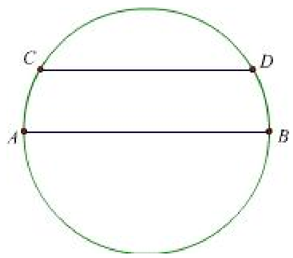
7 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. В стаде, состоящем из лошадей, двугорбых и одногорбых верблюдов, в общей сложности 200 горбов. Сколько животных в стаде, если количество лошадей равно количеству двугорбых верблюдов? *Ответ обоснуйте*.

Ответ: 200.

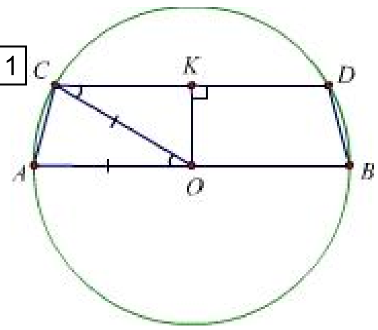
Первый способ. Пусть каждый двугорбый верблюд «поделится» горбом с лошадью (у которой горба нет). Тогда у каждого животного будет по одному горбу, что означает, что количество горбов равно количеству животных в стаде.



Второй способ. Пусть x – количество лошадей (тогда количество двугорбых верблюдов также равно x), а y – количество одногорбых верблюдов. Следовательно, горбов в стаде $2x + y$, что, по условию, равно 200, и животных в стаде также $2x + y$.

1.2. В окружности провели диаметр AB и параллельную ему хорду CD, так, что расстояние между ними равно половине радиуса этой окружности (см. рис.). Найдите угол CAB.

Рис. 1



Ответ: 75°.

Пусть O – центр данной окружности, а K – основание перпендикуляра, опущенного из O на CD (см. рис. 1). Тогда в прямоугольном треугольнике OCK катет OK вдвое меньше гипотенузы OC, следовательно, $\angle OCK = 30°$. Поскольку $CD \parallel AB$, то $\angle AOC = \angle OCK = 30°$. Треугольник AOC – равнобедренный, поэтому, $\angle CAO = \angle ACO = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

1.3. Найдите все пары простых чисел, разность квадратов которых является простым числом. *Ответ обоснуйте*.

Ответ: (3; 2).

Пусть n и m – искомые простые числа и $n^2 - m^2$ – простое число. Поскольку $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$, то $n - m = 1$. Значит, n и m – последовательные натуральные простые числа. Следовательно, одно из них четное, а единственное четное простое число – это 2. Значит, единственный возможный вариант: $m = 2$, $n = 3$. Разность их квадратов действительно равна простому числу 5.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Из четырех неравенств $2x > 70$, $x < 100$, $4x > 25$ и $x > 5$ два истинны и два ложны. Найдите значение x, если известно, что оно целое.

Ответ: 6.

Первый способ. Для каждого значения x данные неравенства являются логическими высказываниями. Обозначим их: а) $2x > 70$; б) $x < 100$; в) $4x > 25$; г) $x > 5$.

1) Если истинно а), то истинны в) и г), то есть три высказывания истинны, что противоречит условию. Следовательно, неравенство а) $2x > 70$ – ложно, значит, $x \le 35$.

2) Если истинно высказывание $x \le 35$, то высказывание б) также истинно, поэтому, из высказываний в) и г) одно должно быть истинно, а другое – ложно.

3) Если истинно высказывание в), то истинно и г) – противоречие. Следовательно, высказывание в) ложно, тогда $x \le 6$. Значит, высказывание г) должно быть истинно.

Таким образом, $5 < x \le 6$, то есть $x = 6$.

Второй способ. Учитывая, что x – целое число, данные неравенства можно переписать так: $x > 5$, $x > 6$, $x > 35$ и $x < 100$. Если неверно, что $x < 100$, то остальные три неравенства – верные, что противоречит условию. Значит, из трех неравенств: $x > 5$, $x > 6$ и $x > 35$ – одно верное и два неверных.

Так как из третьего неравенства следуют первые два, а из второго неравенства следует первое, то остается принять, что первое неравенство верно, а два других – нет. Таким образом, $5 < x \le 6$, то есть $x = 6$.

2.2. Какое наибольшее количество точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, в которой 7 звеньев?

Ответ: 14.

