

11 класс

Первый тур (10 минут; каждая задача – 6 баллов).

1.1. Решите неравенство: $x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1$.

Ответ: (1; 0).

Первый способ. Перепишем данное неравенство в виде: $x + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1 - y^2$.

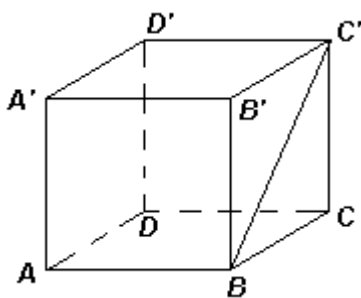
Так как $x - y^2 - 1 \geq 0$, то $x \geq y^2 + 1$. При этом, $\sqrt{x - y^2 - 1} \geq 0$, поэтому $x \leq 1 - y^2$. Следовательно, $y^2 + 1 \leq 1 - y^2 \Leftrightarrow y = 0$. Тогда $1 \leq x \leq 1$, то есть $x = 1$.

При подстановке $x = 1$, $y = 0$ в исходное неравенство получается верное неравенство.

Второй способ. Поскольку $x - y^2 - 1 \geq 0$, то $x - 1 \geq y^2$, следовательно, $x \geq 1$.

Перепишем исходное неравенство так: $y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1 - x$. Тогда $1 - x \geq 0$, значит, $x \leq 1$. Таким образом, $x = 1$. Из неравенства $x - 1 \geq y^2$ получим, что $y = 0$.

При этом способе решения также необходимо сделать проверку, так как при решении использовались только следствия из данного неравенства.



1.2. Верно ли, что в пространстве два угла с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо составляют в сумме 180° ?

Ответ: нет, не верно.

Рассмотрим, например, куб $ABCD A'B'C'D'$ (см. рис. 1). Углы ABC и $BC'C$ удовлетворяют условию, так как $AB \perp BC'$ (по теореме о трех перпендикулярах) и $BC \perp C'C$.

При этом, $\angle ABC = 90^\circ$, а $\angle BC'C = 45^\circ$.

Существуют и другие примеры.

1.3. В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строчке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр произвольным образом составлено десятизначное число. Может ли оказаться так, что из двадцати получившихся чисел ровно одно не делится на 3?

Ответ: нет, не может.

Предположим, что найдется ровно одно число, которое не делится на 3, и оно образовано цифрами какого-то из столбцов. Тогда сумма цифр этого числа также не делится на 3. Во всех остальных столбцах числа делятся на 3 и суммы их цифр делятся на 3. Следовательно, сумма всех чисел в таблице не делится на 3.

С другой стороны, число в каждой строке делится на 3, значит, сумма цифр числа в каждой строке делится на 3, то есть сумма всех чисел таблицы кратна трем. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, и

такого числа не найдется.

Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

2.1. Функция $f(x)$ принимает только положительные значения. Известно, что $f(1) + f(2) = 10$ и при любых a и b $f(a+b) = f(a) + f(b) + 2\sqrt{f(a)f(b)}$. Найдите $f(2^{2011})$.

Ответ: $f(2^{2011}) = 2^{4023}$.

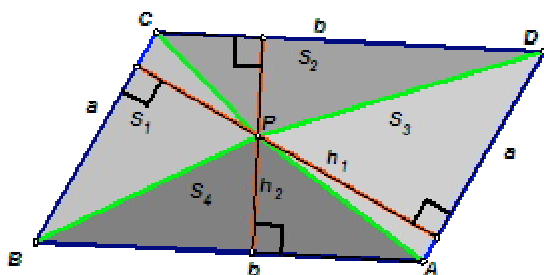
Из условия задачи следует, что $f(a+b) = f(a) + f(b) + 2\sqrt{f(a)f(b)} = (\sqrt{f(a)} + \sqrt{f(b)})^2$. Тогда при $b = a$ получим, что $f(2a) = (2\sqrt{f(a)})^2 = 4f(a)$.

