1.1. Известно, что число a является корнем уравнения $x^3 + 7x - 9 = 0$. Найдите значение выражения $\dfrac{2a^3 + 3a}{11a - 18}$.

Ответ: -1.

Если a — корень уравнения $x^3 + 7x - 9 = 0$, то $a^3 = 9 - 7a$, следовательно,

$$\frac{2a^3 + 3a}{11a - 18} = \frac{2(9 - 7a) + 3a}{11a - 18} = \frac{18 - 11a}{11a - 18} = -1.$$

1.2. Могут ли длины сторон a, b и c прямоугольного треугольника удовлетворять соотношению $a^2 + b^2 = 5c^2$?

Ответ: могут. Например, $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$. В прямоугольном треугольнике с катетами $c = 1$ и $b = \sqrt{2}$ гипотенуза $a = \sqrt{3}$.

1.3. Сколько десятизначных чисел можно составить так, чтобы любые две соседние цифры отличались на единицу, если в их десятичной записи можно использовать только цифры 1, 2 и 3?

Ответ: 64 числа.

Решение. Рядом как с цифрой 1, так и с цифрой 3 может стоять только цифра 2, поэтому в любом из рассматриваемых десятизначных чисел каждая вторая цифра — двойка. На каждое из оставшихся пяти мест можно поставить либо единицу, либо тройку. Количество способов это сделать равно $2^5 = 32$. Кроме того, мы можем выбрать, будут ли двойки стоять на чётных или на нечётных местах. Поэтому полученное количество способов нужно удвоить.

2.1. При каких натуральных значениях n выражение $n^2 + (n-1)^2 + n^2(n-1)^2$ является полным квадратом?

Ответ: при всех.

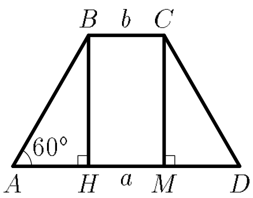
Решение.

$$n^2 + (n-1)^2 + n^2(n-1)^2 = n^2 + n^2 - 2n + 1 + n^4 - 2n^3 + n^2 = n^4 + n^2 + 1 - 2n^3 + 2n^2 - 2n = (n^2 - n + 1)^2$$

Возможны также другие способы. Например,

$$n^2 + (n-1)^2 + n^2(n-1)^2 =$$
$$= n^2 \underline{-2n(n-1)} + (n-1)^2 \underline{+2n(n-1)} + n^2(n-1)^2 =$$
$$= (n - (n-1))^2 + 2n(n-1) + n^2(n-1)^2 =$$
$$= 1 + 2n(n-1) + n^2(n-1)^2 = (1 + n(n-1))^2 = (n^2 - n + 1)^2.$$

2.2. Один из углов трапеции равен $60°$. Найдите отношение её оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.



Ответ: $1:3$.

Решение. 1) Так как трапеция $ABCD$ — вписанная, то она равнобокая, то есть $AB = CD$.

2) Так как трапеция $ABCD$ — описанная, то $AB + CD = BC + AD$. Следовательно, $AB = \dfrac{AD + BC}{2}$. Пусть $AD = a$, $BC = b$. Проведем высоты BH и CM (см. рис.). $AH = DM = \dfrac{a - b}{2}$. Так как $\angle BAH = 60°$, $\angle ABH = 30°$, следовательно, $AB = 2AH$. Получим, что $\dfrac{a + b}{2} = a - b$, а это равносильно тому, что $a = 3b$.

2.3. Сравните числа A и B, не используя калькулятор:

$$A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20 \quad \text{и} \quad B = 1 + 2 + 3 + \cdots + 999\,999 + 1\,000\,000.$$

Ответ: A больше B.

Решение.

$$B < 1\,000\,000 \cdot 1\,000\,000 = 10^{12} < 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20 = A.$$

3.1. Решите уравнение $15(x+1) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5|$.

Ответ: $x = 0$.

Решение. Числа 1, 2, 3, 4, 5 разбивают числовую прямую на 6 промежутков.

