

1 вариант

Задача 1. Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} ?$$

Задача 2. На острове рыцарей и лжецов прошло математическое соревнование между командой рыцарей (которые всегда говорят правду) и командой лжецов (которые всегда лгут). В каждой команде было три человека. На соревновании предлагалось три задачи: одна по алгебре, другая по геометрии, третья по комбинаторике. После соревнования участники рассказали следующее.

Артем: Наша команда решила все задачи.

Борис: Мы решили ровно две задачи — по геометрии и комбинаторике.

Василий: Мы решили ровно две задачи — по алгебре и по геометрии.

Григорий: Наша команда справилась с задачей по алгебре.

Дмитрий: Мы не решили геометрию.

Евгений: Мы не решили только комбинаторику.

Определите состав команды рыцарей.

Задача 3. Владимир и Петр бегают кругами по стадиону, каждый со своей постоянной скоростью. Если они бегут в противоположных направлениях, то встречаются раз в 3 минуты, а если в одном направлении, то раз в 6 минут. За сколько минут Владимир пробегает один круг? Укажите все возможные варианты.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH . Луч с началом в точке B наклонен под углом 45° к гипотенузе и пересекает отрезки CH и AC в точках M и N соответственно. Найдите $\angle BAC$, если известно, что периметры треугольников BCM и MCN равны.

Задача 5. Решите уравнение

$$\left[\frac{3x^2 + 8}{2} \right] = \frac{15x^2 - 7}{5},$$

где через $[c]$ обозначена целая часть действительного числа c , то есть наибольшее целое число, не превосходящее c .

Задача 6. Вася написал на доске четыре числа: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $Y \neq \operatorname{ctg} x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными и положительными. Всегда ли Петя может определить, где именно какое число?

Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 12 \\ x^2 + (y - 1)^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет нечетное количество решений?

Задача 8. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC , в котором $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$ см, $CB = 4$ см. Высота призмы равна 12 см. Точка K лежит на отрезке AC_1 , причем $AK = \frac{1}{3}AC_1$. Муравей начал движение из точки K и движется со скоростью $1 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ по поверхности призмы. За какое наименьшее время в секундах муравей может достигнуть точки B_1 ?

Задача 9. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ уравнению

$$2(f(x) + f(y)) = \max\{2f(x+y), x-y, y-x\}.$$

Задача 10. Дана последовательность $a_k = \frac{1}{k^2+k}$, $k \in \mathbb{N}$. Известно, что $a_p + a_{p+1} + \dots + a_{q-1} = \frac{1}{43}$ для некоторых натуральных p и q ($p < q$). Найдите $p + q$.

2 вариант

Задача 1. Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} ?$$

Задача 2. На острове рыцарей и лжецов прошло математическое соревнование между командой рыцарей (которые всегда говорят правду) и командой лжецов (которые всегда лгут). В каждой команде было три человека. На соревновании предлагалось три задачи: одна по алгебре, другая по геометрии, третья по комбинаторике. После соревнования участники рассказали следующее.

Андрей: Наша команда не решила задачу по алгебре.

Борис: Задачи по геометрии и комбинаторике мы решили.

Василий: Задачи по алгебре и по геометрии мы решили.

Геннадий: Наша команда справилась с задачей по алгебре, но всего решила две задачи.

Дмитрий: Мы не решили только геометрию.

Евгений: Мы не решили только комбинаторику.

Определите состав команды рыцарей.

Задача 3. Владимир и Петр бегают кругами по стадиону, каждый со своей постоянной скоростью. Если они бегут в противоположных направлениях, то встречаются раз в 4 минуты, а если в одном направлении, то раз в 12 минут. За сколько минут Владимир пробегает один круг? Укажите все возможные варианты.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) гипотенуза $AB = 10$. Через вершину B проведена прямая, пересекающая высоту CH и катет AC в точках M и N соответственно. Известно, что расстояние от точки A до этой прямой равно 6, а периметры треугольников BCM и MCN равны. Найдите BC .

Задача 5. Решите уравнение

$$\left[\frac{6\sqrt{x} + 5}{5} \right] = \frac{9\sqrt{x} - 8}{5},$$

где через $[c]$ обозначена целая часть действительного числа c , то есть наибольшее целое число, не превосходящее c .

Задача 6. Вася написал на доске четыре числа: $\sin x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x$ и $Y \neq \cos x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными и положительными. Всегда ли Петя может определить, где именно какое число?

Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 12 \\ x^2 + (y - 1)^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет наибольшее количество решений?

Задача 8. Основанием прямой призмы $DEFD_1E_1F_1$ служит треугольник DEF , в котором $\angle DEF = 90^\circ$, $DE = 12$ см, $DF = 20$ см. Высота призмы равна 80 см. Точка P лежит на отрезке DF_1 , причем $DP = \frac{3}{5}DF_1$. Жук начал движение из точки P и движется со скоростью $2 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ по поверхности призмы. За какое наименьшее время в секундах жук может достигнуть точки E_1 ?

Задача 9. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ уравнению

$$f(x) + f(y) = \max \{f(x + y), 2(x - y), 2(y - x)\}.$$

Задача 10. Дана последовательность $a_k = \frac{1}{k^2 + k}$, $k \in \mathbb{N}$. Известно, что $a_p + a_{p+1} + \dots + a_{q-1} = \frac{1}{41}$ для некоторых натуральных p и q ($p < q$). Найдите $p + q$.

