11 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Решите уравнение: $x^6 + x^4 + x^2 = 3$.

Ответ: ± 1.

Пусть $x^2 = t \geq 0$, тогда уравнение примет вид: $t^3 + t^2 + t = 3$. Далее возможны различные способы решения.

Первый способ. Функция $f(t) = t^3 + t^2 + t$ возрастает на $[0; +\infty)$, следовательно, уравнение $f(t) = 3$ имеет не более одного неотрицательного корня. Так как $f(1) = 3$, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 = 1$, то есть $x = \pm 1$.

Второй способ. $\begin{cases} t^3 + t^2 + t = 3, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t^3 - 1) + (t^2 - 1) + (t - 1) = 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t^2 + 2t + 3) = 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ (t+1)^2 + 2 = 0, \end{array}\right. \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$. Таким образом, $x = \pm 1$.

1.2. Существует ли выпуклый многогранник, у которого нечетное количество граней и каждая грань – нечетноугольник?

Ответ: нет, не существует.

Предположим, что искомый многогранник существует. Найдем количество его ребер, сложив сначала количество ребер в каждой грани. Получится нечетное число. Но каждое ребро является общим для двух граней, то есть было учтено дважды, значит, при сложении должно получиться четное число. Полученное противоречие показывает, что многогранника, описанного в условии, не существует.

1.3. Решите уравнение $pq + r = r^2$, если p, q и r – простые числа.

Ответ: $p = 2$, $q = 3$, $r = 3$ или $p = 3$, $q = 2$, $r = 3$.

Приведем уравнение к виду $pq = r(r - 1)$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Правая часть уравнения является четным числом при всех натуральных значениях r, следовательно, $p = 2$ или $q = 2$.

Если $r = 2$, то $pq = 2$, то есть $p = 1$ или $q = 1$, что противоречит условию. Следовательно, r – нечетное число, тогда число $r - 1$ четное, то есть $r - 1 = 2d$, где d – натуральное число. Подставляя, получим, что $pq = 2rd$. Если $d \neq 1$, то в левой части равенства два простых множителя, а в правой части – не меньше трех, что невозможно. Значит, $d = 1$ и $r = 3$. При этом, если $p = 2$, то $q = 3$ (или наоборот).

Второй способ. Заметим, что полученное уравнение симметрично относительно переменных p и q. Пусть $p \geq q$, тогда, так как p и q – простые числа, то $\begin{cases} r = pq \\ r - 1 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} r = p \\ r - 1 = q \end{cases}$. Первая система уравнений не имеет решений, если p, q и r – простые числа.

Так как одно из чисел r или $r - 1$ – четное, то из уравнений второй системы следует, что $r - 1 = 2$. Тогда $r = p = 3$, $q = 2$.

В случае, когда $q \geq p$ в силу симметрии получится: $r = q = 3$, $p = 2$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Докажите, что при $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$ выполняется неравенство $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} > 1$.

Добавим к знаменателям данных дробей положительные числа, тогда $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} > \frac{x}{y+z+x}+\frac{y}{z+x+y}+\frac{z}{x+y+z} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$, что и требовалось.

Отметим, что можно сделать и более точную оценку «снизу» суммы данных дробей. Пусть $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$, *тогда* $\frac{a+b+c}{2} = x + y + z$, *поэтому,* $x = \frac{a-b+c}{2}$, $y = \frac{a+b-c}{2}$, $z = \frac{b+c-a}{2}$.

Таким образом, $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} = \frac{a-b+c}{2b} + \frac{a+b-c}{2c} + \frac{b+c-a}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-3\right) \geq \frac{3}{2}$, *так как сумма взаимно обратных положительных чисел больше или равна двум. Равенство достигается, если* $a = b = c$.

2.2. В треугольнике *ABC* проведена высота *AD*, точки *P* и *Q* – середины двух других высот, *H* – ортоцентр (*точка пересечения высот*), *E* – середина стороны *BC*. Докажите, что точки *D*, *H*, *P*, *Q* и *E* лежат на одной окружности.

