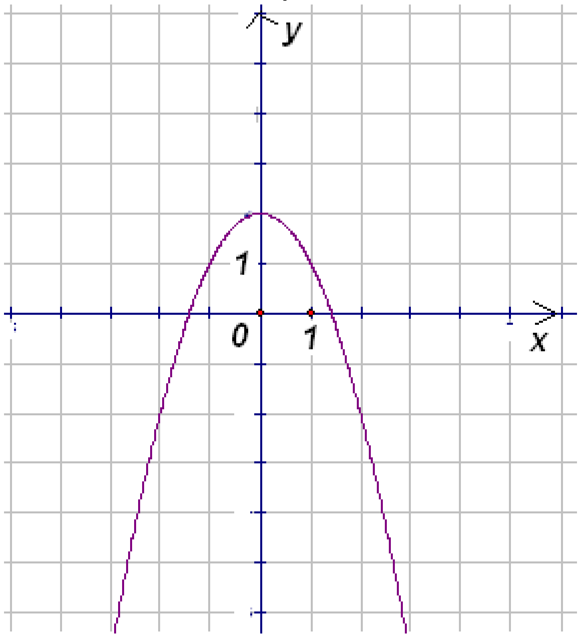
9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. На координатной плоскости изображен график функции $y = ax^2 + c$ (см. рисунок). В каких точках график функции $y = cx + a$ пересекает оси координат?



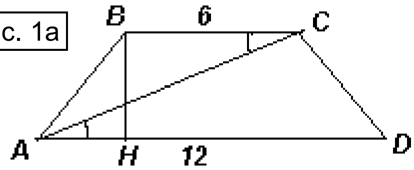
<u>Ответ</u>: в точках (0,5; 0) и (0; –1).

Так как данный график пересекает ось y в точке (0; 2), то $c = 2$. Кроме того, он проходит через точку (1; 1), значит $1 = 2 + a$, то есть $a = –1$.

Таким образом, новая функция задается уравнением $y = 2x – 1$. Ее график пересекает ось x в точке (0,5; 0), а ось y – в точке (0; –1).

1.2. В равнобокой трапеции *ABCD* основания *AD* и *BC* равны 12 и 6 соответственно, а высота равна 4. Сравните углы *BAC* и *CAD*.

Рис. 1а



<u>Ответ</u>: угол *BAC* больше, чем угол *CAD*.

<u>Первый способ</u>. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle CAD = \angle BCA$ (см. рис. 1а). Пусть *BH* – высота трапеции. Тогда $AH = \dfrac{AD - BC}{2}$ = 3; *BH* = 4, следовательно, из прямоугольного треугольника *ABH*: *AB* = 5.

Таким образом, в треугольнике *ABC* *BC* > *AB*, значит, $\angle BAC > \angle BCA$ (против большей стороны треугольника лежит больший угол). Следовательно, $\angle BAC > \angle CAD$.

<u>Второй способ</u>. Пусть прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке E (см. рис. 1б). Так как $BC \parallel AD$ и $BC = \frac{1}{2}AD$, то *BC* – средняя линия треугольника *AED*. Вычислив боковую сторону трапеции (аналогично первому способу решения), получим, что *AE* = 2*AB* = 10.

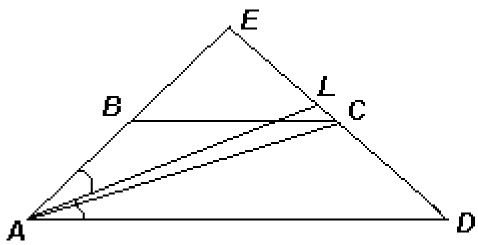


Рис. 1б

Проведем биссектрису *AL* треугольника *AED*. По свойству биссектрисы $\dfrac{LD}{LE} = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{12}{10} > 1$, значит, точка *L* лежит между точками *C* и *E*. Следовательно, $\angle BAC > \angle CAD$.

1.3. На доске записаны числа 1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность – неотрицательное число. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 15?

<u>Ответ</u>: да, может.

Искомая последовательность операций видна из следующей записи:
15 = 32 – 16 – (8 – 4 – 2 – 1).

Отметим, что в результате указанных операций можно получить любое нечетное число от 1 до 31. Это можно доказать, например, методом математической индукции.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Известно, что $5(a - 1) = b + a^2$. Сравните числа a и b.