3 вариант

Задача 1. Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt[3]{18 + 5\sqrt{13}} - \sqrt[3]{5\sqrt{13} - 18} ?$$

Задача 2. На острове рыцарей и лжецов прошло математическое соревнование между командой рыцарей (которые всегда говорят правду) и командой лжецов (которые всегда лгут). В каждой команде было три человека. На соревновании предлагалось три задачи: одна по алгебре, другая по геометрии, третья по комбинаторике. После соревнования участники рассказали следующее.

Алексей: Наша команда решила всего одну задачу.

Борис: Мы решили всего две задачи, в том числе геометрию.

Василий: Мы решили все задачи.

Григорий: Задачи по алгебре и комбинаторике наша команда решила.

Дмитрий: Мы не решили задачу по комбинаторике.

Евгений: Задачу по геометрии мы решили, а задачу по алгебре не решили.

Определите состав команды рыцарей.

Задача 3. Владимир и Петр бегают кругами по стадиону, каждый со своей постоянной скоростью. Если они бегут в противоположных направлениях, то встречаются раз в 8 минут, а если в одном направлении, то раз в 24 минуты. За сколько минут Владимир пробегает один круг? Укажите все возможные варианты.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) известен острый угол: $\angle BAC = \arcsin \frac{5}{13}$. Луч с началом в точке B наклонен под углом φ к гипотенузе и пересекает высоту CH и катет AC в точках M и N соответственно. Найдите угол φ , если известно, что периметры треугольников BCM и MCN равны.

Задача 5. Решите уравнение

$$\left[\frac{8x^3 + 8}{3} \right] = \frac{4x^3 - 7}{3},$$

где через $[c]$ обозначена целая часть действительного числа c , то есть наибольшее целое число, не превосходящее c .

Задача 6. Вася написал на доске четыре числа: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$ и $Y \neq \operatorname{tg} x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными и положительными. Всегда ли Петя может определить, где именно какое число?

Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 12 \\ (x-1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет нечетное количество решений?

Задача 8. Основанием прямой призмы $KLMK_1L_1M_1$ служит треугольник KLM , в котором $\angle LKM = 90^\circ$, $KM = 12$ см, $LK = 5$ см. Высота призмы равна 24 см. Точка N лежит на отрезке K_1M , причем $K_1N = \frac{5}{6}K_1M$. Муравей начал движение из точки N и движется со скоростью $5 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ по поверхности призмы. За какое наименьшее время в секундах муравей может достигнуть точки L_1 ?

Задача 9. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ уравнению

$$2(f(x) + f(y)) = \min \{2f(x+y), x-y, y-x\}.$$

Задача 10. Дана последовательность $a_k = \frac{1}{k^2+k}$, $k \in \mathbb{N}$. Известно, что $a_p + a_{p+1} + \dots + a_{q-1} = \frac{1}{47}$ для некоторых натуральных p и q ($p < q$). Найдите $p+q$.

4 вариант

Задача 1. Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt[3]{\frac{13 + 5\sqrt{17}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{17} - 13}{2}} ?$$

Задача 2. На острове рыцарей и лжецов прошло математическое соревнование между командой рыцарей (которые всегда говорят правду) и командой лжецов (которые всегда лгут). В каждой команде было три человека. На соревновании предлагалось три задачи: одна по алгебре, другая по геометрии, третья по комбинаторике. После соревнования участники рассказали следующее.

Артем: Наша команда решила ровно две задачи, в том числе задачу по комбинаторике.

Борис: Мы решили только одну задачу.

Виктор: Мы не решили только задачу по алгебре.

Георгий: Задачу по комбинаторике мы не решили.

Даниил: Задачи по алгебре и по комбинаторике наша команда решила.

Евгений: Мы не справились с задачей по алгебре, но решили задачу по комбинаторике.

Определите состав команды рыцарей.

Задача 3. Владимир и Петр бегают кругами по стадиону, каждый со своей постоянной скоростью. Если они бегут в противоположных направлениях, то встречаются раз в 6 минут, а если в одном направлении, то раз в 12 минут. За сколько минут Владимир пробегает один круг? Укажите все возможные варианты.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) известен острый угол $\angle BAC = 15^\circ$. Через вершину B проведена прямая, пересекающая высоту CH и катет AC в точках M и N соответственно. Известно, что площадь треугольника NAB равна $3 - \sqrt{3}$, а периметры треугольников BCM и MCN одинаковы. Найдите расстояние от вершины A до прямой BN .

Задача 5. Решите уравнение

$$\left[\frac{6\sqrt[3]{x} + 5}{8} \right] = \frac{15\sqrt[3]{x} - 7}{5},$$

где через $[c]$ обозначена целая часть действительного числа c , то есть наибольшее целое число, не превосходящее c .

Задача 6. Вася написал на доске четыре числа: $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x$ и $Y \neq \sin x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными и положительными. Всегда ли Петя может определить, где именно какое число?

Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 12 \\ (x - 1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет наибольшее количество решений?

Задача 8. Основанием прямой призмы $PQRP_1Q_1R_1$ служит треугольник PQR , в котором $\angle PQR = 90^\circ$, $QR = 5$ см, $PR = 13$ см. Высота призмы равна 26 см. Точка S лежит на отрезке PR_1 , причем $PS = \frac{3}{13}PR_1$. Жук начал движение из точки S и движется со скоростью $1 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ по поверхности призмы. За какое наименьшее время в секундах жук может достигнуть точки Q_1 ?

Задача 9. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ уравнению

$$f(x) + f(y) = \min \{f(x + y), 2(x - y), 2(y - x)\}.$$

Задача 10. Дана последовательность $a_k = \frac{1}{k^2 + k}$, $k \in \mathbb{N}$. Известно, что $a_p + a_{p+1} + \dots + a_{q-1} = \frac{1}{53}$ для некоторых натуральных p и q ($p < q$). Найдите $p + q$.