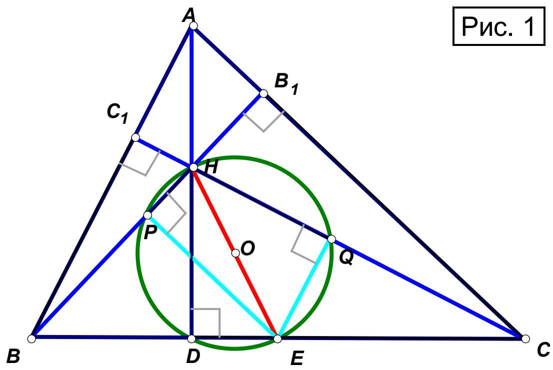

Рис. 1

Рассмотрим окружность с диаметром *HE* (см. рис. 1). Так как по условию угол *HDE* – прямой, то точка *D* лежит на этой окружности. Пусть BB_1 и CC_1 – высоты треугольника *ABC*. Тогда отрезки *EP* и *EQ* – средние линии прямоугольных треугольников CB_1B и BC_1C соответственно. Следовательно, $EP \perp BB_1$ и $EQ \perp CC_1$, то есть отрезок *HE* виден из точек *P* и *Q* под углом 90°. Значит, точки *P* и *Q* также лежат на рассмотренной окружности.

2.3. Какое наименьшее количество прямых на плоскости надо провести, чтобы получить ровно восемь точек их попарного пересечения (*три прямые через одну точку проходить не могут*)?

<u>Ответ</u>: пять прямых.

Если n прямых расположены так, что любые две пересекаются и точки пересечения различны, то общее количество точек пересечения равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Для $n = 4$ это число равно 6, поэтому необходимо провести не менее пяти прямых (если какие-то прямые не пересекаются, то количество точек попарного пересечения еще меньше).

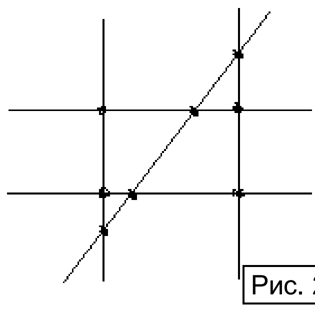
Рис. 2

Пять прямых можно расположить указанным образом. Один из возможных примеров – см. рис. 2 (на чертеже есть две пары параллельных прямых).

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Найдите наименьшее положительное значение суммы $x + y + z$, если $\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y + \mathrm{tg}z = \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y \cdot \mathrm{tg}z$.

<u>Ответ</u>: π.

Преобразуем данное равенство: $\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y + \mathrm{tg}z = \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y \cdot \mathrm{tg}z \Leftrightarrow \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = -\mathrm{tg}z(1 - \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y)$ и рассмотрим два случая:

1) $1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y = 0$. Тогда tg$x$ и tg$y$ – взаимно обратные числа, но в этом случае исходное равенство примет вид $tgx + \frac{1}{tgx} + tgz = tgz$, что не выполняется ни при каких значениях z.

2) $1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y \neq 0$. Тогда равенство примет вид $\frac{tgx + tgy}{1 - tgxtgy} = -tgz \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{tg}(-z) \Leftrightarrow x + y + z = \pi n$, $n \in Z$. Следовательно, наименьшее положительное значение $x + y + z$ равно π.

Так как функция тангенс определена не везде, то осталось указать какие-нибудь значения переменных, для которых $x + y + z = \pi$ и при этом выполняются условия: $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$ и $\cos z \neq 0$ (*условие $\cos(x + y) \neq 0$ для этого случая выполняется автоматически*). Такие значения существуют, например, $x = y = z = \frac{\pi}{3}$.

Отметим, что существуют и другие способы преобразования данного равенства, в частности, использующие формулу суммы тангенсов. При этом, при любом способе решения необходимо учитывать изменения областей определений выражений.

3.2. Можно ли разрезать квадрат на три попарно подобных, но не равных прямоугольника?

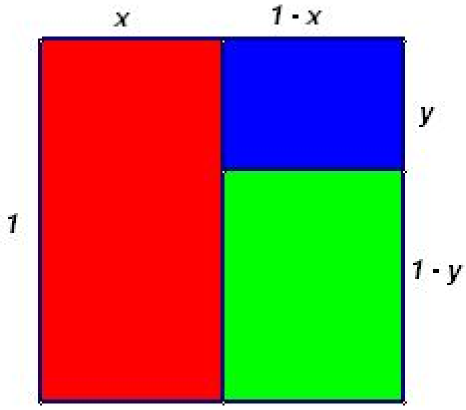

Рис. 3

Ответ: да, можно.