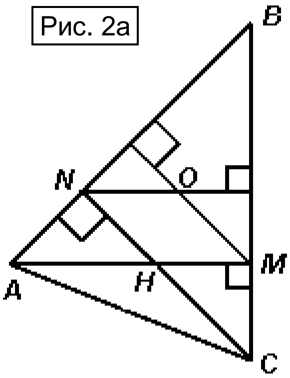
<u>Ответ</u>: $a > b$.

Перепишем условие задачи в виде: $b = -a^2 + 5a - 5$. Выясним знак разности $a - b$. Получим: $a - b = a + a^2 - 5a + 5 = (a - 2)^2 + 1 > 0$. Следовательно, $a > b$.

Если в системе координат (a; b) построить графики функций $b = -a^2 + 5a - 5$ и $b = a$, то первый график располагается ниже, чем второй. Исходя из расположения графиков, можно получить ответ, но строгим доказательством это не является.

2.2. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен $45°$, AM и CN – его высоты, O – центр описанной окружности, H – ортоцентр (точка пересечения высот). Докажите, что $ONHM$ – параллелограмм.

Рис. 2а



<u>Первый способ</u>. Проведем серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC данного треугольника, которые пересекаются в точке O (см. рис. 2а). Так как в прямоугольном треугольнике BNC $\angle NBC = 45°$, то $BN = NC$, следовательно, точка N лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC. Тогда $NO \parallel HM$. Аналогично, рассмотрев прямоугольный равнобедренный треугольник AMB, получим, что $MO \parallel HN$.

Таким образом, $ONHM$ – параллелограмм (по определению).

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC (см. рис. 2б). Так как этот треугольник – остроугольный, то ее центр O лежит внутри треугольника, причем треугольник AOC – равнобедренный и $\angle AOC = 2\angle ABC = 90°$. Кроме того, $\angle ANC = \angle AMC = 90°$, поэтому точки N, O и M лежат на окружности с диаметром AC.

Тогда $\angle ONC = \angle OAC = 45°$; $\angle ONB = \angle$ÂNC – $\angle ONC = 45°$ и $\angle$ÌÀB = 90° – $\angle$ÀBM = 45°. Из равенства углов ONB и ÌÀB следует параллельность прямых NO è AM. Аналогично доказывается, что $MO \parallel CN$.

Следовательно, $ONHM$ – параллелограмм

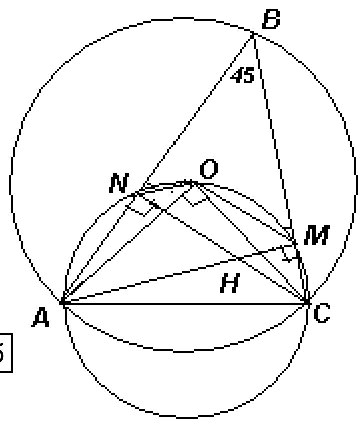


Рис. 2б

2.3. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $A = n^3 + 12n^2 + 15n + 180$ делится на 23.

<u>Ответ</u>: $n = 10$.

Разложим данный многочлен на множители способом группировки: $n^3 + 12n^2 + 15n + 180 = n^2(n + 12) + 15(n + 12) = (n + 12)(n^2 + 15)$. Число A делится на простое число 23, если в любом его разложении на натуральные множители присутствует число, делящееся на 23. Наименьшее значение n, при котором первый множитель делится на 23, равно 11, а для второго множителя такое n равно 10.

Возможен также непосредственный перебор всех натуральных значений n от 1 до 10, но он сопряжен с некоторыми вычислительными трудностями. Перебор можно упростить, заменив число 180 на меньшее число, имеющее такой же остаток при делении на 23, например, на –4.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Пятеро друзей скинулись на покупку. Могло ли оказаться так, что любые два из них внесли менее одной трети общей стоимости?

<u>Ответ</u>: нет, не могло.

Пусть друзья внесли *a*, *b*, *c*, *d* и *e* рублей соответственно. Тогда общая сумма внесенных денег равна $a + b + c + d + e = S$.

