8 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Для любых чисел *a* и *b* операция $a \otimes b$ определена следующим образом: $a \otimes b = a^2 - b^2$. Вычислите: $(2011 \otimes 2010) \otimes (2010 \otimes 2009)$.

Ответ: 16080.

1) $2011 \otimes 2010 = 2011^2 – 2010^2 = (2011 – 2010)(2011 + 2010) = 4021$;

2) $2010 \otimes 2009 = 2010^2 – 2009^2 = (2010 – 2009)(2010 + 2009) = 4019$;

3) $4021 \otimes 4019 = 4021^2 – 4019^2 = (4021 – 4019)(4021 + 4019) = 2\cdot 8040 = 16080$.

1.2. Диагональ трапеции делит ее на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Сравните длину этой диагонали и среднюю линию трапеции.

Ответ: средняя линия больше диагонали.

Пусть диагональ *AC* трапеции *ABCD* делит ее на два прямоугольных равнобедренных треугольника: *ABC* и *ACD*. Заметим, что *AC* не может быть общим катетом этих треугольников, так как в этом случае *ABCD* – треугольник или параллелограмм. Если же *AC* – их общая гипотенуза, то *ABCD* – прямоугольник, что также не удовлетворяет условию.

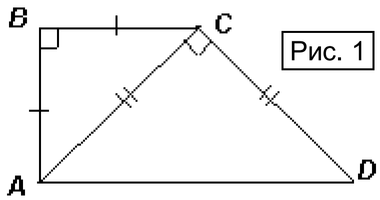


Рис. 1

Таким образом, в одном треугольнике сторона *AC* является катетом, а в другом – гипотенузой (см. рис. 1). Пусть *BC* = *a*, тогда *AC* = $a\sqrt{2}$, *AD* = 2*a*. Значит, длина средней линии трапеции равна 1,5*a*. Так как 1,5 > $\sqrt{2}$, то длина средней линии больше, чем длина *AC*.

1.3. За один ход можно выбрать произвольный квадрат 2×2 на доске 4×4 с шахматной раскраской и изменить цвет каждой клетки этого квадрата на противоположный. Можно ли за несколько ходов сделать так, чтобы все клетки доски оказались одного цвета?

Ответ: да, можно.

Например, возможна такая последовательность ходов, в результате которых все клетки доски станут черными (см. рис. 2): 1) перекрасим левый верхний и правый нижний квадраты (в любом порядке); 2) перекрасим два квадрата на центральных вертикалях; 3) перекрасим два квадрата на центральных горизонталях.

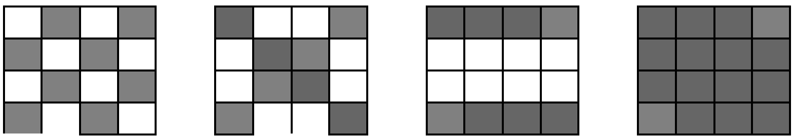


Рис. 2

Разумеется, существуют и другие примеры.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Среди чисел *x*, *y*, *a* и *b* нет одинаковых, при этом выполняется равенство $\frac{x+a}{x+b} = \frac{y+b}{y+a}$. Найдите сумму: *x* + *y* + *a* + *b*.

Ответ: 0.

Первый способ. По основному свойству пропорции: $(x + a)(y + a) = (x + b)(y + b)$. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые: $ax + ay + a^2 = bx + by + b^2$. Переносим слагаемые в одну часть, группируем и раскладываем на множители: $(a – b)x + (a – b)y + (a – b)(a + b) = 0$; $(a – b)(x + y + a + b) = 0$. Так как $a \neq b$, то $x + y + a + b = 0$.

Второй способ. Пусть $\frac{x+a}{x+b} = \frac{y+b}{y+a} = k$. Тогда $x + a = k(x + b)$ и $y + b = k(y + a)$. Сложив почленно эти равенства, получим: $x + y + a + b = k(x + y + a + b)$, то есть $(x + y + a + b)(k – 1) = 0$. Заметим, что $k \neq 1$ (иначе $x + a = x + b$, что невозможно, так как $a \neq b$). Следовательно, $x + y + a + b = 0$.

Третий способ. Поменяем местами средние члены данной пропорции и прибавим по 1 к обеим частям равенства: $\frac{x+a}{y+b}+1=\frac{x+b}{y+a}+1$. Приведя каждую часть равенства к одному знаменателю, получим: $\frac{x+a+y+b}{y+b}=\frac{x+b+y+a}{y+a}$. Так как $a \neq b$, то знаменатели полученных дробей различны, следовательно, $x + y + a + b = 0$.