Для удобства рассмотрим квадрат со стороной 1. Разобьем его на три прямоугольника (см. рис. 3) и докажем, что существуют такие x и y ($0 < x < 1$, $0 < y < 1$), что эти прямоугольники попарно подобны.

Подобие прямоугольников означает, что у этих прямоугольников отношение большей стороны к меньшей одинаково, то есть $\frac{1}{x} = \frac{1-x}{y} = \frac{1-y}{1-x}$.

Из первой пропорции получим, что $y = x - x^2$, значит, $1 - y = 1 - x + x^2$. Подставляя эти выражения во вторую пропорцию, получим уравнение: $\frac{1-x}{x(1-x)} = \frac{1-x+x^2}{1-x}$. Так как знаменатели дробей положительны, то оно равносильно кубическому уравнению $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$.

Докажем, что такое уравнение имеет хотя бы один корень в интервале (0; 1). Действительно, функция $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ непрерывная (так как представляет собой многочлен) и при этом $f(0) = -1$, а $f(1) = 1$, то есть на [0; 1] функция принимает значения разных знаков. Следовательно, внутри этого отрезка найдется такое число x_0, что $f(x_0) = 0$.

Найдем и оценим соответствующее значение y: $y_0 = x_0 - x_0^2 = -(x_0 - 0{,}5)^2 + 0{,}25$. Если $0 < x_0 < 1$, то $0 \leq (x_0 - 0{,}5)^2 < 0{,}25$, значит, $0 < y_0 \leq 0{,}25$.

При таком значении y_0 синий и зеленый прямоугольники не равны. Таким образом, требуемое разрезание квадрата возможно.

Можно доказать, что полученный многочлен имеет единственный действительный корень. Для этого достаточно найти его производную: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ и проверить, что дискриминант этого трехчлена отрицательный, то есть $f'(x) > 0$. Значит, $f(x)$ – возрастающая функция.

Также можно доказать, что с точки зрения геометрии других вариантов разрезания квадрата на подобные прямоугольники не существует, поэтому указанный в решении способ разрезания – единственный. При этом отношение сторон прямоугольников будет выражаться через кубические корни, поэтому построение *такого разбиения произвольного квадрата только с помощью циркуля и линейки невозможно.*

3.3. Можно ли на шахматной доске поставить 5 ладей на белые и 3 ладьи на чёрные клетки так, чтобы они попарно не били друг друга?

Ответ: нет, нельзя.

Рассмотрим шахматную доску со стандартной раскраской (левый нижний угол – черный). Занумеруем строки и столбцы шахматной доски так, как показано на рис. 4, тогда каждой клетке будет соответствовать пара натуральных чисел (m; n), где $1 \le m \le 8$ и $1 \le n \le 8$, которую можно считать координатами этой клетки.

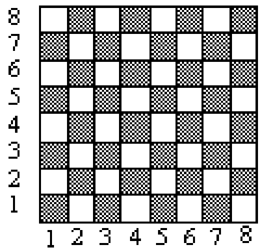

Рис. 4

Пусть восемь ладей не бьют друг друга, тогда в каждой горизонтали и в каждой вертикали стоит ровно по одной ладье. В этом случае сумма координат всех занятых ладьями клеток равна $2(1 + 2 + 3 + \ldots + 8)$ – четному числу. Заметим, что каждая черная клетка имеет четную сумму координат, а каждая белая клетка – нечетную. Таким образом, сумма координат пяти белых клеток, в которых расположены ладьи, нечетна. Следовательно, и сумма координат всех восьми клеток, в которых расположены ладьи, нечетна. Полученное противоречие показывает, что требуемая расстановка невозможна.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Известно, что уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ имеет ровно три корня. Найдите хотя бы один из них.

Ответ: если $a = 0$, то уравнение имеет корень 0; если $a \ne 0$, то один из корней уравнения: 1 или –1.

Рассмотрим два случая: 1) $a = 0$; 2) $a \ne 0$.

1) Если $a = 0$, то данное уравнение примет вид $bx^3 + cx^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(bx^2 + cx + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $bx^2 + cx + b = 0$. Таким образом, второе уравнение должно иметь два различных корня, отличных от нуля. Для этого необходимо и достаточно, чтобы оно было квадратным и его дискриминант был положительным, то есть $\begin{cases} b \ne 0, \\ |c| > 2|b| \end{cases}$. Такие уравнения существуют, например, $x^2 + 3x + 1 = 0$.