Предположим, что любые два друга внесли меньше, чем $\frac{1}{3}S$ рублей, тогда выполняются неравенства: $a + b < \frac{1}{3}S$, $a + c < \frac{1}{3}S$, ..., $d + e < \frac{1}{3}S$ (всего таких неравенств – десять). Складывая их почленно, получим, что $4(a + b + c + d + e) < \frac{10}{3}S$, то есть $0{,}4S < \frac{1}{3}S \Leftrightarrow 1{,}2S < S$ – противоречие, так как $S > 0$. Следовательно, указанная ситуация невозможна.

3.2. Существует ли прямоугольный треугольник, в котором две медианы перпендикулярны?

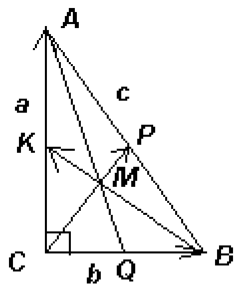


Рис. 3

<u>Ответ</u>: да, существует.

Пусть в треугольнике *ABC*: $\angle C = 90°$, *CP* и *BK* – медианы, *M* – их точка пересечения (см. рис. 3).

<u>Первый способ</u>. Обозначим: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тогда $CP = \frac{1}{2}c$; $CM = \frac{2}{3}CP = \frac{1}{3}c$; $BK^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2$; $BM^2 = \frac{4}{9}BK^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}b^2$.

Отрезки *CM* и *BM* перпендикулярны тогда и только тогда, когда $CM^2 + BM^2 = BC^2$, то есть $\frac{1}{9}ñ^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}b^2 = a^2$. Учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$, получим: $\frac{4}{9}a^2 = \frac{2}{9}b^2$, то есть $b = a\sqrt{2}$.

Таким образом, в прямоугольном треугольнике с катетами $CB = a$ и $CA = a\sqrt{2}$. медианы *CP* и *BK* перпендикулярны.

Отметим, что медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, не могут быть перпендикулярны. Действительно, если AQ – еще одна медиана, то в четырехугольнике CKMQ углы MKC и MQC – острые, а угол KCQ – прямой, значит, $\angle KMQ > 90°$.

<u>Второй способ</u>. Пусть $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$, тогда $\overline{CP} = \frac{1}{2}\left(\overline{CA} + \overline{CB}\right) = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$; $\overline{BK} = \overline{BA} + \overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{b} - \overline{a}$. Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Значит, $\overline{CP} \cdot \overline{CK} = \frac{1}{4}\overline{b}^2 - \frac{1}{2}\overline{a}^2 - \frac{1}{4}\overline{a} \cdot \overline{b} = \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}a^2$, так как $\overline{a} \perp \overline{b}$ (*a* и *b* – модули соответствующих векторов). Следовательно, $\overline{CP} \cdot \overline{CK} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0 \Leftrightarrow b = a\sqrt{2}$.

Заметим, что можно было сразу привести пример требуемого прямоугольного треугольника, указав отношение его катетов или другую тригонометрическую функцию любого из его острых углов, и доказать, что для такого треугольника *выполняется перпендикулярность двух медиан. Для этого, в частности, можно было использовать известный факт, что медианы CP и BK перпендикулярны тогда и только тогда, когда* $c^2 + b^2 = 5a^2$.

Возможны также аккуратные рассуждения, использующие понятие непрерывности.

3.3. Какое наибольшее суммарное количество белых и черных шашек можно расставить в клетках доски 8×8 так, чтобы выполнялось следующее условие: в каждой горизонтали и в каждой вертикали белых шашек должно быть в два раза больше, чем черных?

<u>Ответ</u>: 48 шашек (32 белых и 16 черных).

Заметим, что в любой горизонтали не может быть более двух черных шашек (иначе белых будет не менее шести, а в сумме – не менее девяти), значит, белых шашек – не более четырех. Следовательно, всего черных шашек – не более 16, а белых – не более 32.

Один из возможных примеров расстановки 48 шашек, удовлетворяющих условию, – см. рисунок.

●	○	○	○	○			●
●	●	○	○	○	○		
	●	●	○	○	○	○	
		●	●	○	○	○	○
○			●	●	○	○	○
○	○			●	●	○	○
○	○	○			●	●	○
○	○	○	○			●	●

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Для различных положительных чисел *a* и *b* выполняется равенство $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$ = $\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$. Докажите, что *a* и *b* – взаимно обратные числа.