Следовательно, последовательность $f(1)$, $f(2)$, $f(2^2)$, ... является геометрической прогрессией со знаменателем $q = 4$. Число $f(2^{2011})$ – 2012-й член этой прогрессии.

Найдем первый член этой прогрессии. Так как $f(2) = 4f(1)$ и $f(1) + f(2) = 10$, то $5f(1) = 10 \Leftrightarrow f(1) = 2$. Следовательно, 2012-й член прогрессии равен: $f(2^{2011}) = f(1) \cdot q^{2011} = 2 \cdot 4^{2011} = 2^{4023}$.

2.2. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана произвольная точка P и проведены отрезки PA , PB , PC и PD . Площади трех из образовавшихся треугольников равны 1, 2 и 3 (в каком-то порядке). Какие значения может принимать площадь четвертого треугольника?

Ответ: 2 или 4.



Введем обозначения так, как показано на рис. 2. Заметим, что независимо от выбора точки P , выполняется равенство $S_1 + S_3 =$

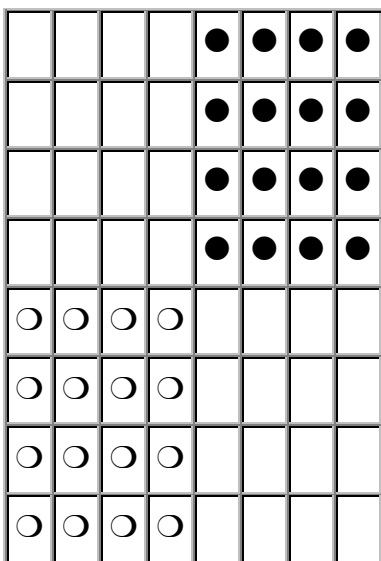
$$S_2 + S_4. \text{ Действительно, } S_1 + S_3 = \frac{ah_1}{2} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{bh_2}{2} = S_2 + S_4.$$

Пусть площадь четвертого треугольника равна S , тогда должно выполняться хотя бы одно из равенств: $1 + 3 = S + 2$ или $2 + 3 = S + 1$ или $1 + 2 = S + 3$. В первом случае $S = 2$, во втором случае $S = 4$, а в третьем – $S = 0$.

Последний случай – «вырожденный», то есть точка P лежит на стороне параллелограмма. Очевидно, что параллелограммы, у которых площади образовавшихся треугольников равны 1, 2, 3 и 2 или 1, 2, 4 и 3, существуют (хотя бы из соображений непрерывности). Доказывать это от школьников не требуется.

2.3. На шахматной доске расставили n белых и n черных ладей так, чтобы ладьи

разного цвета не били друг друга. Найдите наибольшее возможное значение n .



Ответ: 16.

Пример возможной расстановки при $n = 16$ – см. рис. 3.

Докажем, что при $n > 16$ осуществить указанную расстановку невозможно. Заметим, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали могут располагаться ладьи только одного цвета (либо она может оказаться свободной от ладей). Тогда условимся обозначать горизонталь (вертикаль) тем же цветом, что и цвет ладей, стоящих на ней.

Заметим, что более пяти горизонталей (вертикалей) не могут быть одного цвета. Если это не так, и, например, 6 или более горизонталей (вертикалей) – белые, то на долю черных остается 2 или менее горизонталей (вертикалей), а на них может разместиться не более 16 ладей.

Если горизонталей (вертикалей) одного цвета не более трех, то вертикалей (горизонталей) этого же цвета – не менее шести, что невозможно, как было показано выше. Следовательно, горизонталей (вертикалей) одного цвета – либо 4, либо 5.

Предположим, что ровно 5 горизонталей – белые, тогда черных горизонталей – не более трех, следовательно, черных вертикалей должно быть не менее шести – противоречие.

Предположим, что ровно 4 горизонтали – белые, тогда не менее пяти вертикалей должны быть белыми. Это невозможно, как было показано выше.

Можно также провести похожее рассуждение, доказывая сразу, что для выполнения условия задачи сумма горизонталей и вертикалей одного цвета не может быть больше восьми.

