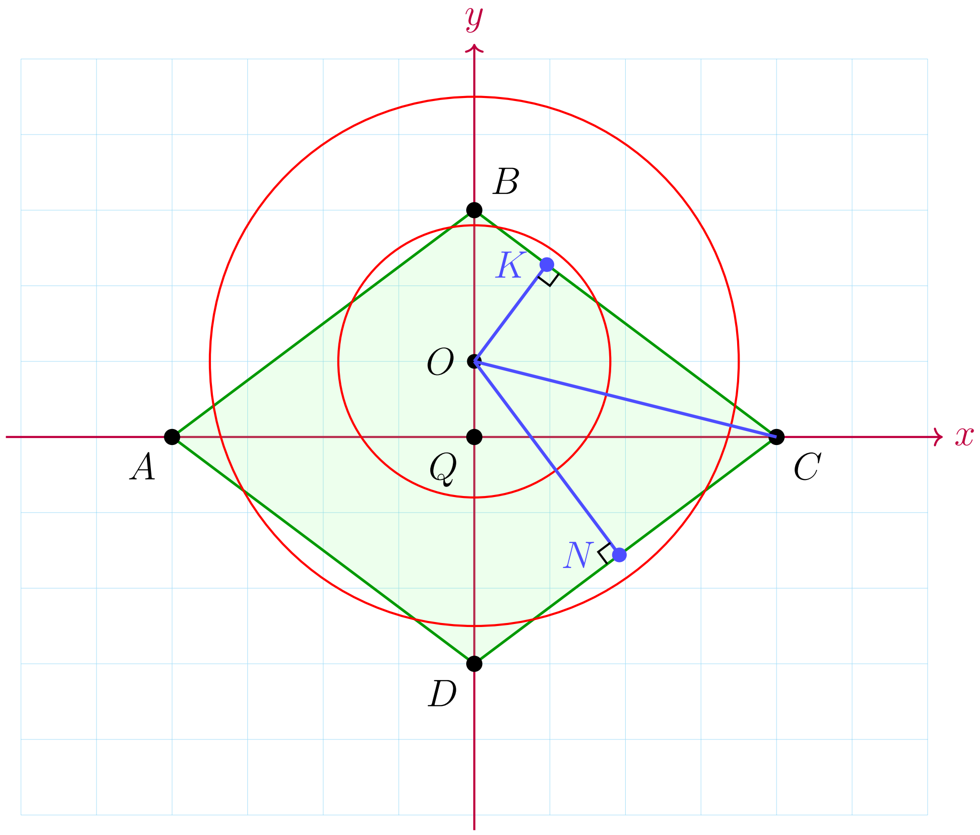
Окружность и прямая могут иметь не более двух точек пересечения. Для того, чтобы окружность имела две точки пересечения с отрезком CD ее радиус должен быть больше $|OK| = \frac{8}{5}$ и меньше $|OK| = 2$ и $|OC| = \sqrt{17}$. Для того, чтобы окружность имела две точки пересечения с отрезком BC ее радиус должен быть больше $|ON| = \frac{16}{5}$ и меньше $|OD| = 4$ и $|OC| = \sqrt{17}$. Из соображений симметрии эти условия дают также две точки пресечения окружности с отрезками AD и AB.

Удовлетворить обоим условиям одновременно невозможно, следовательно, 8 решений быть не может.

Если отказаться от условия $a < 2$, то получаем $\frac{16}{5} < a < 4$ и две точки пересечения с отрезком CD и одну точку пересечения с отрезком BC. То есть получаем 6 решений.

Если $a < 2$, то окружность не имеет точек пересечения с отрезком CD и общее количество решений не превосходит четырех. Таким образом, наибольшее количество решений шесть получается при $\frac{16}{5} < a < 4$.

Кроме положительных значений a подходят и противоположные им отрицательные.



Задача 8. Основанием прямой призмы $DEFD_1E_1F_1$ служит треугольник DEF, в котором $\angle DEF = 90°$, $DE = 12$ см, $DF = 20$ см. Высота призмы равна 80 см. Точка P лежит на отрезке DF_1, причем $DP = \frac{3}{5}DF_1$. Жук начал движение из точки P и движется со скоростью $2\frac{\text{см}}{\text{сек}}$ по поверхности призмы. За какое наименьшее время в секундах жук может достигнуть точки E_1?

Ответ: 20.

Решение. Рассмотрим развертку призмы без нижнего основания. Опустим перпендикуляры PP_1 и PP_2 на стороны A_1F_1 и FF_1. Точки P_1 и P_2 делят стороны A_1F_1 и FF_1 в отношении $3 : 2$. Кратчайший путь насекомого будет одним из отрезков PE_1, PE_1', PE_1''. Заметим, что:

$$E_1'P_1 = 12 + \frac{3}{5}\cdot 20 = 24,\ \ PP_1 = \frac{2}{5}\cdot 80 = 32,\ \ P_1E_1 = \frac{2}{5}\cdot 20 + 16 = 24,\ \ PP_1 = \frac{2}{5}\cdot 80 = 32$$

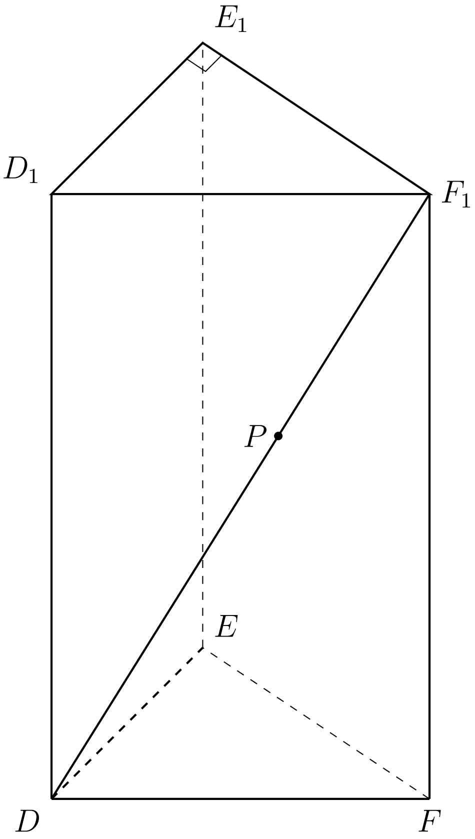
Вычислим высоту $E_1''H$:

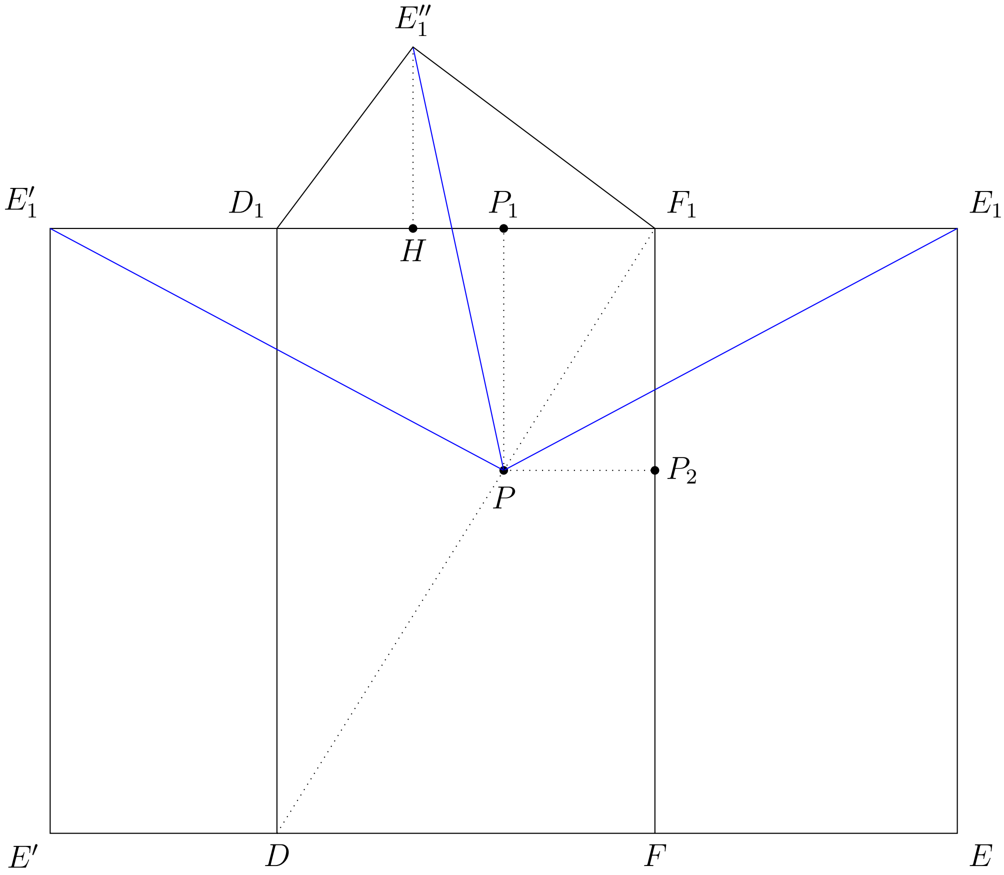
$$E_1''H = \frac{S\triangle D_1F_1E_1''}{D_1F_1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 16}{20} = 9,6.$$

Теперь оценим длину каждого из трёх путей.

$$PE_1' = \sqrt{24^2+32^2} = \sqrt{1600} = 40,\ PE_1 = \sqrt{24^2+32^2} = \sqrt{1600} = 40,\ PE_1'' > PP_1 + E_1''H = 32+9,8 = 41,8.$$

Кратчайший путь имеет длину 40 см и займет 20 секунд.





Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ уравнению

$$f(x) + f(y) = \max\{f(x+y), 2(x-y), 2(y-x)\}.$$

Ответ: $f(x) = 2|x|$.

Решение. При $y = x$

$$2f(x) = \max(f(2x), 0) \quad\Longrightarrow\quad f(x) \geqslant 0.$$

В частности, при $y = x = 0$

$$2f(0) = \max(f(0), 0) = f(0) \quad\Longrightarrow\quad f(0) = 0.$$

При $y = 0$

$$f(x) = \max(f(x), 2x, -2x) \geqslant \max(2x, -2x) = 2|x| \quad\Longrightarrow\quad f(x) \geqslant 2|x|.$$

При $y = -x$

$$f(x) + f(-x) = \max(f(0), 4x, -4x) = \max(4x, -4x) = 4|x| \quad\Longrightarrow\quad f(x) + f(-x) = 4|x|.$$

Учитывая, что
$$f(x) \geqslant 2|x| \quad \text{и} \quad f(-x) \geqslant 2|-x|, \tag{1}$$
получаем
$$4|x| = f(x) + f(-x) \geqslant 4|x|.$$
Значит, неравенства в (1) являются равенствами. В частности, $f(x) = 2|x|$ при всех вещественных x.

Покажем, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.

При $xy \geqslant 0$
$$f(x) + f(y) = 2\left(|x| + |y|\right) = 2|x + y|,$$
$$f(x) + f(y) = 2\left(|x| + |-y|\right) \geqslant 2|x - y|,$$
$$f(x) + f(y) = \max(2|x + y|, 2|x - y|) = \max(f(x + y), 2|x - y|).$$

При $xy \leqslant 0$
$$f(x) + f(y) = 2\left(|x| + |y|\right) \geqslant 2|x + y|,$$
$$f(x) + f(y) = 2\left(|x| + |-y|\right) = 2|x - y|,$$
$$f(x) + f(y) = \max(2|x + y|, 2|x - y|) = \max(f(x + y), 2|x - y|).$$

Что равносильно уравнению из условия задачи.

Задача 10. Дана последовательность $a_k = \frac{1}{k^2+k}, k \in \mathbb{N}$. Известно, что $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{q-1} = \frac{1}{41}$ для некоторых натуральных p и q ($p < q$). Найдите $p + q$.

Ответ: 1680.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, поэтому $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{q-1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \ldots - \frac{1}{q}$. Кроме первого и последнего, слагаемые сокращаются в соседних парах, поэтому $a_p + \ldots + a_{q-1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. И далее
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{41}.$$
Преобразуем: $\frac{q-p}{pq} = \frac{1}{41}$, а значит $41q - 41p - pq + 41^2 = 41^2$. Поэтому
$$(41 - p)(41 + q) = 41^2,\ p < q$$
Отсюда $41 - p = 1$ и $41 + q = 41^2$, а значит $p = 41 - 1$, $q = 41^2 - 41$ и $p + q = 41^2 - 1 = 1680$.

Вариант III

Задача 1. Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt[3]{18+5\sqrt{13}}-\sqrt[3]{5\sqrt{13}-18}?$$

Ответ: Рациональным

Замечание. ...и это число равно 3.

Решение. Обозначим $x=\underbrace{\sqrt[3]{18+5\sqrt{13}}}_{a}-\underbrace{\sqrt[3]{5\sqrt{13}-18}}_{b}$. Из формулы куба разности ясно, что

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b),$$
$$x^3=a^3-b^3-3abx.$$

Это уравнение имеет единственное решение, т. к. левая часть монотонно возрастает, а правая убывает. Подставим значения a и b: $a^3-b^3=36, ab=\sqrt[3]{\left(5\sqrt{13}+18\right)\cdot\left(5\sqrt{13}-18\right)}=\sqrt[3]{(5\sqrt{13})^2-18^2}=1$,

$$x^3=36-3x,$$
$$x=3.$$

Задача 2. На острове рыцарей и лжецов прошло математическое соревнование между командой рыцарей (которые всегда говорят правду) и командой лжецов (которые всегда лгут). В каждой команде было три человека. На соревновании предлагалось три задачи: одна по алгебре, другая по геометрии, третья по комбинаторике. После соревнования участники рассказали следующее.

Алексей: Наша команда решила всего одну задачу.
Борис: Мы решили всего две задачи, в том числе геометрию.
Василий: Мы решили все задачи.
Григорий: Наша команда решила задачи по алгебре и по комбинаторике.
Дмитрий: Мы не решили задачу по комбинаторике.
Евгений: Мы решили задачу по геометрии, но не решили задачу по алгебре.

Определите состав команды рыцарей.

Ответ: АДЕ

Решение. Заменим имена первыми буквами. Среди Г и Д не более 1 рыцаря, поэтому среди А, Б и В не менее одного (иначе рыцарей будет меньше 3). Но А, Б и В противоречат каждый друг другу, поэтому среди них только 1 рыцарь. Значит, *Е — рыцарь*, и команда рыцарей решила геометрию, но не решила алгебру. Поэтому *Г солгал*, а значит *Д рыцарь*, и рыцари не решили еще и комбинаторику. Следовательно, *А сказал правду.*

Задача 3. Владимир и Петр бегают кругами по стадиону, каждый со своей постоянной скоростью. Если они бегут в противоположных направлениях, то встречаются раз в 8 минут, а если в одном направлении, то раз в 24 минуты. За сколько минут Владимир пробегает один круг? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 12 или 24 минут.