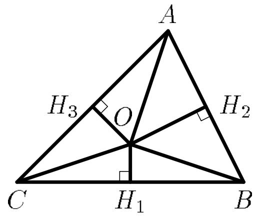
Первый способ.

$$\text{Если } x \in [5, +\infty), \text{ то } 15x + 15 = 5x - 15,\ x = -3 \notin [5, +\infty);$$
$$\text{если } x \in [4, 5), \text{ то } 15x + 15 = 3x - 5,\ x = -20/3 \notin [4, 5];$$
$$\text{если } x \in [3, 4), \text{ то } 15x + 15 = x + 3,\ x = -12/14 \notin [3, 4];$$
$$\text{если } x \in [2, 3), \text{ то } 15x + 15 = -x + 9,\ x = -3/8 \notin [2, 3];$$
$$\text{если } x \in [1, 2), \text{ то } 15x + 15 = -3x + 13,\ x = -1/9 \notin [1, 2];$$
$$\text{если } x \in (-\infty, 1], \text{ то } 15x + 15 = -5x + 15,\ x = 0 \in (-\infty, 1].$$

Второй способ. Функция $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| - 15x - 15$ убывает, так как на каждом из шести промежутков при раскрытии модулей функция имеет вид $y = k_i x + b_i$, причем все $k_i < 0$. На каждом промежутке функция убывает. График функции представляет собой ломаную. Для того, чтобы ломаная пересекала ось x хотя бы дважды, необходимо, чтобы хотя бы на одном промежутке ломаная "шла вверх" (функция на этом промежутке должна возрастать). Противоречие.

3.2. В треугольнике ABC: $\angle A > \angle B > \angle C$. К какой из сторон треугольника ближе всего расположен центр окружности, описанной около этого треугольника?

Ответ: центр расположен ближе к стороне BC.



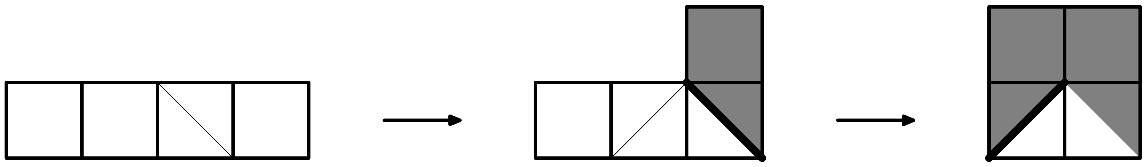
Решение. 1) Пусть O — центр описанной окружности (см. рис.). Соединим точку O с вершинами треугольника и опустим перпендикуляры на стороны: $OH_1 \perp CB$, $OH_2 \perp AB$, $OH_3 \perp AC$. Тогда H_1, H_2 и H_3 — середины сторон треугольника.

2) Так как $\angle A > \angle B > \angle C$, то $CB > AC > AB$; следовательно $CH_1 > AH_3 > BH_2$. Так как в прямоугольных треугольниках OCH_1, OBH_2 и OAH_3 гипотенузы равны, то $OH_1 < OH_3 < OH_2$.

Данное решение не зависит от того, расположен ли центр описанной окружности внутри или вне треугольника, то есть не зависит от вида треугольника.

3.3. За одну операцию разрешается разрезать многоугольник на две части по любому отрезку, перевернуть одну из частей и склеить эти части по тому же отрезку. Можно ли за несколько таких операций из прямоугольника 5×20 получить квадрат 10×10?

Ответ: можно.



Решение. Сторона каждого квадратика на рисунке равна 5. Тонкие линии показывают, по каким отрезкам фигуру разрезают, а жирные — линии склейки. На каждом следующем рисунке изображена фигура, получающаяся после склейки.

4.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$

Ответ: (1,1,1).

Решение. Первый способ. Из первого уравнения $z = 3 - x - y$. Подставив это во второе уравнение, получим

$$x^2 + y^2 + 9 + x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2xy = 3.$$

Данное уравнение можно рассматривать как квадратное относительно x:

$$x^2 + (y-3)x + (y^2 - 3y + 3) = 0.$$

Тогда его дискриминант $D = (y-3)^2 - 4(y^2 - 3y + 3) = -3y^2 + 6y - 3 = -3(y-1)^2 \leqslant 0$. Следовательно, уравнение имеет решение только если $D = 0$, то есть $y = 1$. Полученное квадратное уравнение примет вид $x^2 - 2x + 1 = 0$, значит $x = 1$. из первого уравнения системы получим, что и $z = 1$.