Четвертый способ. Вычтем из обеих частей данной пропорции по 1 и приведем каждую часть равенства к одному знаменателю: $\frac{x+a}{x+b}-1=\frac{y+b}{y+a}-1 \Leftrightarrow \frac{a-b}{x+b}=\frac{b-a}{y+a}$.

Следовательно, $(a-b)\left(\frac{1}{x+b}+\frac{1}{y+a}\right)=0$. Учитывая, что $a \neq b$, получим: $\frac{x+y+a+b}{(x+b)(y+a)}=0$, значит, $x + y + a + b = 0$.

2.2. В треугольнике ABC проведены медиана AM, высота BH и биссектриса CL. Точка K пересечения отрезков CL и MH является серединой каждого из них. Найдите углы треугольника.

Ответ: три угла по 60°.

Докажем, что треугольник ABC – равносторонний (см. рис. 3).

Первый способ. Из условия задачи следует, что $CK = KL$ и $CM = MB$ Тогда MK – средняя линия треугольника BCL, то есть MH – средняя линия треугольника ABC, поэтому, $AH = HC$. Значит, в треугольнике ABC высота BH является медианой, следовательно, $AB = BC$.

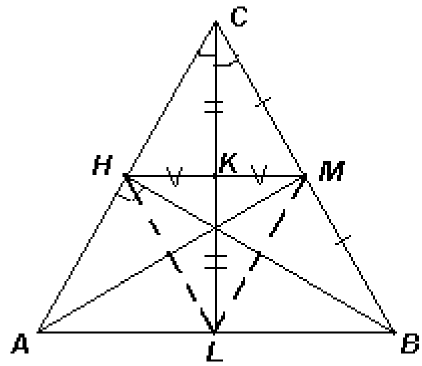


Рис. 3

Так как $HK = KM$ и CK – биссектриса угла ACB, то треугольник HCM – равнобедренный ($HC = CM$). Учитывая, что MH – средняя линия треугольника $ABC,$ получим, что $AC = BC$. Таким образом, $AB = BC = AC$, то есть треугольник ABC – равносторонний.

Второй способ. Из условия задачи следует, что диагонали четырехугольника $CMLH$ точкой пересечения делятся пополам, значит, $CMLH$ – параллелограмм. Так как M – середина BC и $ML \parallel AC$, то L – середина AB. Аналогично, так как $LH \parallel BC$, то H – середина AC. Из того, что высота BH и биссектриса CL являются также и медианами треугольника ABC, следует, что этот треугольник равносторонний.

2.3. Один из собеседников вчера сказал: «Если год, когда мне было 45 лет, умножить на год, когда мне было 43 года, а то, что получится, разделить на год моего рождения, то получится год, когда ...» – «Хватит!» – перебил его другой. «Я и так могу назвать год твоего рождения!». Назовите его и вы.

Ответ: 1935.

Пусть x – год рождения первого собеседника, который должен выражаться четырехзначным числом. Выражение $(x + 45)(x + 43) = x^2 + 88x + 45\cdot43 = x(x + 88) + 1935$ делится на x без остатка, если x является натуральным делителем числа 1935. Единственным четырехзначным делителем числа 1935 является само это число.

Отметим, что если бы такой разговор произошел в первом тысячелетии, то ответы были бы другими: 1, 3, 5, 9, 15, 43, 45, 129, 215, 387 или 645.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. В диване живут клопы и блохи. Если в несколько раз станет больше клопов, то всего насекомых станет 2012, а если во столько же раз станет больше блох (а количество клопов не изменится), то всего насекомых будет 2011. Сколько насекомых в диване сейчас?

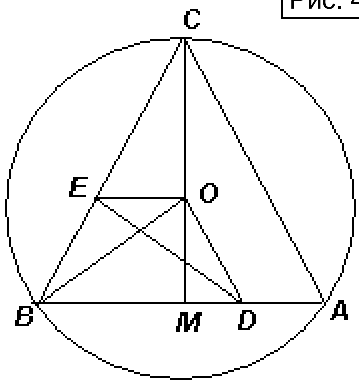
Ответ: 1341.

Пусть в диване живет *x* клопов и *y* блох, тогда $\begin{cases} nx + y = 2012, \\ x + ny = 2011 \end{cases}$. Вычитая из первого уравнения системы второе, получим: (n – 1)(x – y) = 1. Так как число (n – 1) – натуральное, а число (x – y) – целое, то это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\begin{cases} n - 1 = 1, \\ x - y = 1 \end{cases}$. Следовательно, n = 2, x = y + 1. Подставляя полученные значения в любое из уравнений, находим: $\begin{cases} y = 670, \\ x = 671 \end{cases}$, то есть x + y = 1341.

