10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Решите уравнение: $2\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}=\frac{10}{x-4}$.

Ответ: 5.

Так как левая часть уравнения принимает только положительные значения, то x > 4. Так как на (4; +∞) функция $f(x)=2\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}$ возрастает, а функция $g(x)=\frac{10}{x-4}$ убывает, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня. При этом $f(5)=g(5)$, то есть *x* = 5 – корень данного уравнения.

1.2. В трапеции *ABCD* (*AD* || *BC*) из точки *E* – середины *CD* провели перпендикуляр *EF* к прямой *AB*. Найдите площадь трапеции, если *AB* = 5, *EF* = 4.

Ответ: 20.

Без ограничения общности можно считать, что *AD* > *BC*. Проведем через точку *E* прямую, параллельную боковой стороне *AB*, и отметим точки *P* и *Q* ее пересечения с прямыми *AD* и *BC* соответственно (см. рис. 1). Тогда четырехугольник *ABQP* – параллелограмм. Кроме того, равны треугольники *PED* и *QEC* (по стороне и двум прилежащим к ней углам), значит, равны и их площади.

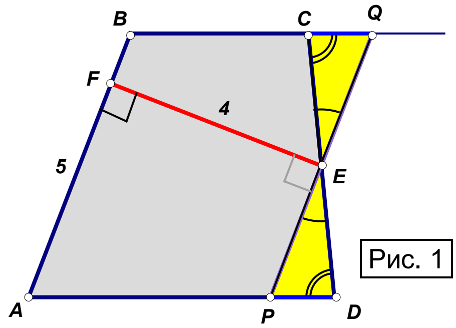


Рис. 1

Таким образом, $S_{ABCD}=S_{ABQP}=AB\cdot EF$ = 20.

1.3. Найдите все пары (*p*; *q*) простых чисел, разность пятых степеней которых является простым числом.

Ответ: (3; 2); (2; 3).

Так как p^5-q^5 делится на (*p* – *q*), то эта разность может являться простым числом только в случае, когда |*p* – *q*| = 1. Из того, что разность двух простых чисел равна 1, следует, что *p* = 3, *q* = 2 (или наоборот).

Проверим: 3^5-2^5 = 243 – 32 = 211 – простое число, так как оно нечетное и не делится ни на одно из чисел: 3, 5, 7, 11, 13 (15^2 = 225 > 211).

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Найдите значение выражения $\sqrt{1+2011^2+\left(\frac{2011}{2012}\right)^2}+\frac{2011}{2012}$.

Ответ: 2012.

Пусть 2011 = *a*, тогда $\sqrt{1+a^2+\left(\frac{a}{a+1}\right)^2}+\frac{a}{a+1}=\frac{\sqrt{(a+1)^2+a^2\cdot(a+1)^2+a^2}}{a+1}+\frac{a}{a+1}=$

$\frac{\sqrt{a^4+2a^3+3a^2+2a+1}+a}{a+1}=\frac{\sqrt{(a^2)^2+a^2+1^2+2\cdot a^2\cdot a+2\cdot a^2\cdot 1+2\cdot a\cdot 1}+a}{a+1}=\frac{\sqrt{(a^2+a+1)^2}+a}{a+1}=$

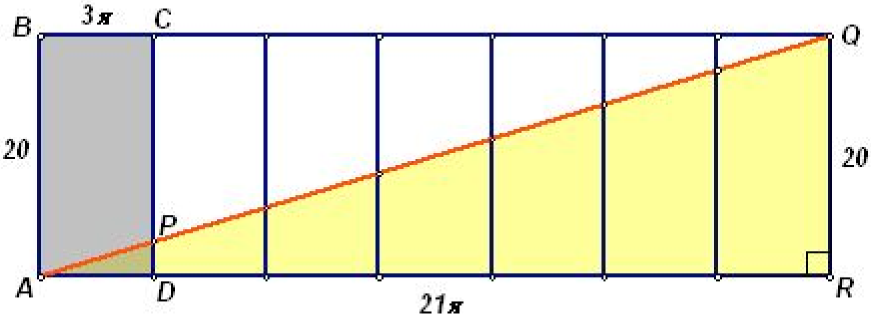
$\frac{(a+1)^2}{a+1}=a+1$. Таким образом, значение данного выражения равно 2012.