Второй способ. Возведем первое уравнение системы в квадрат:

$$\begin{cases} (x+y+z)^2 & = & 9, \\ x^2+y^2+z^2 & = & 3. \end{cases}$$

Раскроем скобки:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz & = & 9, \\ x^2+y^2+z^2 & = & 3. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, и домножим второе уравнение на 2:

$$\begin{cases} 2xy+2yz+2xz & = & 6, \\ 2x^2+2y^2+2z^2 & = & 6. \end{cases}$$

Приравняем полученные выражения:

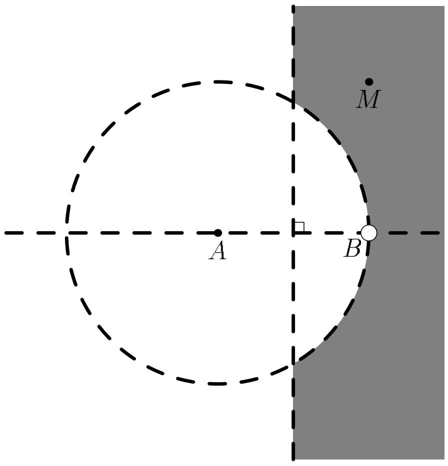
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2xz.$$

Перенеся все члены в левую часть, выделим полные квадраты:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0.$$

Отсюда $x = y = z$. Из первого уравнения получим, что $x = y = z = 1$. Найденное решение удовлетворяет и второму уравнению системы.

4.2. A и B — фиксированные точки на плоскости. Укажите Найдите геометрическое место точек M этой плоскости, для которых выполняется условие: $\angle ABM$ — наибольший из углов треугольника ABM.



Ответ: см. рисунок.

Решение. I. Пусть M — точка плоскости, удовлетворяющая условию.

1) Так как $\angle ABM$ — наибольший в $\triangle ABM$, то AM — наибольшая сторона, то есть $AM > AB$ и $AM > BM$.

2) Так как $AM > AB$, то M — вне круга $(A; AB)$.

3) Так как $AM > BM$, то точки M и B лежат в одной полуплоскости относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB.

4) Так как AMB — треугольник, то M не лежит на прямой AB.

II. Пусть M принадлежит заштрихованной области.

1) Так как M не лежит на прямой AB, то AMB — треугольник.

2) Так как M вне круга $(A; AB)$, то $AM > AB$.

3) Так как M, B — в одной полуплоскости относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB, то $AM > BM$. Итак, в $\triangle AMB$ сторона AM — наибольшая, следовательно, $\angle ABM$ — наибольший.

4.3. На столе поставлены в один ряд N стаканов, перевёрнутые вверх дном. Разрешается одновременно переворачивать два стакана, стоящие через один. При каких значениях N можно добиться того, чтобы все стаканы стояли дном вниз?

Ответ: при N, кратных 4.

Решение. Стаканы, стоящие на нечетных местах, покрасим в красный цвет, а остальные — в белый. Каждая операция позволяет перевернуть два стакана одного цвета. Поэтому чётность количества стаканов одного цвета, стоящих вниз дном, не изменяется. Вначале дном вниз не стоит ни одного стакана, значит, для того чтобы все стаканы оказались перевернутыми, необходимо, чтобы стаканов каждого цвета было четное количество, то есть N должно делиться на 4. Если N делится на 4, то все стаканы можно перевернуть: разделим ряд стаканов на группы по 4, и в каждой группе перевернем сначала два белых, а затем два красных стакана.

5.1. При каких значения параметра a разность корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

Ответ: 2.

Решение. Первый способ. Исходное уравнение равносильно уравнению $(x-3)^2 + (a-2)^2 = 1$. Графиком этого уравнения в системе координат (x, a) является окружность с центром в точке $(3; 2)$ и радиусом 1 (см. рис.). Рассмотрим произвольную прямую, параллельную оси x и пересекающую окружность в двух точках. Абсциссы этих точек x_1 и x_2 являются корнями уравнения, а разность $x_2 - x_1$ равна длине хорды окружности. Эта разность будет наибольшей, в случае, если хорда является диаметром, то есть при $a = 2$.