Решение. Обозначим через x и y скорости Владимира и Петра (в *кругах / минуту*). Получим систему двух линейных уравнений:

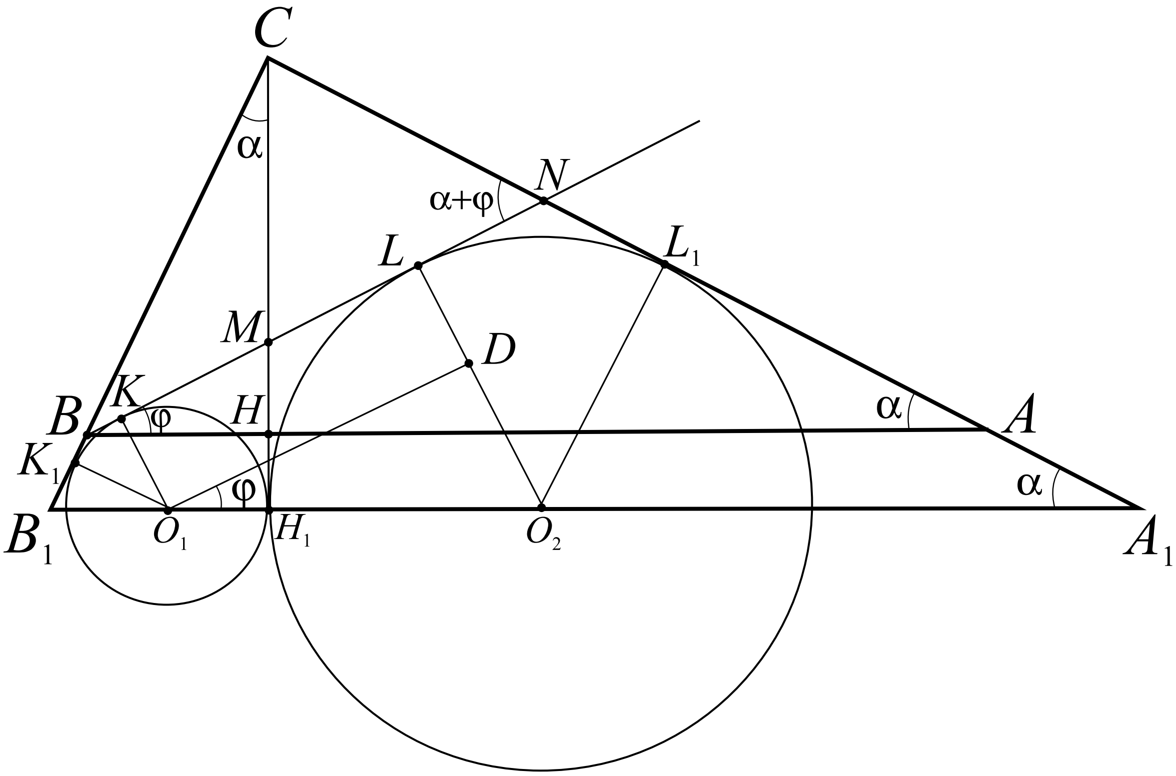
$$\begin{cases}8(x+y)=1\\24(x-y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{12}\\y=\frac{1}{24}\end{cases}\qquad(3)$$

Подходят оба ответа, так как можно поменять местами бегунов. Другой способ получить $\frac{1}{24}$ как значение переменной x — заменить второе уравнение на $24(x-y)=-1$, что означает, что один из бегунов теперь не обгоняет другого на круг, а отстает на круг каждые 24 минуты.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) известен острый угол: $\angle BAC = \arcsin\frac{5}{13}$. Луч с началом в точке B наклонен под углом φ к гипотенузе и пересекает высоту CH и катет AC в точках M и N соответственно. Найдите угол φ, если известно, что периметры треугольников BCM и MCN равны.

Ответ: $\arcsin\dfrac{7}{13}$.

Решение. Рассмотрим вневписанные окружности треугольников BCM и MCN с центрами в точках



O_1 и O_2 соответственно. Они касаются продолжения высоты CH в одной и той же точке H_1. Докажем это. Пусть периметр треугольник BCM равен $2p$. Поскольку $BK_1 = BK$ и $MH_1 = MK$ (как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки), то $CK_1 + CH_1 = CB + BK + CM + MK = CB + BM + CM = 2p$. Но $CK_1 = CH_1$ (как отрезки касательных). Отсюда следует, что $CH_1 = p$. Точно так же для треугольника CMN и вневписанной окружности с центром O_2 получим, что точка касания с продолжением высоты CH совпадает с H_1, поскольку по условию периметры треугольников BCM и MCN равны. Следовательно, H_1 является точкой внешнего касания вневписанных окружностей.

Центры окружностей лежат на пересечении отрезка $A_1B_1 \parallel AB$ (отрезок A_1B_1 проходит через точку H_1 перпендикулярно CH) с биссектрисами углов $\angle BCH = \alpha$ и $HCA = 90^\circ - \alpha$, где $\angle BAC = \alpha$ – угол, который нужно найти. Радиусы вневписанных окружностей равны $O_1K = O_1H_1 = p\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ и $O_2L = O_2H_1 = p\,\mathrm{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$. Проведем из точки O_1 перпендикуляр к отрезку O_2L. Основанием этого перпендикуляра является точка D. Очевидно, $O_1D \parallel BN$, поэтому $\angle DO_1O_2 = \varphi$. Из прямоугольного треугольника O_1O_2D найдем

$$\sin\varphi = \frac{DO_2}{O_1O_2} = \frac{O_2L - DL}{O_1H_1 + O_2H_1} = \frac{O_2H_1 - O_1H_1}{O_1H_1 + O_2H_1} = \frac{p(\mathrm{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2})}{p(\mathrm{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) + \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2})}.$$

Выполним упрощение тригонометрического выражения:

$$\frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-t}{1+t} - t}{\frac{1-t}{1+t} + t} = \frac{1 - t^2 - 2t}{1 + t^2}, \quad t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\alpha$, $\frac{2t}{1+t^2} = \sin\alpha$, получим

$$\sin\varphi = \cos\alpha - \sin\alpha, \quad 0^\circ < \alpha \leq 45^\circ.$$

По условию $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, отсюда $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$. Итак, $\sin\varphi = \dfrac{12}{13} - \dfrac{5}{13} = \dfrac{7}{13}$. Угол φ – острый, поэтому $\varphi = \arcsin\dfrac{7}{13}$.

Задача 5. Решите уравнение

$$\left[\frac{8x^3 + 8}{3}\right] = \frac{4x^3 - 7}{3},$$

где через $[c]$ обозначена целая часть действительного числа c, то есть наибольшее целое число, не превосходящее c.

Ответ: $x = -\sqrt[3]{7/2}$.

Решение. Обозначим правую часть через t, тогда $\frac{4x^3-7}{3} = t$, откуда $x^3 = \frac{3t+7}{4}$. Правую часть равенства заменим на t, а в левую подставим полученное выражение x^3 через t. После упрощения дроби в левой части получим

$$\left[\frac{6t + 22}{3}\right] = t$$
$$\frac{6t + 22}{3} - t \in [0, 1)$$
$$22 + 3t \in [0, 3),$$

откуда $t = -7$. Этому соответствуют $x = -\sqrt[3]{7/2}$.

Задача 6. Вася написал на доске четыре числа: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$ и $Y \neq \operatorname{tg} x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными и положительными. Всегда ли Петя может определить, где именно какое число?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение. Докажем существование таких чисел x и z, что $\sin z = \operatorname{ctg} x$, $\cos z = Y = \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$, и, кроме того, $\cos x = \operatorname{ctg} z = \frac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 x}}{\operatorname{ctg} x}$. Тогда на доске находятся, во-первых, числа $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{ctg} x$, а, во-вторых, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ctg} z$, и невозможно определить, где какое число.

Решаем уравнение: $\cos x = \frac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 x}}{\operatorname{ctg} x}$, откуда $\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \sin x = \cos^2 x$. Возведя уравнение в квадрат и раскрыв котангенс, получаем $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos^4 x$. Обозначив $\cos^2 x = t$, получаем $1 - 2t = t^2$ или $-1 + 2t + t^2 = 0$.