Отметим, что преобразовывать подкоренное выражение можно иначе: не раскрывать скобки, а группировать слагаемые, предварительно вычтя и прибавив выражение 2a(a +1).

2.2. Вокруг цилиндрической колонны высотой 20 метров и диаметра 3 метра обвита лента, которая поднимается от подножия до вершины семью полными витками. Какова длина ленты?

Ответ: $\sqrt{400+441\pi^2}$ метров.

Разрезав цилиндр вдоль образующей его боковой поверхности, проходящей через начало ленты, и развернув эту поверхность на плоскость, получим прямоугольник *ABCD* размером $20\times 3\pi$ (см. рис. 2).



«Приклеив» к нему еще шесть таких же прямоугольников, получим прямоугольник *ABQR*. На этой развертке первый виток ленты предстанет в виде отрезка *AP*, а вся лента развернется в диагональ *AQ* прямоугольника *ABQR*.

Рис. 2

Значит, ее длина: $l = AQ = \sqrt{RQ^2 + AR^2} = \sqrt{20^2 + (21\pi)^2} = \sqrt{400 + 441\pi^2} \approx 68{,}9$ (метров).

Отметим, что находить приближенное значение длины ленты от учащихся не требуется.

2.3. На доске записаны числа: 4, 14, 24, … , 94, 104. Можно ли стереть сначала одно число из записанных, потом стереть еще два, потом – еще три, и, наконец, стереть еще четыре числа так, чтобы после каждого стирания сумма оставшихся на доске чисел делилась на 11?

<u>Ответ</u>: нет, нельзя.

Заметим, что одиннадцать записанных целых чисел составляют арифметическую прогрессию, поэтому их сумма делится на 11 ($S = \frac{a_1 + a_{11}}{2}\cdot 11$*, при этом, числа* a_1 *и* a_{11} *имеют одинаковую четность*). Следовательно, для того, чтобы после первого стирания сумма оставшихся чисел делилась на 11, необходимо, чтобы стертое число также делилось на 11. Кроме того, после четырехкратного стирания останется одно число, которое опять-таки должно делиться на 11. Но среди записанных чисел есть только одно число, кратное одиннадцати, это число 44. Таким образом, последовательно выполнить указанные операции невозможно.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Найдите наименьшее положительное значение *x* + *y*, если (1 + tg*x*)(1 + tg*y*) = 2.

<u>Ответ</u>: $\frac{\pi}{4}$.

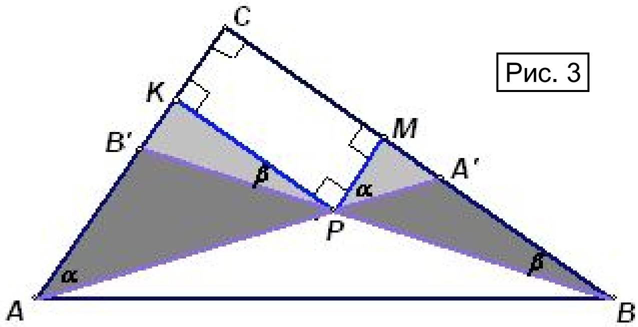
Преобразуем данное равенство: (1 + tg*x*)(1 + tg*y*) = 2 ⇔ 1 + tg*x* + tg*y* + tg*x*tg*y* = 2 ⇔ tg*x* + tg*y* = 1 – tg*x*tg*y*.

1) Пусть 1 – tg*x*tg*y* ≠ 0, тогда полученное равенство можно записать так: $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = 1$ $\Leftrightarrow \operatorname{tg}(x+y) = 1 \Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

В этом случае, наименьшее положительное значение *x* + *y* равно $\frac{\pi}{4}$.

2) Пусть 1 – tg*x*tg*y* = 0, тогда полученное равенство примет вид $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0$. Но система уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y, \\ -\operatorname{tg}^2 x = 1 \end{cases}$, поэтому она не имеет решений. То есть, в этом случае значений *x* и *y*, удовлетворяющих данному равенству, не существует.