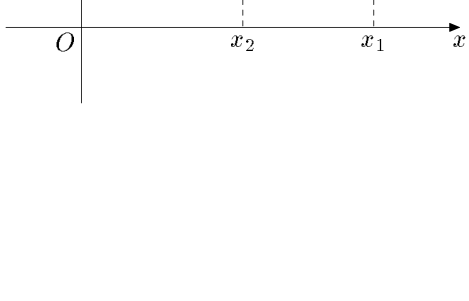
Второй способ. Данное уравнение имеет два различных корня, если

$$D/4 = 9 - 12 - a^2 + 4a = -a^2 + 4a - 3 > 0.$$

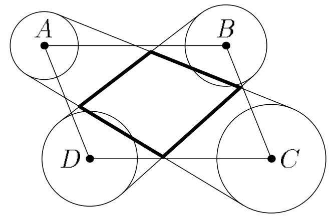
Разность $x_2 - x_1 = 3 + \sqrt{D/4} - (3 - \sqrt{D/4}) = \sqrt{D}$ принимает наибольшее значение при наибольшем значении дискриминанта. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$D = -a^2 + 4a - 3 = -(a-2)^2 + 1.$$

Он принимает наибольшее значение при $a = 2$, и это значение положительно.



5.2. Вершины параллелограмма $ABCD$ являются центрами непересекающихся окружностей, радиусы которых равны соответственно 5, 6, 8 и 7 (см. рис.). К окружностям с центрами в противолежащимих вершинах проведены общие внешние касательные, которые образуют новый четырёхугольник. Докажите, что в него можно вписать окружность и найдите её радиус.

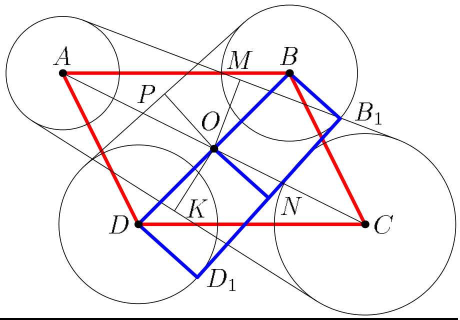


Ответ: $r = 6,5$.

Решение. 1) Рассмотрим точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Пусть B_1 и D_1 — точки касания (см. рис.). Тогда BB_1D_1D — прямоугольная трапеция. Перпендикуляр ON к отрезку B_1D_1 является ее средней линией. Следовательно, $ON = \dfrac{BB_1 + DD_1}{2} = \dfrac{6+7}{2} = 6,5$. Перпендикуляр OP, опущенный на другую касательную к той же паре окружностей, равен ON.

2) Аналогично, перпендикуляры OK и OM, опущенные на две другие касательные, равны $\dfrac{6+7}{2} = 6,5$.

Таким образом, точка O равноудалена от всех касательных, следовательно, она является центром окружности, радиус которой равен $6,5$.



5.3. Найдите среднее арифметическое всех пятизначных чисел-палиндромов (чисел, которые справа налево и слева направо читаются одинаково, например, 12421).

Ответ: 55000.

Решение. Будем отдельно считать суммы единиц, десятков, сотен и т. д., встречающихся в этих палиндромах. Любой палиндром имеет вид $\overline{abcba}$. Для каждой цифры в разряде сотен существует $90 = 9 \cdot 10$ вариантов выбора a и b ($a \neq 0$). Поэтому общее количество палиндромов равно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Сумма всех сотен в палиндромах равна

$$(0 + 100 + 200 + \ldots + 800 + 900) \cdot 90 = (1 + 2 + \ldots + 8 + 9) \cdot 100 \cdot 90 = 45 \cdot 90 \cdot 100.$$

Аналогично, сумма всех тысяч и десятков равна

$$(0 + 1010 + 2020 + \ldots + 8080 + 9090) \cdot 90 = (1 + 2 + \ldots + 8 + 9) \cdot 1010 \cdot 90 = 45 \cdot 90 \cdot 1010,$$

сумма всех десятков тысяч и единиц равна

$$(10001 + 20002 + 30003 + \ldots + 80008 + 90009) \cdot 100 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9) \cdot 10001 \cdot 100 = 45 \cdot 100 \cdot 10001.$$

Таким образом среднее арифметическое всех чисел-палиндромов равно

$$\frac{45 \cdot 90 \cdot 100 + 45 \cdot 90 \cdot 1010 + 45 \cdot 100 \cdot 10001}{900} = \frac{45 \cdot (9000 + 90\,900 + 1\,000\,100)}{900} = \frac{1\,100\,000}{20} = 55\,000.$$