Получив, что n = 2, можно, не находя значения x и y по отдельности, почленно сложить исходные уравнения, тогда x + y = $\frac{4023}{3}$ *= 1341.*

3.2. Треугольник *ABC* – равносторонний. На сторонах *BC* и *AB* выбраны точки *E* и *D* соответственно так, что *BE* : *EC* = *AD* : *DB* = 1 : 2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, если *ED* = 1.

Рис. 4а



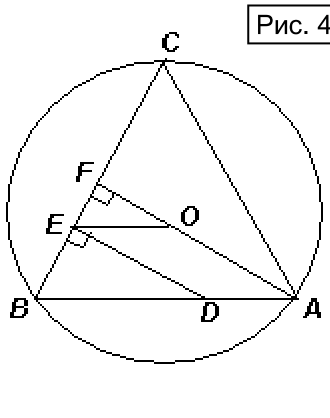
Ответ: 1.

В равностороннем треугольнике центр *O* описанной окружности совпадает с точкой пересечения медиан. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть *CM* – медиана данного треугольника (см. рис. 4а). Тогда, по теореме о точке пересечения медиан *CO : OM* = 2 : 1 = *CE : EB*. Следовательно, *OE* || *BM.* Аналогично доказывается, что *OD* || *AC* ($AD = \frac{1}{3}AB$ и $AM = \frac{1}{2}AB$, значит, *MD : DA* = *MO :* OC = 1 : 2). Следовательно, $\angle ODB = \angle CAB = 60°$.

Так как в трапеции *BEOD* равны углы при основании, то *BEOD* – равнобокая трапеция. Следовательно, *OB* = *ED* = 1.

Рис. 4б



Второй способ. Пусть *AF* – медиана и высота данного треугольника (см. рис. 4б). Учитывая, что $BE = \frac{1}{3}BC$ и $BF = \frac{1}{2}BC$, получим *BE : EF* = *AO : OF* = 2 : 1. Следовательно, *OE* || *AB.* Из того, что *BE : EF* = *BD : DA* = 2 : 1, получим, что *ED* || *OA.* Следовательно, *EOAD* – параллелограмм, значит, *OA* = *ED* = 1.

3.3. Известно, что $a^2 = \overline{...7b}$. Какие значения может принимать *b*?

Ответ: *b* = 6.

Первый способ. При возведении в квадрат однозначного числа нельзя получить в разряде десятков цифру 7, что проверяется непосредственным перебором. При этом, нечетная цифра в разряде десятков получается только в двух случаях: $a = 4$ ($4^2 = 16$) или $a = 6$ ($6^2 = 36$).

Пусть *a* – двузначное число, тогда $a = \overline{pq} = 10p + q$. Значит, $a^2 = (10p + q)^2 = 100p^2 + 20pq + q^2$. Последняя цифра числа a^2 совпадает с последней цифрой числа q^2, а предпоследняя цифра этого числа определяется суммой цифр, стоящих в разряде десятков у двух чисел: 20pq и q^2. Так как у числа 20pq эта цифра – четная, то для того, чтобы в разряде десятков числа a^2 оказалась цифра 7, необходимо, чтобы у числа q^2 эта цифра была нечетной. Это достигается только тогда, когда $q = 4$ или $q = 6$. В обоих случаях последняя цифра числа будет 6. Это возможно, например, при $q = 4$, $p = 2$: $24^2 = 576$.

Наличие в числе a более старших, чем десятки, разрядов не оказывает влияния на две последние цифры числа a^2.

Другие возможные примеры (a – двузначное число): $26^2 = 676$ ($q = 6$, $p = 2$); $74^2 = 5476$ ($q = 4$, $p = 7$); $76^2 = 5776$ ($q = 6$, $p = 7$).

Второй способ. Воспользуемся двумя утверждениями, первое из которых доказывается непосредственным перебором, а второе – перебором остатков от деления на 4:

1) Квадрат целого числа может оканчиваться только на цифры 0, 1, 4, 5, 6 и 9.

2) Остаток от деления квадрата целого числа на 4 может быть равен только 0 или 1.

Из первого утверждения следует, что достаточно рассмотреть следующие варианты последних двух цифр: 70, 71, 74, 75, 76, 79.

Остаток от деления целого числа на 4 зависит только от двух последних цифр в записи числа. Следовательно, числа, оканчивающиеся на 70 или 74, при делении на 4 дают остаток 2, а числа, оканчивающиеся на 71, 75 или 79, – остаток 3. Значит, такие числа не могут быть квадратами целых чисел.

Остается единственный вариант: $b = 6$, который возможен. Например, $24^2 = 576$.