Рассмотрим любое звено этой ломаной и обозначим его *AB*. На отрезке *AB* могут находиться не более четырех точек самопересечения ломаной, поскольку со звеньями, исходящими из вершин *A* и *B*, отрезок *AB* пересечься не может. Так как у рассматриваемой ломаной 7 звеньев и в каждой точке пересекаются два звена, то точек самопересечения не больше, чем $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$. Пример ломаной, у которой 14 точек самопересечения, приведен на рис. 2.

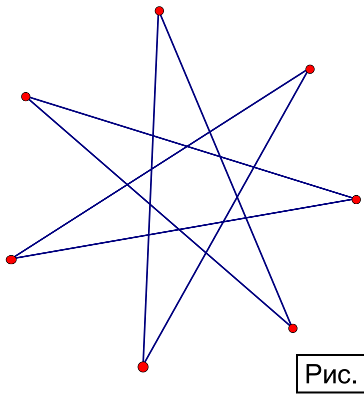


Рис. 2

2.3. Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество звездочек так, чтобы в любом квадрате 2×2 было ровно две звездочки, а в любом прямоугольнике 3×1 – ровно одна звездочка? (*В каждой клетке может стоять не более одной звездочки*.)

Ответ: нет, нельзя.

Первый способ. Квадрат 10×10 можно разбить на 25 непересекающихся квадратов 2×2. Так как в каждом из них должно быть по две звездочки, то всего звездочек должно быть 50. С другой стороны, 99 клеток исходного квадрата можно разбить на 33 непересекающихся прямоугольника 3×1. В каждом из должно быть по одной звездочке, поэтому, даже поставив звездочку в оставшуюся клетку, мы не сможем получить больше, чем 34 звездочки. Полученное противоречие доказывает невозможность требуемой расстановки.

Второй способ. Докажем, что требуемым образом нельзя заполнить даже квадрат 3×3. Действительно, так как в каждом прямоугольнике 3×1 должна стоять только одна звездочка, то в каждой строке и в каждом столбце квадрата 3×3 должно стоять только по одной звездочке. Рассмотрим левый верхний квадрат 2×2. По условию, в нем должно быть две звездочки. Но тогда в третьем столбце первой и второй строки не должно быть звездочек, значит, в правом верхнем квадрате 2×2 будет стоять только одна звездочка, а не две.

Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

3.1. Существуют ли такие целые числа *x*, *y* и *z*, для которых выполняется равенство: $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 2011$?

Ответ: нет, не существуют.

Предположим, что такие целые числа *x*, *y* и *z* существуют. Тогда, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим: $-3x^2y + 3xy^2 - 3y^2z + 3zy^2 + 3z^2x - 3zx^2 = 2011$. В этом равенстве левая часть является целым числом, которое кратно трем, а правая часть на 3 не делится. Полученное противоречие показывает, что указанных *x*, *y* и *z* не существует.

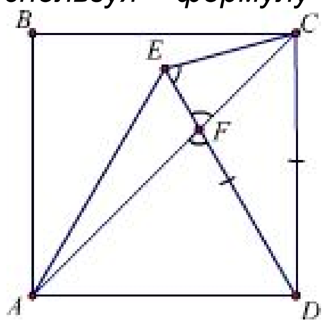
Аналогичное противоречие можно также получить, используя формулу $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

Тогда $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x) = 2011$.

3.2. Дан квадрат *ABCD*. На стороне *AD* внутрь квадрата построен равносторонний треугольник *ADE*. Диагональ *AC* пересекает сторону *ED* этого треугольника в точке *F*. Докажите, что *CE* = *CF*.

Докажем, что $\angle CEF = \angle ÑFE$ (см. рис. 3), из чего будет

Рис. 3



следовать утверждение задачи. Действительно, треугольник AED – равносторонний, поэтому $\angle ADE = 60°$, а $\angle CDE = 90° - 60° = 30°$. Так как $CD = AD = DE$, то треугольник EDC – равнобедренный, следовательно, $\angle CED = \angle ECD = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

Поскольку AC – диагональ квадрата, то $\angle CAD = 45°$, значит, из треугольника AFD: $\angle AFD = 180° - (45° + 60°) = 75°$. Углы *ÑFE* и AFD – вертикальные, следовательно, $\angle$*ÑFE* = $\angle$*ÀFD* = 75°.

3.3. Десять друзей послали друг другу открытки: каждый послал ровно пяти друзьям, каждому – по одной открытке. Всегда ли найдутся двое, которые послали открытки друг другу?