Третий тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов).

3.1. Найдите наибольшее значение выражения $x^2y - y^2x$, если $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Так как $x^2y - y^2x = xy(x - y) > 0$ при $x > y > 0$, то наибольшее значение данного выражения (если оно достигается) – положительно и при этом должно выполняться условие $0 < y < x \leq 1$.

Зафиксируем переменную y и рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = yx^2 - y^2x$, где $x \in (y; 1]$. Так как $y > 0$, то ветви соответствующей параболы направлены

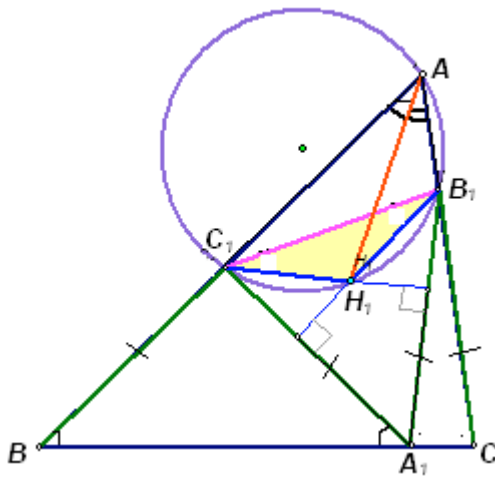
вверх, ее вершина имеет абсциссу $x_s = \frac{y^2}{2y} = \frac{y}{2} < y$, значит, на указанном

промежутке функция возрастает. Следовательно, ее наибольшее значение достигается при $x = 1$, значит, оно равно $f(1) = y - y^2$.

Найдем теперь наибольшее значение квадратичной функции $g(y) = y - y^2$ на $(0; 1]$.

Ветви этой параболы направлены вниз, абсцисса вершины: $y_{\epsilon} = \frac{1}{2} \in (0; 1]$, значит, наибольшее значение функции достигается в вершине параболы и равно $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Можно проверить подстановкой, что значение $\frac{1}{4}$ действительно достигается исходным выражением при $x=1$, $y = \frac{1}{2}$.



3.2. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно так, что $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $C_1A_1B_1$ лежит на биссектрисе угла A .

Так как треугольники BC_1A_1 и A_1B_1C – равнобедренные, то $\angle C_1A_1B = \angle B$, $\angle B_1A_1C = \angle C$ (см. рис. 4). Тогда $\angle C_1A_1B_1 = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = \angle A$.

Пусть высоты треугольника $C_1A_1B_1$ пересекаются в точке H_1 . Этот треугольник – также равнобедренный, поэтому $H_1B_1 = H_1C_1$.

Кроме того, $\angle B_1H_1C_1 = 180^\circ - \angle C_1A_1B_1 = 180^\circ - \angle A$, поэтому четырехугольник $AB_1H_1C_1$ – вписанный. Так как вписанные углы, опирающиеся на равные хорды окружности, равны между собой, то $\angle B_1AH_1 = \angle C_1AH_1$, то есть AH_1 – биссектриса угла A .

Отметим, что если треугольник ABC – остроугольный, то точки C_1 , A_1 и B_1 всегда можно выбрать так, как указано в условии задачи. Иначе, какие-то из этих точек могут оказаться на продолжениях сторон.

3.3. Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$, для которых выполняется

$$\text{НОК}(a; b) - \text{НОД}(a; b) = \frac{ab}{5}.$$

Ответ: $a = 4, b = 20$ или $a = 20, b = 4$.

Воспользуемся тем, что $\text{НОК}(a; b)$ делится на $\text{НОД}(a; b)$, и тождеством $\text{НОК}(a; b) \cdot \text{НОД}(a; b) = ab$. Пусть $\text{НОД}(a; b) = n$, тогда $\text{НОК}(a; b) = kn$ (n и k – натуральные

числа). Тогда условие задачи можно записать так: $kn - n = \frac{kn^2}{5}$. Упрощая это равенство, получим, что $k(5 - n) = 5$. Так как 5 – простое число, а $5 - n < 5$,

полученное уравнение имеет единственное решение: $k = 5$, $n = 4$. Значит, $\text{НОД}(a; b) = 4$; $\text{НОК}(a; b) = 20$.