Разобьем правую часть исходного равенства на два одинаковых слагаемых и преобразуем его: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} = \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}} = 0 \Leftrightarrow$ $\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{1+a} - \frac{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{1+b} = 0 \Leftrightarrow$ $(\sqrt{b}-\sqrt{a})\left(\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b}\right) = 0$.

Первая скобка равна нулю, тогда и только тогда, когда *a* = *b*, что противоречит условию. Тогда, учитывая, что $a > 0$ и $b > 0$, получим: $\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b} = 0 \Leftrightarrow$ $\sqrt{a}-\sqrt{b}+b\sqrt{a}-a\sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})(1-\sqrt{ab}) = 0$. Последнее равенство верно тогда и только тогда, когда $a = b$ или $ab = 1$, что и требовалось доказать.

4.2. В выпуклом четырехугольнике *ABCD*: $\angle BAC = 20°$, $\angle BCA = 35°$, $\angle BDC = 40°$, $\angle BDA = 70°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

<u>Ответ</u>: 75°.

Докажем, что точка *D* – центр описанной окружности треугольника *ABC*. Это можно сделать различными способами.

<u>Первый способ</u>. Опишем окружность около треугольника *ABC* и продолжим отрезок *BD* до пересечения с этой окружностью в точке *K* (см. рис. 4а). Так как $\angle BKC = \angle BAC = 20°$, то $\angle KCD = \angle BDC - \angle DKC = 20°$ (угол *BDC* – внешний для треугольника *KDC*), следовательно, *DC* = *DK*.

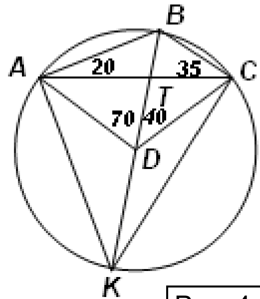


Рис. 4а

Аналогично, так как $\angle BKA = \angle BCA = 35°$, а $\angle BDA = 70°$, то $\angle KÀD = 35°$, то есть *DK* = *DA*. Таким образом, *D* – центр окружности, описанной около треугольника *ACK*, которая совпадает с окружностью, описанной около треугольника *ABC*.

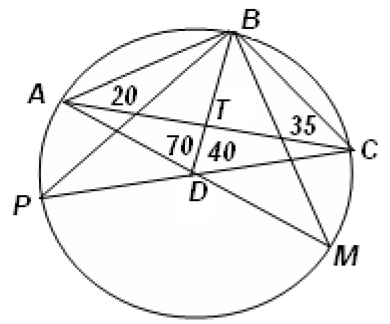


Рис. 4б

Второй способ. На луче AD отметим точку M так, что отрезок $DM = DB$ (см. рис. 4б). Тогда $\angle DBM = \angle BMD = \frac{1}{2}\angle BDA = 35° = \angle BCA$, следовательно, точки A, B, C и M лежат на одной окружности.

Аналогично, отметив на луче CD точку Ð так, что $DP = DB$, получим, что точки A, B, C и P лежат на одной окружности. Так как указанные окружности имеют три общие точки, то эти окружности совпадают, кроме того, точка D равноудалена от точек B, M и P, поэтому она является центром полученной окружности.

Третий способ. Центр описанной окружности тупоугольного треугольника ABC лежит в той же полуплоскости относительно прямой AC, что и точка D (см. рис. 4 а, б). Он является пересечением двух ГМТ: из которых отрезок BC виден под углом $\alpha = 2\angle BAC = 40°$ и из которых отрезок AB виден под углом $\beta = 2\angle BCA = 70°$.

В указанной полуплоскости эти ГМТ являются дугами окружностей, которые имеют единственную общую точку. По условию, из точки D эти же отрезки видны под такими же углами, поэтому точка D совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC.

Теперь ответим на вопрос задачи. Пусть T – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 4 а, б). Из равнобедренного треугольника ADB: $\angle DBA = \frac{180° - \angle BDA}{2} = 55°$; угол BTC – внешний для треугольника BTA, значит, $\angle BTC = \angle TAB + \angle ABT = 75°$.

4.3. Найдите все простые числа p, q и r, для которых выполняется равенство: $p + q = (p - q)^r$.

Ответ: $p = 5$, $q = 3$, $r = 3$.