3.2. Внутри прямоугольного треугольника *ABC* выбрана произвольная точка *P*, из которой опущены перпендикуляры *PK* и *PM* на катеты *AC* и *BC* соответственно. Прямые *AP* и *BP* пересекают катеты в точках *A*’ и *B*’ соответственно. Известно, что $\frac{S_{\Delta APB'}}{S_{\Delta KPB'}} = m$. Найдите $\frac{S_{\Delta MPA'}}{S_{\Delta BPA'}}$.



Ответ: $\frac{S_{\Delta MPA'}}{S_{\Delta BPA'}} = \frac{1}{m}$.

Так как треугольники PAB' и PKB' имеют общую высоту *PK*, то $\frac{S_{\Delta APB'}}{S_{\Delta KPB'}} = \frac{AB'}{KB'}$ (см. рис. 3). Аналогично, $\frac{S_{\Delta BPA'}}{S_{\Delta MPA'}} = \frac{BA'}{MA'}$.

Докажем, что $\frac{AB'}{KB'} = \frac{BA'}{MA'}$. Для этого докажем равносильное равенство $\frac{KB'}{KA} = \frac{MA'}{MB}$.

Пусть $\angle KAP = \angle MPA' = \alpha$, $\angle MBP = \angle KPB' = \beta$, тогда $\frac{KB'}{KA} = \frac{KP \cdot tg\beta}{\frac{KP}{tg\alpha}} = tg\alpha \cdot tg\beta$ и $\frac{MA'}{MB} = \frac{MP \cdot tg\alpha}{\frac{MP}{tg\beta}} = tg\alpha \cdot tg\beta$. Таким образом, равенство доказано, значит, $\frac{S_{\Delta MPA'}}{S_{\Delta BPA'}} = \frac{S_{\Delta KPB'}}{S_{\Delta APB'}} = \frac{1}{m}$.

Отметим, что для доказательства требуемой пропорциональности отрезков можно провести похожие рассуждения, в которых вместо тангенсов углов используется несколько пар подобных треугольников. Такой способ решения попутно показывает, что полученный результат справедлив и в более общем случае, когда треугольник ABC – произвольный, а отрезки PK и PM параллельны его сторонам CB и CA.

3.3. В турнире по волейболу *n* команд сыграли в один круг (*каждая играла с каждой по одному разу, ничьих в волейболе не бывает*). Пусть *P* – сумма квадратов чисел, задающих количество побед каждой команды, *Q* – сумма квадратов чисел, задающих количество их поражений. Докажите, что *P* = *Q*.

Пусть x_k и y_k соответственно – количество побед и поражений команды с номером *k*. Заметим, что сумма количества побед и количества поражений у каждой команды одна и та же, то есть $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \ldots = x_n + y_n = n - 1$. Кроме того, общее количество побед в турнире равно общему количеству поражений, то есть $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$.

Тогда $P - Q = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) - \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right) = \left(x_1^2 - y_1^2\right) + \left(x_2^2 - y_2^2\right) + \ldots + \left(x_n^2 - y_n^2\right) = \left(x_1 + y_1\right)\left(x_1 - y_1\right) + \left(x_2 + y_2\right)\left(x_2 - y_2\right) + \ldots + \left(x_n + y_n\right)\left(x_n - y_n\right) = (n-1)\left((x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\right) = 0$. Следовательно, *P* = *Q*, что и требовалось.

Отметим, что это же решение можно записать короче, если использовать обозначение суммы: $P - Q = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 - y_k^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k + y_k\right)\left(x_k - y_k\right) = (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} y_k\right) = 0$.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Существуют ли такие значения *a* и *b*, при которых уравнение $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$ имеет четыре различных действительных корня?

Ответ: нет, не существуют.

Преобразуем данное уравнение, прибавив к обеим частям одно и то же выражение: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + ax + b = -4x + 1 \Leftrightarrow (x-1)^4 + (a+4)x + b - 1 = 0$.

Пусть $t = x - 1$, тогда полученное уравнение примет вид: $t^4 + (a+4)(t+1) + b - 1 = 0 \Leftrightarrow t^4 = -(a+4)t - (a+b+3)$.

Докажем, что уравнение вида $t^4 = mt + n$ ни при каких значениях *m* и *n* не может иметь четыре различных действительных корня.