2) Если $a \ne 0$, то $x = 0$ не является корнем данного уравнения, тогда, разделив обе его части на x^2, получим уравнение $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$, равносильное данному.

Заметим, что если число m является корнем полученного уравнения, то и число $\frac{1}{m}$ является его корнем. Следовательно, для того, чтобы количество корней такого уравнения было нечетным, необходимо выполнение условия: $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Осталось показать, что это условие является достаточным, то есть, что уравнения указанного вида, имеющие ровно три корня, один из которых равен как 1, так и –1, существуют.

Пусть $x + \frac{1}{x} = y$ ($|y| \ge 2$), тогда исходное уравнение примет вид: $ay^2 + by + (c - 2a) = 0$. Для того, чтобы исходное уравнение имело три корня достаточно, чтобы полученное квадратное уравнение имело два корня y_1 и y_2, при этом, $y_1 = 2$ и $y_2 > 2$ или $y_1 = -2$ и $y_2 < -2$. Используя обратную теорему Виета, несложно привести примеры:

1) Для корня $x = 1$: $y_1 = 2$ и пусть $y_2 = 3$, тогда $a = 1$, $b = -5$, $c = 8$.

2) Для корня $x = -1$: $y_1 = -2$ и пусть $y_2 = -3$, тогда $a = 1$, $b = 5$, $c = 8$.

4.2. Докажите, что $AI + BI + CI \geq 6r$, где r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, I – ее центр.

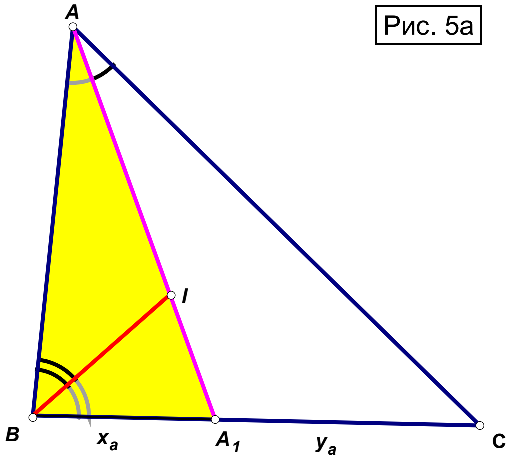

Рис. 5а

Пусть в треугольнике ABC: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

Первый способ. Предварительно докажем лемму. Если A_1 – основание биссектрисы этого треугольника, проведенной из вершины A, то $\frac{IA}{IA_1} = \frac{b+c}{a}$ (см. рис. 5а).

Для удобства введем следующие обозначения: $BA_1 = x_a; CA_1 = y_a$. Тогда, используя свойство биссектрисы треугольника, получим систему уравнений: $\begin{cases} \frac{x_a}{y_a} = \frac{c}{b} \\ x_a + y_a = a \end{cases}$. Ее решения: $x_a = \frac{ac}{b+c}$; $y_a = \frac{ab}{b+c}$. Используя далее, что BI – биссектриса треугольника ABA_1, получим: $\frac{IA}{IA_1} = \frac{AB}{BA_1} = \frac{c}{x_a} = \frac{c}{\left(\frac{ac}{b+c}\right)} = \frac{b+c}{a}$, что и требовалось.

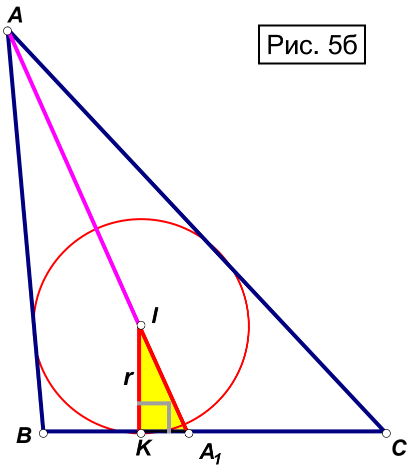

Рис. 5б

Перейдем к доказательству неравенства. Соединим точку I с точкой K касания вписанной окружности и стороны BC (см. рис. 5б). Если $AB \neq AC$, то точки A_1 и K различны, тогда в прямоугольном треугольнике IKA_1 должно выполняться неравенство: $IA_1 > IK = r$. (в противном случае $IA_1 = r$). Таким, образом, $IA_1 \geq r$.