Это уравнение имеет подходящий корень $\sqrt{2} - 1 \neq \frac{1}{2}$. Осталось убедиться, что при таком значении $\sin^2 x$ все четыре числа различны. Это правда, так как числа из одной пары $\sin x, \cos x$ или $\sin z, \cos z$ совпадают при квадрате синуса, равном $\frac{1}{2}$; совпадение чисел из разных пар означает равенство и вторых чисел тоже, откуда котангенс угла равен его синусу или косинусу, что также не выполняется при найденном значении. Кроме того, все эти числа меньше единицы, поэтому тангенса среди них нет. Можно также просто вычислить эти числа:

$$\sqrt{\sqrt{2} - 1},\ \sqrt{2 - \sqrt{2}},\ \sqrt{\sqrt{1/2}},\ \sqrt{1 - \sqrt{1/2}}.$$

Задача 7. При каких значениях параметра a система

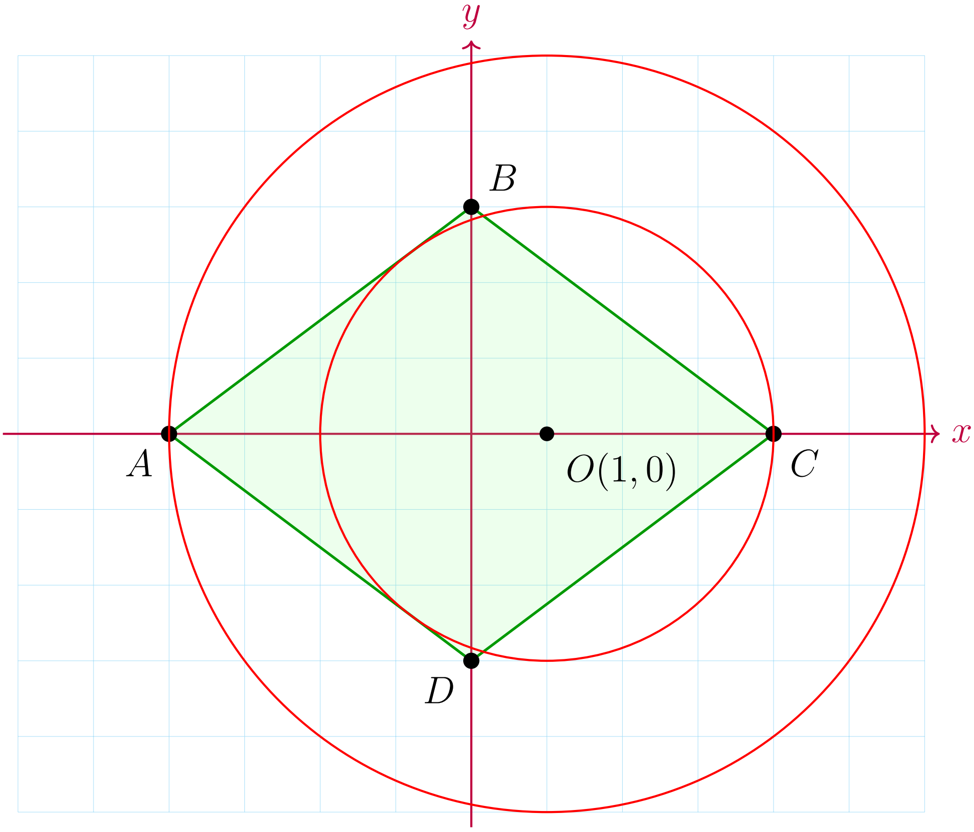
$$\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 12 \\ (x-1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет нечетное количество решений?

Ответ: $a = \pm 3$ или $a = \pm 5$.

Решение. Множество решений первого уравнения — ромб $ABCD$ (см. рисунок). Множество решений второго уравнения — окружность с центром O радиуса a. Заметим, что рисунок симметричен относительно оси x, следовательно, нечетное количество решений возможно только в том случае, если решению соответствует точка A или точка C. Одновременно проходить через точки A и C окружность не может, поэтому в каждом случае будет нечетное число решений. В первом случае радиус окружности равен 5. Во втором случае радиус окружности равен 3.

Кроме положительных значений a подходят и противоположные им отрицательные.



Задача 8. Основанием прямой призмы $KLMM_1K_1L_1$ служит треугольник KLM, в котором $\angle LKM = 90°$, $KM = 12\,\text{см}$, $LK = 5\,\text{см}$. Высота призмы равна $24\,\text{см}$. Точка N лежит на отрезке K_1M, причем $K_1N = \frac{5}{6}N_1M$. Муравей начал движение из точки N и движется со скоростью $5\frac{\text{см}}{\text{сек}}$ по поверхности призмы. За какое наименьшее время в секундах муравей может достигнуть точки L_1?

Ответ: 5.

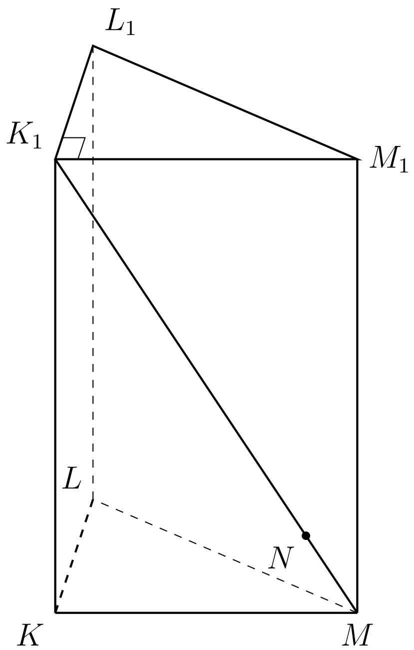
Решение. Рассмотрим развертку призмы без нижнего основания. Опустим перпендикуляры NN_1 и NN_2 на стороны K_1M_1 и KK_1. Точки N_1 и N_2 делят стороны K_1M_1 и KK_1 в отношении $1 : 5$. Кратчайший путь насекомого будет одним из отрезков NL_1, NL_1', NL_1''. Их длины можно найти по теореме Пифагора в $\triangle NN_1L_1, \triangle NN_1L_1'$ и $\triangle NN_2L_1''$. Для этого сперва вычислим длины катетов в этих треугольниках:

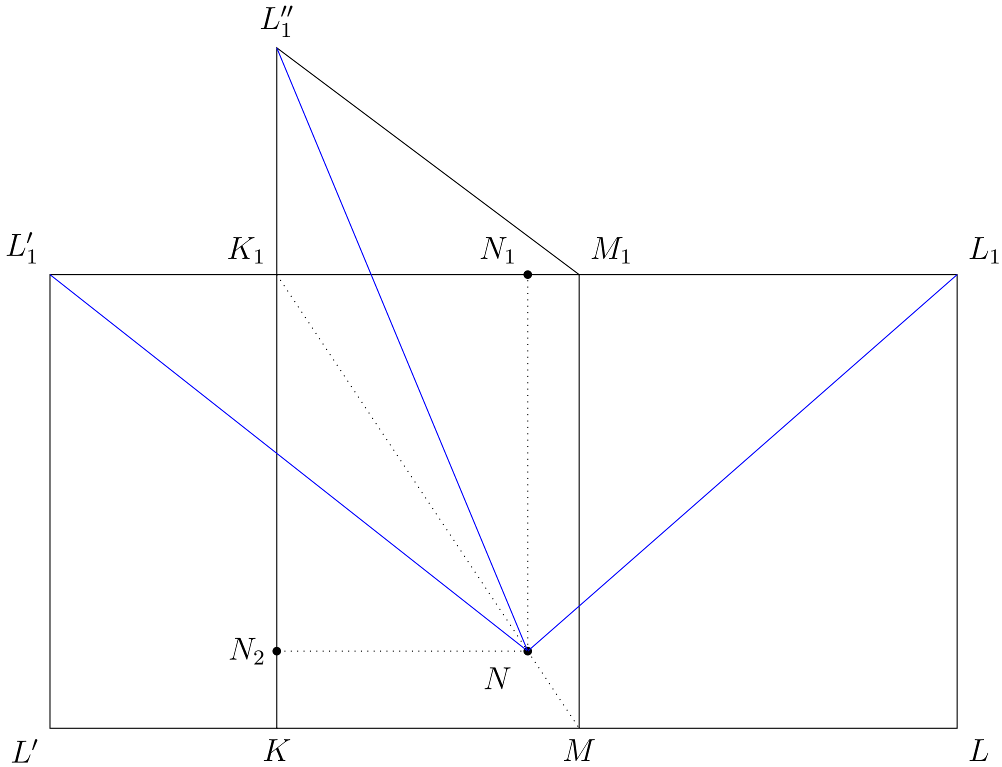
$$L_1'N_1 = 5+\frac{5}{6}\cdot 12 = 15,\ NN_1 = \frac{5}{6}\cdot 24 = 20,\ N_1L_1 = \frac{1}{6}\cdot 12+13 = 15,\ N_2L_1'' = \frac{5}{6}\cdot 24+5 = 25, NN_2 = \frac{5}{6}\cdot 12 = 10.$$