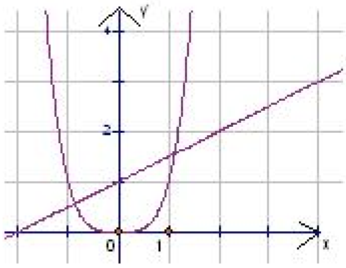


Рис. 4

Первый способ. График функции $y = t^4$ имеет вид параболы, а график функции $y = mt + n$ – прямая, и они не могут иметь более двух точек пересечения (см. рис. 4).

Второй способ. Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - mt - n$. Ее производная: $f'(t) = 4t^3 - m$ определена на множестве *R* и обращается в нуль в одной точке: $t_0 = \sqrt[3]{\frac{m}{4}}$. Функция $f(t)$ непрерывна на *R*, убывает на $(-\infty; t_0]$ и возрастает на $[t_0; +\infty)$, значит, t_0 – ее единственная точка экстремума (точка минимума). Следовательно, график $y = f(t)$ не может иметь более двух точек пересечения с осью абсцисс.

4.2. Длина каждой из сторон выпуклого шестиугольника *ABCDEF* меньше 1. Может ли длина каждой из диагоналей *AD*, *BE* и *CF* быть не меньше двух?

Ответ: нет, не может.

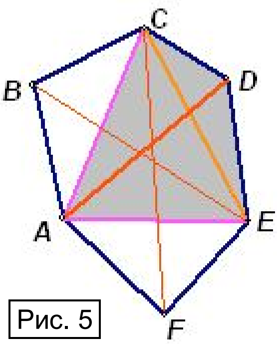


Рис. 5

Докажем, что длина хотя бы одной из этих диагоналей меньше двух. Рассмотрим треугольник *ACE* (см. рис. 5). Без ограничения общности можно считать, что $AE \le AC \le CE$.

Тогда для четырехугольника *ACDE* запишем неравенство Птолемея: $AD \cdot CE \le AC \cdot DE + AE \cdot CD$. *(Его доказательство – см., например, Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. – М.: МЦНМО, 2004, стр. 86 или В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007, №9.70.)*

Разделим обе части этого неравенства на *CE* и используем, что $CD < 1$, $DE < 1$, $AE \le CE$ и $AC \le CE$.

Получим: $AD \le \frac{AC}{CE} \cdot DE + \frac{AE}{CE} \cdot CD < 1 + 1 = 2$.

4.3. Каждый узел бесконечной сетки покрашен в один из четырех цветов так, что вершины любого квадрата со стороной 1 окрашены в разные цвета. Верно ли, что в этой сетке найдется прямая, содержащая бесконечно много узлов, которые окрашены только в два цвета? (*Сетка образована горизонтальными и вертикальными прямыми. Расстояние между соседними параллельными прямыми равно 1*.)

Ответ: да, верно.

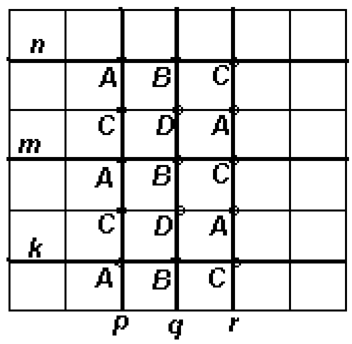


Рис. 6

Из условия задачи следует, что на любой горизонтальной или вертикальной прямой узлы одного цвета не могут быть соседними. Рассмотрим какую-нибудь горизонтальную прямую *m* данной сетки. Если на ней чередуются узлы только двух цветов, то она и является искомой.

Пусть это не так, и на прямой *m* находятся узлы более двух цветов, тогда в каком-то месте три узла разных цветов идут подряд. Обозначим эти цвета слева направо через *A*, *B* и

C (см. рис. 6). Над точкой цвета *B* (и под ней) может находиться только точка четвертого цвета (обозначим его *D*), слева от которой должна быть точка цвета *C*, а справа – точка цвета *A*. Над точкой цвета *D* (и под ней) может находиться только точка цвета *B*, слева от нее – точка цвета *A*, а справа – точка цвета *C*.

Таким образом, на горизонтальных прямых *n* и *k* повторилась раскраска трех точек прямой *m*. Рассуждая аналогично, получим, что такая раскраска будет неограниченно повторяться как вверх, так и вниз. Значит, нашлись уже три вертикальные прямые (*p*, *q* и *r*), на которых бесконечно чередуются узлы двух цветов.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Решите неравенство: $[x]\cdot\{x\} < x - 1$. (*Напомним, что [x] – целая часть числа x, {x} – дробная часть числа x.)*

Ответ: $[2; +\infty)$.