Ответ: да, всегда.

Первый способ. Предположим, что это не так, то есть не существует пары друзей, которые послали открытки друг другу. Занумеруем всех друзей числами от 1 до 10. Пусть друг №1 послал открытки друзьям с номерами 2, 3, 4, 5 и 6. Поскольку мы предположили, что ему никто из них не ответил, то он мог получить не более четырех открыток от друзей с номерами 7, 8, 9 и 10. Аналогично, любой из друзей с другими номерами не мог получить более четырех открыток. Значит, количество полученных открыток не может быть больше, чем 40, в то время как отправлено было $5\cdot 10 = 50$ открыток. Полученное противоречие показывает, что наше предположение не верно, то есть найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

Второй способ. Подсчитаем количество пар друзей: $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$. Так как всего было послано $5\cdot 10 = 50$ открыток, то на какую-то из пар приходится хотя бы две посланные открытки, то есть в этой паре друзья послали открытки друг другу.

Из этого решения следует, что друзей, пославших открытки друг другу, не менее пяти.

Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

4.1. Вася выписал все трехзначные числа и вычислил в каждом числе произведение его цифр, а затем сложил все полученные произведения. Какое число у него получилось?

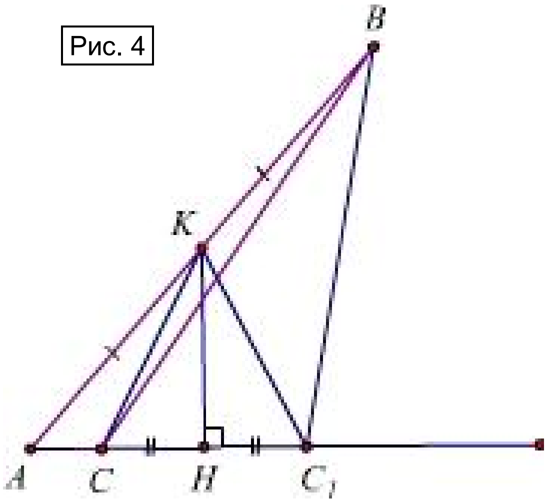
Ответ: 45^3.

Любое трехзначное число имеет вид $\overline{abc}$, где a – любая цифра от 1 до 9, а b и c – любые цифры от 0 до 9. Рассмотрим все возможные значения произведения abc. Их сумму удобно записать в таком виде: $(1+2+\ldots+9)(0+1+2+\ldots+9)(0+1+2+\ldots+9)$.

Действительно, при раскрытии скобок получится 900 слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение цифр одного из девятисот трехзначных чисел. Так как сумма чисел в каждой скобке равна 45, то искомое число равно 45^3.

4.2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $\angle A = \angle A_1$; равны высоты, проведенные из вершин B и B_1; равны медианы, проведенные из вершин C и C_1. Обязательно ли эти треугольники равны?

Рис. 4



Ответ: нет, не обязательно.

Приведем пример двух неравных треугольников, для которых выполняются все равенства из условия задачи.

На одной из сторон острого угла A отложим произвольный отрезок AB (см. рис. 4). Из точки K – середины отрезка AB опустим перпендикуляр KH на другую сторону угла. Отметим на этой стороне угла точки C и C_1 так, чтобы $HC = HC_1$. Тогда в треугольнике CKC_1 совпадают высота и медиана, поэтому, он – равнобедренный ($KC = KC_1$).

Таким образом, в треугольниках ABC и ABC_1:

равны углы BAC и BAC_1, высота, проведенная из вершины B – общая, и равны медианы CK и C_1K, проведенные из вершин C и C_1.

4.3. Существуют ли пять таких двузначных составных чисел, что любые два из этих чисел взаимно просты? (*Напомним, что взаимно простыми называются числа, у которых наибольший общий делитель равен 1*.)

Ответ: нет, не существуют.

Каждое из составных чисел является произведением, по крайней мере, двух простых чисел. В каждом из таких произведений не может быть больше одного двузначного сомножителя, иначе это произведение будет, как минимум, трехзначным числом. Значит, в разложении на простые множители каждого из искомых двузначных чисел должно присутствовать однозначное простое число. Но простых однозначных чисел всего четыре: 2, 3, 5 и 7. Следовательно (по принципу Дирихле), среди любых пяти составных двузначных чисел найдутся два, у которых будет общий делитель, отличный от 1.