Теперь найдем длину каждого из трёх путей.

$$NL_1 = \sqrt{15^2+20^2} = 25,\ NL_1' = \sqrt{15^2+20^2} = 25,\ NL_1'' = \sqrt{10^2+25^2} > 25.$$

Кратчайший путь имеет длину $25\,\text{см}$ и займет 5 секунд.





Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ уравнению

$$2\left(f(x)+f(y)\right)=\min\left\{2\,f(x+y), x-y, y-x\right\}.$$

Ответ: $f(x)=-\frac{|x|}{2}$

Решение.

При $y=x$

$$4f(x)=\min\left(2f(2x),0\right) \quad\Longrightarrow\quad f(x)\leqslant 0.$$

В частности, при $y=x=0$

$$4f(0)=\min\left(2f(0),0\right)=2f(0) \quad\Longrightarrow\quad f(0)=0.$$

При $y=0$

$$2f(x)=\min\left(2\,f(x),x,-x\right)\leqslant \min\left(x,-x\right)=-|x| \quad\Longrightarrow\quad f(x)\leqslant -\frac{|x|}{2}.$$

При $y=-x$

$$2\left(f(x)+f(-x)\right)=\min\left(2\,f(0),2x,-2x\right)=\min\left(2x,-2x\right)=-2|x| \quad\Longrightarrow\quad f(x)+f(-x)=-|x|.$$

Учитывая, что

$$f(x)\leqslant -\frac{|x|}{2} \quad\text{и}\quad f(-x)\leqslant -\frac{|-x|}{2}, \tag{1}$$

получаем

$$-|x|=f(x)+f(-x)\leqslant -|x|.$$

Значит, неравенства в (1) являются равенствами. В частности, $f(x)=-\frac{|x|}{2}$ при всех вещественных x.

Покажем, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.

При $xy\geqslant 0$

$$2\left(f(x)+f(y)\right)=-\left(|x|+|y|\right)=-|x+y|,$$
$$2\left(f(x)+f(y)\right)=-\left(|x|+|-y|\right)\leqslant -|x-y|,$$
$$2\left(f(x)+f(y)\right)=\min(-|x+y|,-|x-y|)=\min(2f(x+y),-|x-y|).$$

При $xy \leqslant 0$

$$2\left(f(x)+f(y)\right) = -\left(|x|+|-y|\right) = -|x-y|,$$
$$2\left(f(x)+f(y)\right) = -\left(|x|+|y|\right) \leqslant -|x+y|,$$
$$2\left(f(x)+f(y)\right) = \min(-|x+y|, -|x-y|) = \min(2f(x+y), -|x-y|).$$

Что равносильно уравнению из условия задачи.

Задача 10. Дана последовательность $a_k = \frac{1}{k^2+k}, k \in \mathbb{N}$. Известно, что $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{q-1} = \frac{1}{47}$ для некоторых натуральных p и q $(p < q)$. Найдите $p+q$.

Ответ: 2208.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, поэтому $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{q-1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \ldots - \frac{1}{q}$. Кроме первого и последнего, слагаемые сокращаются в соседних парах, поэтому $a_p + \ldots + a_{q-1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. И далее

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{47}.$$

Преобразуем: $\frac{q-p}{pq} = \frac{1}{47}$, а значит $47q - 47p - pq + 47^2 = 47^2$. Поэтому

$$(47-p)(47+q) = 47^2,\ p < q$$

Отсюда $47 - p = 1$ и $47 + q = 47^2$, а значит $p = 47 - 1$, $q = 47^2 - 47$ и $p + q = 47^2 - 1 = 2208$.

Вариант IV

Задача 1. Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{17}-13}{2}}?$$

Ответ: Рациональным

Замечание. ...и это число равно 1.

Решение. Обозначим $x=\underbrace{\sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}}}_{a}-\underbrace{\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{17}-13}{2}}}_{b}$. Из формулы куба разности ясно, что

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b),$$
$$x^3=a^3-b^3-3abx.$$

Это уравнение имеет единственное решение, т. к. левая часть монотонно возрастает, а правая убывает. Подставим значения a и b: $a^3-b^3=13, ab=\sqrt[3]{\left(\frac{5\sqrt{17}+13}{2}\right)\cdot\left(\frac{5\sqrt{17}-13}{2}\right)}=\sqrt[3]{\frac{(5\sqrt{17})^2-13^2}{4}}=\sqrt[3]{\frac{256}{4}}=4,$

$$x^3=13-12x,$$
$$x=1.$$

Задача 2. На острове рыцарей и лжецов прошло математическое соревнование между командой рыцарей (которые всегда говорят правду) и командой лжецов (которые всегда лгут). В каждой команде было три человека. На соревновании предлагалось три задачи: одна по алгебре, другая по геометрии, третья по комбинаторике. После соревнования участники рассказали следующее.

Артем: Наша команда решила ровно две задачи, в том числе задачу по комбинаторике.
Борис: Мы решили только одну задачу.
Виктор: Мы не решили только задачу по алгебре.
Георгий: Мы не решили задачу по комбинаторике.
Даниил: Наша команда решила задачи по алгебре и по комбинаторике.
Евгений: Мы не справились с задачей по алгебре, но решили задачу по комбинаторике.

Определите состав команды рыцарей.

Ответ: АВЕ

Решение. Заменим имена первыми буквами. Если Г сказал правду, то А, В, Д и Е солгали. Но лжецов не может быть четверо. Следовательно, *Г солгал.* Среди Д и Е не более 1 рыцаря, среди Б и В тоже, поэтому *А рыцарь*, поэтому *Б солгал.* Среди В, Д и Е остаются 2 рыцаря. Д противоречит как В, так и Е, поэтому *В и Е рыцари*, а *Д — лжец.*

Задача 3. Владимир и Петр бегают кругами по стадиону, каждый со своей постоянной скоростью. Если они бегут в противоположных направлениях, то встречаются раз в 6 минут, а если в одном направлении, то раз в 12 минут. За сколько минут Владимир пробегает один круг? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 8 или 24 минут.