Обозначим: $[x] = a$, $\{x\} = b$, тогда $x = a + b$.

Данное неравенство примет вид: $ab < a + b - 1 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 < 0 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) < 0$.

Так как для любых значений x выполняется неравенство $0 \le \{x\} < 1$, то $b < 1$. Тогда $a > 1$, то есть $[x] > 1$. Следовательно, $x \ge 2$.

5.2. Докажите, что в любой правильной треугольной пирамиде двугранный угол между боковыми гранями больше, чем 60°.

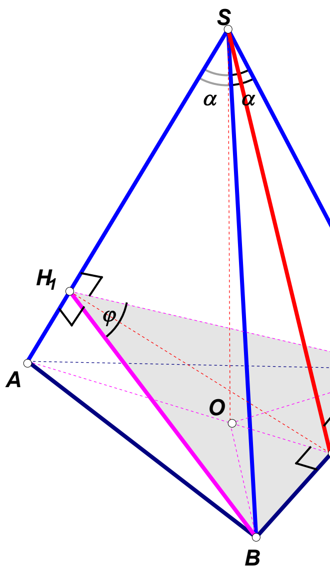


Рис. 7а

Рассмотрим правильную пирамиду *SABC* и проведем перпендикуляр BH_1 к боковому ребру *SA* (см. рис. 7а). Так как боковые грани пирамиды равны, то $CH_1 = BH_1$ и $CH_1 \perp SA$. Таким образом, $\angle BH_1C = \varphi$ – линейный угол двугранного угла между боковыми гранями пирамиды. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Предположим, что $\varphi \le 60°$, тогда *BC* – меньшая сторона равнобедренного треугольника BH_1C, то есть $BC \le CH_1$ (см. рис. 7а). Так как $AC = BC$, то $AC \le CH_1$, значит, в прямоугольном треугольнике AH_1C гипотенуза не больше катета, что невозможно.

Таким образом, $\varphi > 60°$, что и требовалось.

Второй способ. Пусть сторона треугольника *ABC* равна *a*, тогда высота AA_1 этого треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (см. рис. 7а). Отрезок H_1A_1 является ортогональной проекцией отрезка AA_1 на плоскость BH_1C, поэтому $H_1A_1 \perp BC$ и $H_1A_1 < AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $tg\angle H_1BA_1 = \frac{H_1A_1}{BA_1} < \sqrt{3}$, то есть $\angle H_1BA_1 < 60°$. Тогда $\angle BH_1A_1 > 30°$, а $\varphi > 60°$, что и требовалось.

Третий способ. Пусть плоский угол при вершине пирамиды равен α (см. рис. 7а). Тогда $BA_1 = SB\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ и $BA_1 = BH_1\cdot\sin\frac{\varphi}{2} = SB\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{\varphi}{2} = 2SB\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$. Следовательно, $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Так как $0 < \frac{\alpha}{2} < 90^0$, то $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} > 1$, то есть $\sin\frac{\varphi}{2} > \frac{1}{2}$. Таким образом, $\frac{\varphi}{2} > 30°$, значит, $\varphi > 60°$, что и требовалось.

Возможны также аналогичные рассуждения, с помощью которых можно получить равенство, выражающее зависимость между углом φ и углом β наклона бокового ребра *к плоскости основания:* $ctg\frac{\varphi}{2} = \sqrt{3}\cdot\sin\beta$ *или равенство, выражающее зависимость между углом* φ *и углом* γ *наклона боковой грани к плоскости основания:* $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\sin\gamma$*, после чего несложно сделать требуемую оценку. Для вывода этих и аналогичных равенств удобно также использовать «формулу трех косинусов».*

Четвертый способ. Можно воспользоваться любой из двух теорем косинусов для трехгранных углов: 1) $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma_1$ или 2) $\cos\gamma_1 = -\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma$, где α, β и γ – плоские углы трехгранного угла, а α_1, β_1 и γ_1 – двугранные углы, соответственно им противолежащие.