Таким образом, $ab = 80$, причем $a = 4c$, $b = 4m$, где c и m – натуральные числа. Тогда $16cm = 80 \Leftrightarrow cm = 5$. Значит, $c = 1$, $m = 5$ или $c = 5$, $m = 1$.

Четвертый тур (25 минут; каждая задача – 9 баллов).

$$\begin{cases} x^3 = 2y^2 - z \\ y^3 = 2z^2 - x \\ z^3 = 2x^2 - y \end{cases}$$

4.1. Найдите все неотрицательные решения системы уравнений:

Ответ: $(0; 0; 0)$; $(1; 1; 1)$.

Первый способ. Почленно сложим три уравнения системы, перенеся все слагаемые в левую часть, и сгруппируем выражения с одной и той же переменной:

$x(x-1)^2 + y(y-1)^2 + z(z-1)^2 = 0$. Так как каждая переменная принимает только

$$\begin{cases} x(x-1)^2 = 0, \\ y(y-1)^2 = 0, \\ z(z-1)^2 = 0 \end{cases}$$

неотрицательные значения, то то есть значение каждой из переменных может быть равно 1 или 0.

Подстановкой в исходную систему можно убедиться, что $x=y=z=0$ и $x=y=z=1$ являются ее решениями. Докажем, что других решений нет. Так как при «циклической» перестановке переменных $(x; y; z) \rightarrow (z; x; y)$ данная система уравнений не изменяется, то достаточно убедиться, что решениями не являются тройки чисел $(1; 0; 0)$ и $(1; 1; 0)$. Это действительно так: ни одна из таких троек не является, например, решением третьего уравнения.

Второй способ. Так как при «циклической» перестановке переменных данная система уравнений не изменяется, то можно упорядочить переменные, например, так: $x \geq y \geq z \geq 0$. Тогда, выражая z^2 из второго уравнения и применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим:

$$z^2 = \frac{x+y^3}{2} \geq \frac{y+y^3}{2} \geq \sqrt{y \cdot y^3} = y^2, \text{ откуда } z \geq y. \text{ Таким образом, } y = z.$$

Тогда $\begin{cases} x^3 = 2y^2 - y, \\ y^3 = 2x^2 - y \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = 2(y^2 - x^2)$. Так как $x \geq y \geq 0$, то $x^3 \geq y^3$ и $y^2 \leq x^2$, поэтому последнее равенство выполняется только при $x=y$. Таким образом, $x=y=z$.

В этом случае получаем уравнение: $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 1$. Следовательно, $x=y=z=0$ или $x=y=z=1$.

$$\begin{cases} y^2 = \frac{x^3 + z}{2} \geq \sqrt{z \cdot x^3} \\ z^2 = \frac{x + y^3}{2} \geq \sqrt{x \cdot y^3} \\ x^2 = \frac{y + z^3}{2} \geq \sqrt{y \cdot z^3} \end{cases}$$

Третий способ. Запишем следствие из данной системы:

Перемножив почленно три неравенства, получим, что $x^2 y^2 z^2 \geq x^2 y^2 z^2$. Значит, во

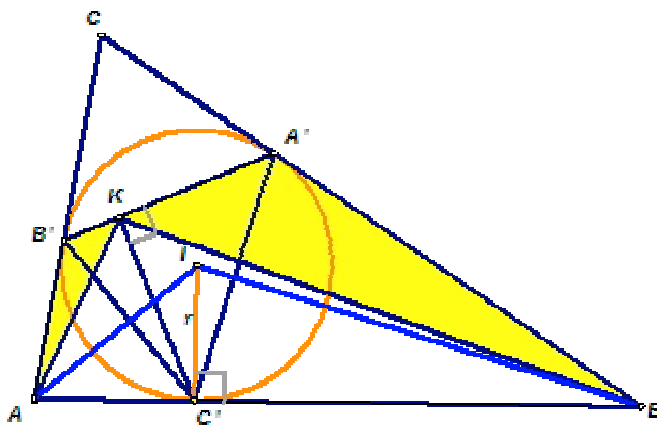
$$\begin{cases} x^3 = z, \\ y^3 = x, \\ z^3 = y \end{cases}$$