Решение. Обозначим через x и y скорости Владимира и Петра (в *кругах / минуту*). Получим систему двух линейных уравнений:

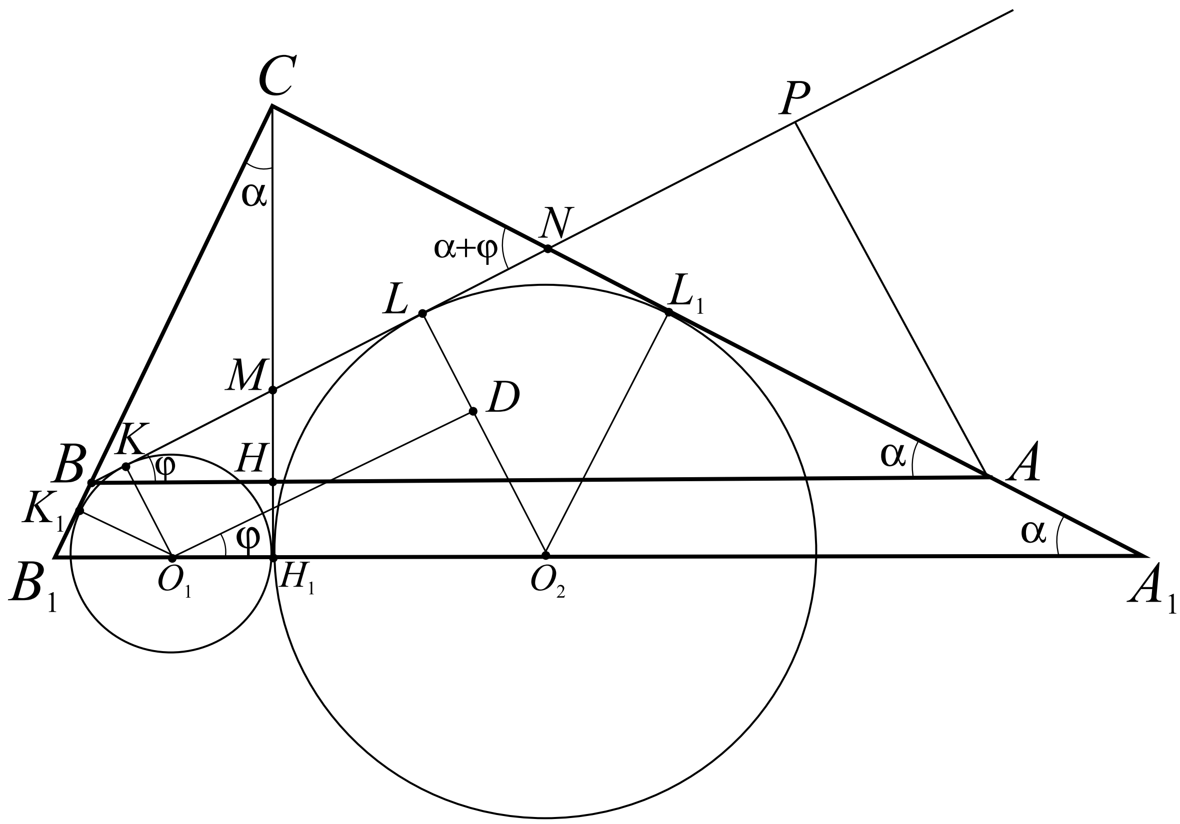
$$\begin{cases}6(x+y)=1\\12(x-y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{8}\\y=\frac{1}{24}\end{cases}\tag{4}$$

Подходят оба ответа, так как можно поменять местами бегунов. Другой способ получить $\frac{1}{24}$ как значение переменной x — заменить второе уравнение на $12(x-y)=-1$, что означает, что один из бегунов теперь не обгоняет другого на круг, а отстает на круг каждые 12 минут.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) известен острый угол $\angle BAC = 15^\circ$. Через вершину B проведена прямая, пересекающая высоту CH и катет AC в точках M и N соответственно. Известно, что площадь треугольника NAB равна $3 - \sqrt{3}$, а периметры треугольников BCM и MCN одинаковы. Найдите расстояние от вершины A до прямой BN.

Ответ: $\sqrt{6}$.

Решение. Пусть угол наклона прямой BN к гипотенузе равен φ. Рассмотрим вневписанные окруж-



ности треугольников BCM и MCN с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно. Они касаются продолжения высоты CH в одной и той же точке H_1. Докажем это. Пусть периметр треугольник BCM равен $2p$. Поскольку $BK_1 = BK$ и $MH_1 = MK$ (как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки), то $CK_1 + CH_1 = CB + BK + CM + MK = CB + BM + CM = 2p$. Но $CK_1 = CH_1$ (как отрезки касательных). Отсюда следует, что $CH_1 = p$. Точно так же для треугольника CMN и вневписанной окружности с центром O_2 получим, что точка касания с продолжением высоты CH совпадает с H_1, поскольку по условию периметры треугольников BCM и MCN равны. Следовательно, H_1 является точкой внешнего касания вневписанных окружностей.

Центры окружностей лежат на пересечении отрезка $A_1B_1 \parallel AB$ (отрезок A_1B_1 проходит через точку H_1 перпендикулярно CH) с биссектрисами углов $\angle BCH = \alpha$ и $HCA = 90^\circ - \alpha$, где $\alpha = \angle BAC = 15^\circ$. Радиусы вневписанных окружностей равны $O_1K = O_1H_1 = p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $O_2L = O_2H_1 = p \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$. Проведем из точки O_1 перпендикуляр к отрезку O_2L. Основанием этого перпендикуляра является точка D. Очевидно, $O_1D \parallel BN$, поэтому $\angle DO_1O_2 = \varphi$. Из прямоугольного треугольника O_1O_2D найдем

$$\sin\varphi = \frac{DO_2}{O_1O_2} = \frac{O_2L - DL}{O_1H_1 + O_2H_1} = \frac{O_2H_1 - O_1H_1}{O_1H_1 + O_2H_1} = \frac{p(\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})}{p(\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})}.$$

Выполним упрощение тригонометрического выражения:

$$\frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-t}{1+t} - t}{\frac{1-t}{1+t} + t} = \frac{1-t^2-2t}{1+t^2}, \quad t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\alpha$, $\frac{2t}{1+t^2} = \sin\alpha$, получим $\sin\varphi = \cos\alpha - \sin\alpha = \cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \cos(45^\circ - 35^\circ) - \sin(45^\circ - 35^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ + \sin 30^\circ - \cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда следует, что $\varphi = 45^\circ$.

Выразим теперь площадь треугольника NAB. Опустим перпендикуляр из вершины A на прямую BN, точка P – основание перпендикуляра. Нам нужно найти длину отрезка AP. В прямоугольном треугольнике ABP с острым углом $\varphi = 45^\circ$: $BP = AP$, $BN = BP - NP = AP(1 - \operatorname{ctg} 60^\circ)$. Площадь NAB можно найти по формуле $\frac{1}{2}BN \cdot AP = \frac{1}{2}AP^2(1 - 1/\sqrt{3})$. По условию, это $3 - \sqrt{3}$, откуда найдем $AP^2 = 6$, $AP = \sqrt{6}$.

Задача 5. Решите уравнение

$$\left[\frac{6\sqrt[3]{x} + 5}{8}\right] = \frac{15\sqrt[3]{x} - 7}{5},$$

где через $[c]$ обозначена целая часть действительного числа c, то есть наибольшее целое число, не превосходящее c.

Ответ: $(7/15)^3 = 343/3375$ и $(4/5)^3 = 64/125$.

Решение. Обозначим правую часть через t, тогда $\frac{15\sqrt[3]{x}-7}{5} = t$, откуда $\sqrt[3]{x} = \frac{5t+7}{15}$. Правую часть равенства заменим на t, а в левую подставим полученное выражение $\sqrt[3]{x}$ через t. После упрощения дроби в левой части получим

$$\left[\frac{10t+39}{40}\right] = t$$
$$\frac{10t+39}{40} - t \in [0, 1)$$
$$39 - 30t \in [0, 40),$$

откуда $t = 0$ или $t = 1$. Этому соответствуют $x = (7/15)^3 = 343/3375$ и $x = (4/5)^3 = 64/125$.