Применим любое из этих утверждения к трехгранному углу с вершиной A, у которого один плоский угол равен 60°, а два других равны по θ, а соответствующие им двугранные углы – это искомый угол φ и два угла, величиной по γ. (см. рис. 7а):

1) $\cos 60^\circ = \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\varphi$, тогда $\cos\varphi = \frac{0{,}5 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ = $\frac{0{,}5 - \left(1 - \sin^2\theta\right)}{\sin^2\theta}$ = 1 – $\frac{1}{2\sin^2\theta}$ < 0,5, так как 0 < θ < 90°;

2) $\cos\varphi = -\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos 60^\circ$ = $-\cos^2\gamma + \left(1 - \cos^2\gamma\right)\cdot 0{,}5$ = $0{,}5 - 1{,}5\cos^2\gamma$ < 0,5, так как 0 < γ < 90°.

В каждом из случаев получим: φ > 60°, что и требовалось.

Для получения требуемой оценки можно также попробовать сослаться на непрерывность и предельные положения.

Действительно, если «до упора сплющивать» пирамиду, то есть устремить вершину S к центру O основания (см. рис. 7б), то в пределе получим, что φ *= 180°.*

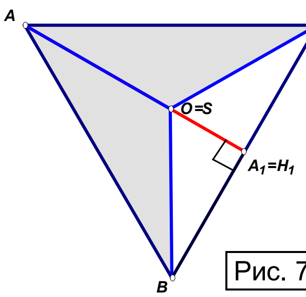


Рис. 7б

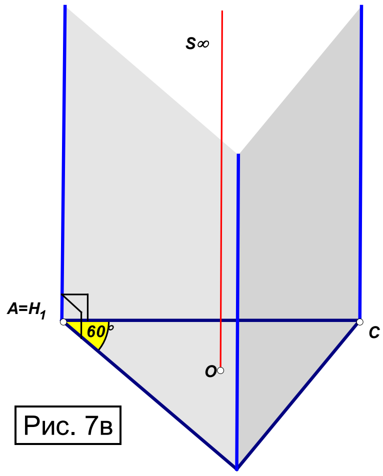


Рис. 7в

Если же, напротив, неограниченно её «растягивать», то есть устремить вершину S к бесконечности в направлении перпендикуляра, восставленного к плоскости основания ABC в его центре O (см. рис. 7в), то в пределе получим, что φ *= 60°.*

Однако, при таком подходе сложно строго обосновать, что функция $\varphi(x)$*, где x = SO, убывает на [0; +∞).*

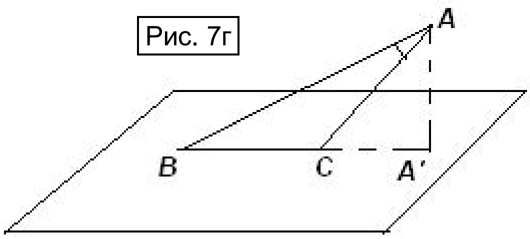


Рис. 7г

Есть также еще одно «соблазнительное» рассуждение: угол BH_1C *является ортогональной проекцией угла BAC, равного 60°, на плоскость* BH_1C*, а «ортогональная проекция угла не меньше самого угла».*

Но последнее утверждение, которое часто выглядит «очевидным», выполняется далеко не всегда. Например, рассмотрим треугольник ABC, в котором угол A – острый, а угол C – тупой, и спроектируем его на плоскость, содержащую прямую BC и перпендикулярную плоскости ABC (см. рис. 7ã). Тогда проекцией острого угла BAC является угол BA'C, величина которого 0°.

5.3. Решите уравнение в целых числах: $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = m^2$

Ответ: $n = 0$; $m = \pm 1$ или $n = -1$; $m = 0$.

Преобразуем левую часть уравнения: $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = (n^4 + 2n^3 + n^2) + (n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = (n^2+1)(n+1)^2$. В правой части уравнения стоит квадрат целого числа, поэтому выражение $(n^2 + 1)(n + 1)^2$ также должно являться точным квадратом. Это возможно в двух случаях: 1) $n^2 + 1$ является полным квадратом, значит, $n = 0$. Тогда $m^2 = 1$, то есть $m = \pm 1$; 2) $n + 1 = 0$, то есть $n = -1$. Тогда $m = 0$.