Отметим, что из двух приведенных утверждений следует и такой факт: квадрат целого числа не может оканчиваться двумя нечетными цифрами, что может упростить перебор при обоих способах решения.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Про целые числа a, b è c известно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что число $(a + bc)(b + ac)(c + ab)$ является точным квадратом.

Из того, что $a + b + c = 1$, следует, что $a = 1 – b – c$, $b = 1 – a – c$, $c = 1 – a – b$. Тогда $(a + bc)(b + ac)(c + ab) = (1 – b – c + bc)(1 – a – c + ac)(1 – a – b + ab) = (1 – b)(1 – c)(1 – a)(1 – c)(1 – a)(1 – b) = ((a – 1)(b – 1)(c – 1))^2$.

Так как числа a, b и c – целые, то число $(a – 1)(b – 1)(c – 1)$ также является целым, что и требовалось.

4.2. В прямоугольном треугольнике ABC угол C – прямой. Точки D и E расположены на гипотенузе AB так, что $BD = BC$ и $AE = AC$. Из точки D провели перпендикуляр DG на катет AC, а из точки E – перпендикуляр EF на катет BC. Докажите, что $DE = EF + DG$.

Проведем отрезки CD и CE, а также высоту CH данного треугольника (см. рис. 5). Точка H лежит между точками D и E, так как углы CDE и CED – острые (они являются углами при основаниях в равнобедренных треугольниках BCD и CAE соответственно).

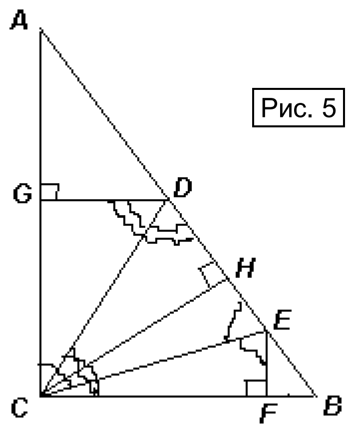


Рис. 5

Из равнобедренности треугольника CAE и параллельности прямых AC и EF получим, что $\angle AEC = \angle ACE = \angle FEC$. Тогда прямоугольные треугольники CFE и CHE равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $EF = EH$.

Аналогично, из равнобедренного треугольника BCD и параллельности прямых BC и DG: $\angle BDC = \angle BCD = \angle GDC$, значит, равны также прямоугольные треугольники CGD и CHD. Следовательно, $DG = DH$.

Таким образом, $DE = DH + HE = DG + EF$, что и требовалось доказать.

Отметим, что из доказанного равенства двух пар треугольников следует также, что если «перегнуть» чертеж по прямым CD и CE, то точки G и F совместятся с точкой H, из чего и следует утверждение задачи.

4.3. Какое наименьшее количество точек можно отметить на поверхности куба так, чтобы количество точек на любых двух гранях куба различалось? (*Напомним, что поверхность куба состоит из шести граней, каждое ребро принадлежит двум граням, а каждая вершина – трем.*)

Ответ: 6 точек.

Для того, чтобы количество точек на поверхности куба было наименьшим, необходимо, чтобы количество точек на шести его гранях было соответственно равно 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Значит, меньше, чем 5 точек поставить невозможно. Докажем, что пятью точками обойтись нельзя.

Действительно, рассмотрим грань, на которой 5 точек. Для того, чтобы на другой грани было 4 точки, необходимо, чтобы эти 4 точки располагались на общем ребре этих двух граней. Рассмотрим третью грань, имеющую общую вершину с двумя уже рассмотренными. На ней не может быть более двух точек (одна – в этой вершине, другая – не лежащая на общем ребре первых двух граней). Тогда на других гранях и подавно не может быть более двух точек, то есть грань с тремя точками отсутствует.

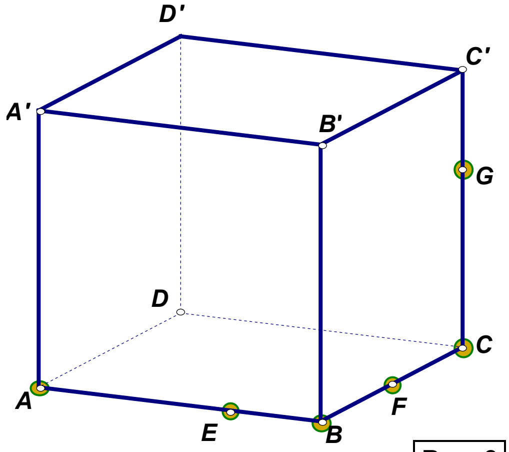


Рис. 6

Приведем пример расстановки шести точек, удовлетворяющей условию (см. рис. 6). В верхней грани куба нет точек, в нижней – пять, в левой – одна, в задней – две, в передней – три, в правой – четыре.