Задача 6. Вася написал на доске четыре числа: $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x$ и $Y \neq \sin x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными и положительными. Всегда ли Петя может определить, где именно какое число?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение. Докажем существование таких чисел x и z, что $\operatorname{tg} z = \cos x$, $\operatorname{ctg} z = Y = \frac{1}{\cos x}$, и, кроме того, $\operatorname{ctg} x = \cos z$. Тогда на доске находятся, во-первых, числа $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{tg} x$, а, во-вторых, $\cos z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{tg} z$, и невозможно определить, где какое число.

Возведём равенство $\operatorname{ctg} x = \cos z$ в степень минус два (это можно делать, так как ищем положительные решения) и получим $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 z} = \operatorname{tg}^2 z + 1 = \cos^2 x + 1$. Таким образом, необходимо решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x = \cos^2 x + 1$, что, после заменеы $t = \cos^2 x$ превращается в $\frac{1}{t} - 1 = t + 1$, откуда $(1 - t) = t^2 + t$ или $t^2 + 2t - 1 = 0$.

Это уравнение имеет подходящий корень $\sqrt{2} - 1 \neq 1$. Осталось убедиться, что при таком значении $\cos^2 x$ все четыре числа различны. Это правда, так как числа из одной пары $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ или $\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$ совпадают при квадрате косинуса, равном 1; совпадение чисел из разных пар означает равенство и вторых чисел тоже, откуда синус угла равен его тангенсу или контангенсу, что также не выполняется при найденном значении. Кроме того, $\sin x$ отсутствует на доске, так как $y > 1$; аналогично для $\sin z$. Можно также просто вычислить эти числа:

$$\sqrt{\sqrt{2}-1},\ \sqrt{\sqrt{2}+1},\ \sqrt{\sqrt{2}},\ \sqrt{1-\sqrt{1/2}}.$$

Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 12 \\ (x-1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет наибольшее количество решений?

Ответ: $3 < a < \sqrt{10}$ или $-3 > a > -\sqrt{10}$

Решение. Множество решений первого уравнения — ромб $ABCD$ (см. рисунок). Множество решений второго уравнения — окружность с центром O радиуса a. Обозначим K — проекция точки O на прямую AD и N — проекция точки O на прямую CD.

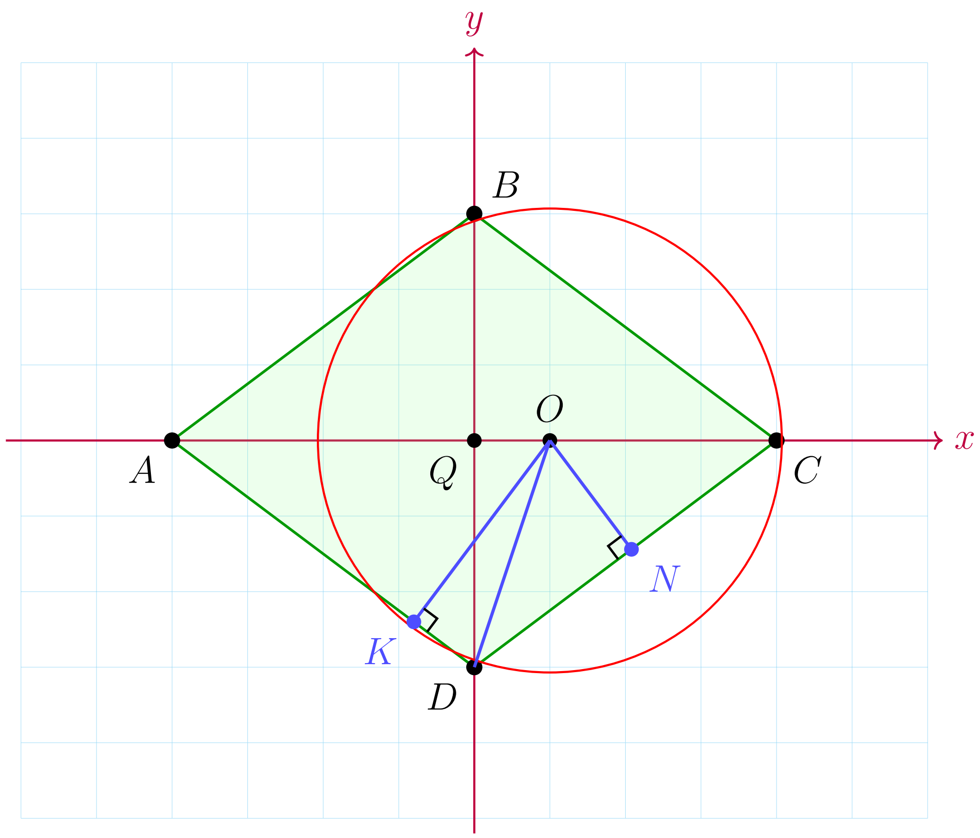
По теореме Пифагора $|OD| = \sqrt{10}$. Найдем $|OK|$ и $|ON|$. Рассмотрим треугольник AOD его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |QD| = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |OK|$. Отсюда $|OK| = 5 \cdot 3/5 = 3$. Аналогично получаем $|ON| = \frac{9}{5}$.

Окружность и прямая могут иметь не более двух точек пересечения. Для того, чтобы окружность имела две точки пересечения с отрезком CD ее радиус должен быть больше $|ON| = \frac{9}{5}$ и меньше $|OC| = 3$ и $|OD| = \sqrt{10}$. Для того, чтобы окружность имела две точки пересечения с отрезком AD ее радиус должен быть больше $|OK| = 3$ и меньше $|OD| = \sqrt{10}$ и $|OA| = 5$. Из соображений симметрии эти условия дают также две точки пресечения окружности с отрезками BC и AD.

Удовлетворить обоим условиям одновременно невозможно, следовательно, 8 решений быть не может.

Если $0 < a < 3$, то окружность не имеет общих точек с отрезком AD и система имеет не более четырех решений. При $a = 3$ окружность проходит через точки C и K, следовательно, система имеет пять решений. Если $3 < a < \sqrt{10}$, то есть две точки пересечения с отрезком AD и одна точка пересечения с отрезком CD, т.е. система имеет шесть решений.

Кроме положительных значений a подходят и противоположные им отрицательные.



Задача 8. Основанием прямой призмы $PQRP_1Q_1R_1$ служит треугольник PQR, в котором $\angle PQR = 90°, QR = 5\,\text{см}, PR = 13\,\text{см}$. Высота призмы равна 26 см. Точка S лежит на отрезке PR_1, причем $PS = \frac{3}{13}PR_1$. Жук начал движение из точки S и движется со скоростью $1\frac{\text{см}}{\text{сек}}$ по поверхности призмы. За какое наименьшее время в секундах жук может достигнуть точки Q_1?

Ответ: 25.