Используя доказанную лемму, получим, что $AI = \frac{b+c}{a} \cdot IA_1 \geq \left(\frac{b+c}{a}\right) r$.

Аналогичными рассуждениями получим еще два неравенства: $BI \geq \frac{c+a}{b} r$ и $CI \geq \frac{a+b}{c} r$. Сложив почленно три неравенства, получим: $AI + BI + CI \geq \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right) r = \left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\right) r \geq 6r$ (так как сумма взаимно обратных положительных чисел больше или равна двум).

Второй способ. Опустим перпендикуляры из точки I на стороны треугольника, тогда $AI + BI + CI = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ (см. рис. 5в). Тогда останется доказать, что $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6$. Это можно делать по-разному. Приведем как «геометрический», так и «аналитический» способы рассуждений.

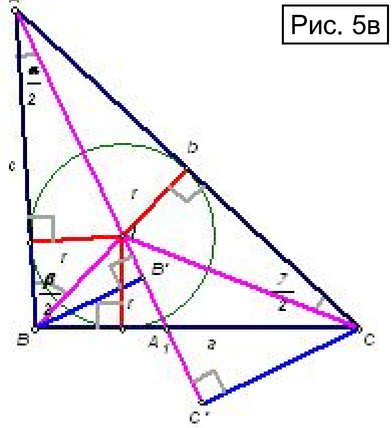
Рис. 5в

«Геометрический способ». Докажем, что $\sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c}$. Действительно, опустим перпендикуляры $\hat{A}\hat{A}'$ и CC' на биссектрису AA_1 треугольника (см. рис. 5в), тогда *CC'* + *ÂÂ'* = $b\sin\frac{\alpha}{2}+c\sin\frac{\alpha}{2}$ $\le$ *BC* = *a*. Аналогично доказывается, что $\sin\frac{\beta}{2}\le\frac{b}{a+c}$ и $\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{c}{a+b}$. Следовательно, $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ $\ge$ $\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$ ≥ 6 (как было показано выше).

Отметим, что этот способ решения можно модифицировать, поскольку $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ $\ge$ $\frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}}$ *(неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим). Тогда останется доказать неравенство* $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$. *Это можно сделать как способом, указанным выше (выразив каждый синус через стороны треугольника), так и по-другому: отдельно доказать равенство* $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}$, *где R – радиус окружности, описанной около данного треугольника, и использовать затем, что* $R \ge 2r$.

«<u>Аналитический способ</u>». Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ на $(0;\ \pi)$ и докажем, что ее график расположен выпуклостью вниз. Действительно, $f'(x)=\left(\sin^{-1}x\right)'=-(\sin x)^{-2}\cdot\cos x$; $f''(x)=-\left(-2(\sin x)^{-3}\cdot\cos^2 x-\sin x\cdot(\sin x)^{-2}\right)$ = $\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin^3 x}$ > 0.

Тогда по неравенству Йенсена для функций такого вида: $\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$ $\ge$ $f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)$. Применяя это неравенство для $x_1=\frac{\alpha}{2}$, $x_2=\frac{\beta}{2}$, $x_3=\frac{\gamma}{2}$ получим: $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ $\ge$ $3\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}}$ = 6, так как $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Таким образом, $AI + BI + CI \ge 6r$, что и требовалось.

Отметим также, что из приведенных рассуждений следует, что доказанное неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда треугольник ABC – равносторонний.

4.3. При каких натуральных значениях *n* число $\underbrace{10101...101}_{n\ \text{единиц}}$ является простым?

<u>Ответ</u>: только при *n* = 2.

При *n* = 1 данное число также равно 1, то есть не простое. При *n* = 2 данное число равно 101 – простое. Докажем, что при всех *n* > 2, число $\underbrace{10101...101}_{n\ \text{единиц}}$ будет составным.

<u>Первый способ</u>. Если *n* – четное, то число $\underbrace{10101...101}_{n\ \text{единиц}}$ делится на 101, то есть оно не простое. Если *n* – нечетное, то $11\cdot\underbrace{10101...101}_{n\ \text{единиц}}=\underbrace{111..11}_{2n\ \text{единиц}}$. Последнее число делится на $\underbrace{11...11}_{n\ \text{единиц}}$.