Из условия задачи вытекает, что $p + q$ делится на $p - q$, следовательно, $(p + q) - (p - q) = 2q$ также делится на $p - q$. Если число q – простое, то делителями числа $2q$ могут являться только числа 1, 2, q и $2q$.

Если $p - q = 1$, то левая часть исходного равенства больше правой. Если $p - q = q$, то $p = 2q$, то есть число p – не простое. Аналогично, если $p - q = 2q$, то $p = 3q$, то есть и в этом случае, p – не простое число. Значит $p - q = 2$. Тогда исходное равенство примет вид: $(q + 2) + q = 2^r \Leftrightarrow q + 1 = 2^{r-1} \Leftrightarrow q = 2^{r-1} - 1$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Если $r = 2$, то $q = 1$ – не простое число. Если r – нечетное число, то $(r - 1)$ – четное, тогда $2^{r-1} - 1$ делится на 3. Действительно, если $k \in N$, то $2^{2k} - 1 = 4^k - 1 = (4 - 1)(4^{k-1} + 4^{k-2} + ... +1)$. Таким образом, $q = 3$. Тогда $p = 5$ и $r = 3$.

Доказывать, что $2^{2k} - 1$ делится на 3 можно и другими способами, например, методом математической индукции.

Второй способ. Так как $q = 2^{r-1} - 1 = \left(2^{\frac{r-1}{2}}\right)^2 - 1 = \left(2^{\frac{r-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{r-1}{2}} + 1\right)$, то q может оказаться простым числом только в случае, когда $2^{\frac{r-1}{2}} - 1 = 1$. Значит, $\frac{r-1}{2} = 1 \Leftrightarrow r = 3$. Тогда $q = 3$ и $p = 5$.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Найдите наибольшее натуральное *n* такое, что $n^{200} < 5^{300}$.

Ответ: *n* = 11.

Перепишем данное неравенство в виде: $\left(n^2\right)^{100} < \left(5^3\right)^{100}$. Тогда, учитывая, что *n* – натуральное число, достаточно найти наибольшее натуральное решение неравенства $n^2 < 125$. Так как $11^2 < 125 < 12^2$, то искомое значение равно 11.

5.2. В трапеции *ABCD* биссектриса тупого угла *B* пересекает основание *AD* в точке *K* – его середине, *M* – середина *BC*, *AB* = *BC*. Найдите отношение *KM* : *BD*.

Ответ: *KM* : *BD* = 1 : 2.

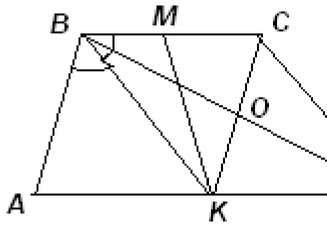


Рис. 5

Так как $\angle ABK = \angle CBK = \angle BKA$, то треугольник *ABK* – равнобедренный: *AK* = *AB* = *BC*. Тогда *ABCK* – параллелограмм (*BC* = *AK*, *BC* || *AK*), и так как *AB* = *BC*, то *ABCK* – ромб. Так как *KD* = *AK* = *BC* и *KD* || *BC*, то *BCDK* – также параллелограмм.

Пусть *O* – точка пересечения его диагоналей *BD* и *CK*, тогда $BO = \frac{1}{2}BD$. Так как треугольник *BCK* – равнобедренный (*BC* = *CK*), то равны его медианы *BO* и *KM*, следовательно, $KM = \frac{1}{2}BD$.

5.3. Существует ли натуральное число, которое при делении на сумму своих цифр как в частном, так и в остатке дает число 2011?

Ответ: нет, не существует.

Предположим, что существует натуральное число *n* с суммой цифр *s*, которое удовлетворяет условию задачи. Тогда *n* = 2011*s* + 2011, откуда *n* – *s* = 2010*s* + 2011.

Из обоснования признака делимости на 3 следует, что натуральное число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки при делении на 3, поэтому *n* – *s* делится на 3. Но число 2010*s* + 2011 на 3 не делится, так как 2010*s* кратно 3, а 2011 не кратно 3. Следовательно, равенство *n* – *s* = 2010*s* + 2011 выполняться не может, то есть числа *n*, удовлетворяющего условию задачи, не существует.