Решение. Рассмотрим развертку призмы без нижнего основания. Опустим перпендикуляры SS_1 и SS_2 на стороны P_1R_1 и RR_1. Точки S_1 и S_2 делят стороны P_1R_1 и RR_1 в отношении $3:13$. Кратчайший путь насекомого будет одним из отрезков SQ_1, SQ_1', SQ_1''. Заметим, что:

$$Q_1'S_1 = 12 + \frac{3}{13}\cdot 13 = 15,\ \ SS_1 = \frac{10}{13}\cdot 26 = 20,\ \ S_1Q_1 = \frac{10}{13}\cdot 13 + 5 = 15,\ \ SS_1 = \frac{10}{13}\cdot 26 = 20$$

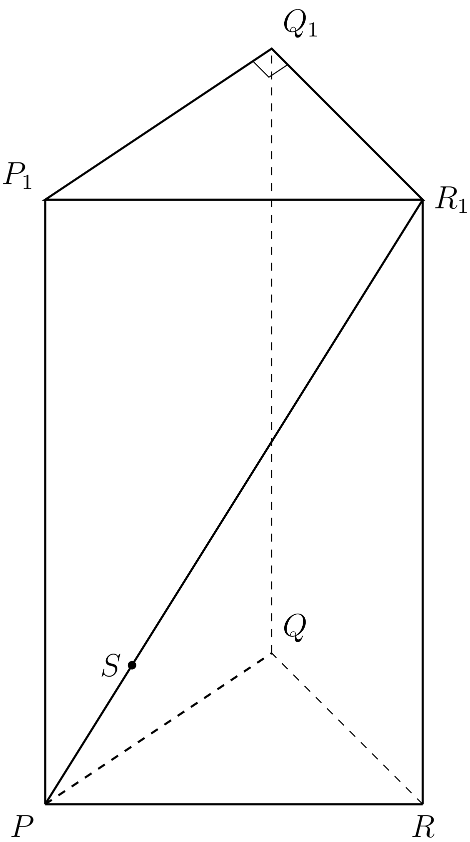
Вычислим высоту $Q_1''H$:

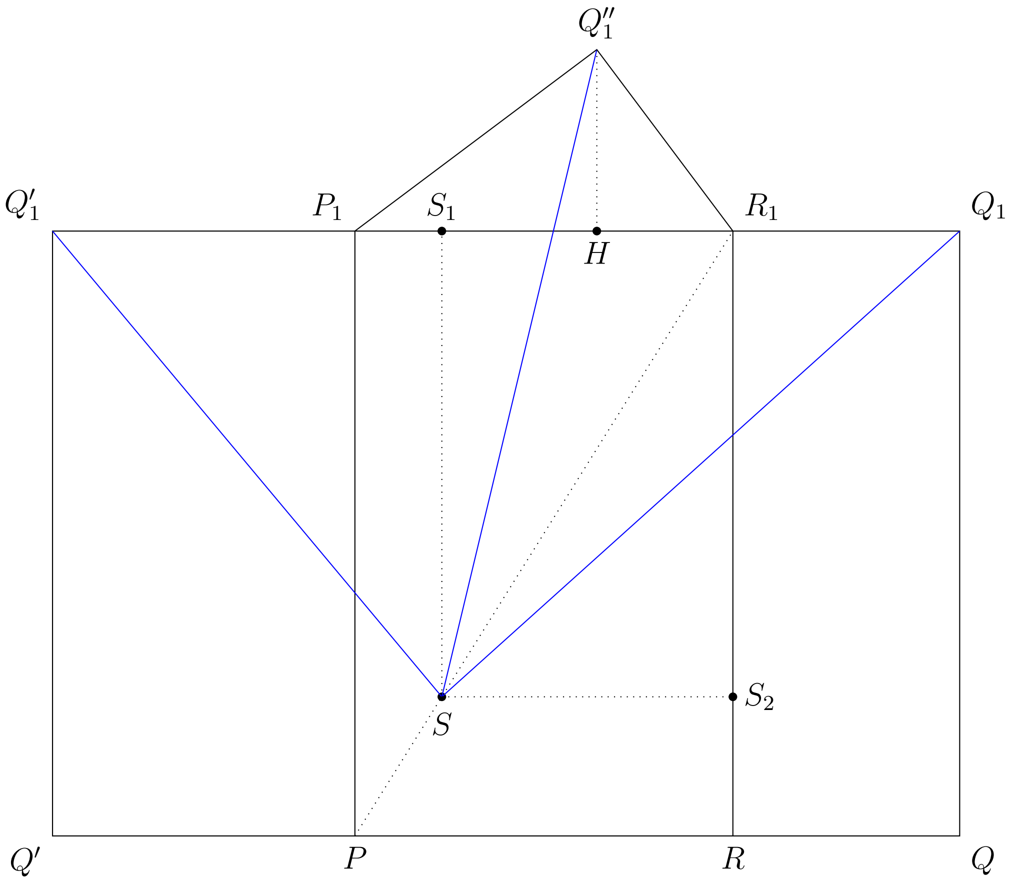
$$Q_1''H = \frac{S\triangle P_1R_1Q_1''}{\frac{1}{2}P_1R_1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5}{\frac{1}{2}\cdot 13} = \frac{60}{13}.$$

Теперь оценим длину каждого из трёх путей.

$$SQ_1' = \sqrt{15^2+20^2} = \sqrt{625} = 25,\ SQ_1 = \sqrt{15^2+20^2} = \sqrt{625} = 25,\ SQ_1'' > SS_1 + Q_1''H = 20 + \frac{60}{13} > 20+5 = 25.$$

Кратчайший путь имеет длину 25 см и займет 25 секунд.





Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ уравнению

$$f(x) + f(y) = \min\left\{f(x+y), 2\left(x-y\right), 2\left(y-x\right)\right\}.$$

Ответ: $f(x) = -2|x|$

Решение. При $y = x$

$$2f(x) = \min\left(f(2x), 0\right) \quad\Longrightarrow\quad f(x) \leqslant 0.$$

В частности, при $y = x = 0$

$$2f(0) = \min\left(f(0), 0\right) = f(0) \quad\Longrightarrow\quad f(0) = 0.$$

При $y = 0$

$$f(x) = \min\left(f(x), 2x, -2x\right) \leqslant \min\left(2x, -2x\right) = -2|x| \quad\Longrightarrow\quad f(x) \leqslant -2|x|.$$

При $y=-x$

$$f(x)+f(-x)=\min\left(f(0),4x,-4x\right)=\min\left(4x,-4x\right)=-4|x| \quad\Longrightarrow\quad f(x)+f(-x)=-4|x|.$$

Учитывая, что

$$f(x)\leqslant -2|x| \quad \text{и} \quad f(-x)\leqslant -2|-x|, \tag{1}$$

получаем

$$-4|x|=f(x)+f(-x)\leqslant -4|x|.$$

Значит, неравенства в (1) являются равенствами. В частности, $f(x)=-2|x|$ при всех вещественных x.

Покажем, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.

При $xy\geqslant 0$

$$f(x)+f(y)=-2\left(|x|+|y|\right)=-2|x+y|$$
$$f(x)+f(y)=-2\left(|x|+|-y|\right)\leqslant -2|x-y|,$$
$$f(x)+f(y)=\min(-2|x+y|,-2|x-y|)=\min(f(x+y),-2|x-y|).$$

При $xy\leqslant 0$

$$f(x)+f(y)=-2\left(|x|+|y|\right)\leqslant -2|x+y|,$$
$$f(x)+f(y)=-2\left(|x|+|-y|\right)=-2|x-y|,$$
$$f(x)+f(y)=\min(-2|x+y|,-2|x-y|)=\min(f(x+y),-2|x-y|).$$

Что равносильно уравнению из условия задачи.

Задача 10. Дана последовательность $a_k=\frac{1}{k^2+k}, k\in\mathbb{N}$. Известно, что $a_p+a_{p+1}+\ldots+a_{q-1}=\frac{1}{53}$ для некоторых натуральных p и q $(p<q)$. Найдите $p+q$.

Ответ: 2808.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, поэтому $a_p+a_{p+1}+\ldots+a_{q-1}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+1}+\ldots-\frac{1}{q}$. Кроме первого и последнего, слагаемые сокращаются в соседних парах, поэтому $a_p+\ldots+a_{q-1}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$. И далее

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{53}.$$

Преобразуем: $\frac{q-p}{pq}=\frac{1}{53}$, а значит $53q-53p-pq+53^2=53^2$. Поэтому

$$(53-p)(53+q)=53^2,\ p<q$$

Отсюда $53-p=1$ и $53+q=53^2$, а значит $p=53-1$, $q=53^2-53$ и $p+q=53^2-1=2808$.