Так как n нечетно, то числа 11 и $\underbrace{111...11}_{n\ единиц}$ взаимно просты, следовательно, число $\underbrace{10101...101}_{n\ единиц}$ также делится на $\underbrace{11...11}_{n\ единиц}$, то есть оно составное.

Второй способ. Запишем число $\underbrace{10101...101}_{n\ единиц}$ в виде суммы геометрической прогрессии:

$\underbrace{10101...101}_{n\ единиц} = 1 + 100 + 10000 + ... + 10^{2n-2} = \frac{10^{2n}-1}{99} = \frac{(10^n-1)(10^n+1)}{99}$. При n > 2 оба множителя в числителе больше 99. Значит, после сокращения исходное число будет представлено в виде произведения двух множителей, отличных от 1, то есть число $\underbrace{10101...101}_{n\ единиц}$ - составное.

Завершить это рассуждение можно и по-другому. Полученное дробное выражение является натуральным составным числом, так как при четных n первый множитель делится на 99, а при нечетных n первый множитель делится на 9, а второй – на 11 (по признаку делимости на 11).

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Решите уравнение: arcsin[sin*x*] = arccos[cos*x*] ([*a*] – *целая часть числа a*).

Ответ: $\{2\pi n \mid n \in Z\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in Z\right\}$.

Заметим, что [sin*x*] и [cos*x*] могут принимать только три значения: 0; 1 или –1. При этом, arcsin0 = 0 = arccos1; arcsin1 = $\frac{\pi}{2}$ = arccos0; arcsin(–1) = $-\frac{\pi}{2}$, а это число не входит в область значений арккосинуса. Таким образом, исходное равенство выполняется, если $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0 \end{cases}$. Решением первой системы является $x = 2\pi n$, где $n \in Z$, а решением второй системы является $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Можно также построить в одной системе координат графики функций, стоящих в левой и в правой частях равенства на каком-нибудь промежутке длиной 2π, так как это число является общим периодом этих функций.

5.2. Из точки *P*, лежащей на описанной окружности прямоугольника *ABCD*, опущены перпендикуляры *PM* и *PN* на его диагонали. Найдите *MN*, если радиус окружности равен *R*, а угол между диагоналями равен α.

Ответ: $R\sin\alpha$.

Пусть точка *P* располагается, например, на меньшей дуге *BC* данной окружности (см. рис. 6). Так как $\angle PMO = \angle PNO = 90°$, то около четырехугольника *MPNO* можно описать окружность с диаметром *PO*. Треугольник *MON* вписан в эту окружность, поэтому, $\frac{MN}{\sin\angle BOC} = PO$ (по следствию из теоремы синусов). По условию, $\angle BOC = \alpha$ или $\angle BOC = 180° - \alpha$, что в данном случае не существенно, так как sin(180° – α) = sinα.

Таким образом, $MN = PO \cdot \sin\alpha = R\sin\alpha$.

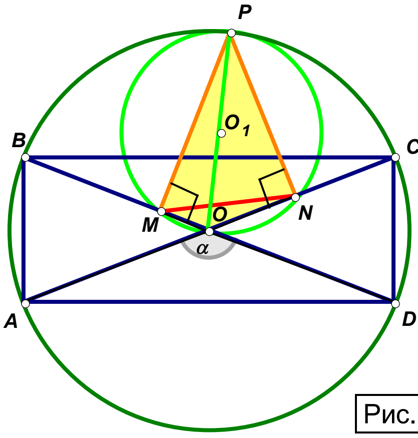

Рис. 6

5.3. Коля, Леня и Миша сложились по целому числу рублей и купили футбольный мяч. Сумма денег, вложенных каждым из них, не превосходит половины суммы, вложенной остальными. Сколько денег вложил Миша, если мяч стоил 600 рублей?

Ответ: 200 рублей.

Пусть мальчики заплатили x, y и z рублей. Без ограничения общности можно считать, что x – наибольшее из этих чисел, то есть $x \geq y$ и $x \geq z$. По условию, $x \leq \frac{y+z}{2}$, поэтому, $z \leq x \leq y$ или $y \leq x \leq z$. Следовательно, $x = y = z$. Таким образом, все мальчики заплатили поровну, а именно, по 200 рублей.