всех исходных неравенствах должно выполняться равенство, то есть

$$\left(\frac{z^3}{z}\right)^2 = \frac{z + z}{2}$$

Подставим полученное в первое уравнение системы: $\Leftrightarrow z = 0$ или $z = 1$.

Следовательно, $x = y = z = 0$ или $x = y = z = 1$.



4.2. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC , AC и AB в точках A' , B' и C' соответственно. Точка K – проекция точки C' на прямую $A'B'$. Докажите, что KC' – биссектриса угла AKB .

Прежде всего отметим, что точка K лежит между точками A' и B' , так как треугольник $A'B'C'$ – остроугольный. Действительно, пусть угол треугольника ABC равен

$$\frac{\alpha}{2}$$

α , тогда противолежащий ему угол треугольника $A'B'C'$ равен $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Теперь заметим, что утверждение задачи равносильно равенству углов AKB' и BKA' (см. рис. 5). Поэтому докажем, что треугольники AKB' и BKA' подобны.

Поскольку $\angle AB'K = \angle BA'K$, то для доказательства подобия этих треугольников

$$\frac{AB'}{BA'} = \frac{B'K}{A'K}.$$

достаточно показать, что

$$AB' = AC' = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2};$$

Пусть r – радиус вписанной окружности, тогда

$$BA' = BC' = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2}.$$

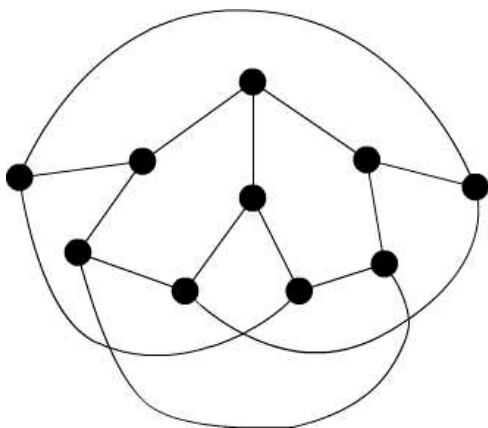
Таким образом,

$$\angle A'B'C' = \frac{1}{2} \angle A'IC' = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle B) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

$$\text{Аналогично, } \angle B'A'C' = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}. \text{ Тогда } \frac{B'K}{A'K} = \frac{C'K}{\operatorname{tg} \angle A'B'C'} \cdot \frac{C'K}{\operatorname{tg} \angle B'A'C'} = \frac{\operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\angle A}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\angle B}{2} \right)}$$

$$= \frac{\operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2}} = \frac{AB'}{BA'}.$$

Таким образом, треугольники AKB' и BKA' подобны (по двум сторонам и углу между ними). Из подобия этих треугольников следует равенство углов AKB' и BKA' , а из него, в свою очередь, следует, что KC' – биссектриса угла AKB .



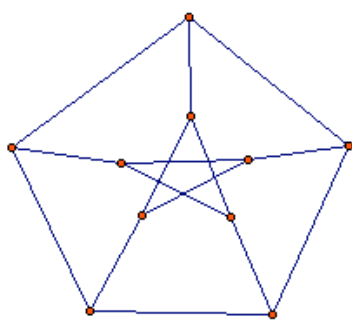
Отметим, что заключительную часть рассуждения можно провести иначе. Для того, чтобы доказать утверждение задачи,

достаточно доказать равенство $\frac{AC'}{BC'} = \frac{AK}{BK}$ (характеристическое свойство биссектрисы треугольника, см. рис. 5), которое равносильно

равенству $\frac{AB'}{BA'} = \frac{AK}{BK}$. Последнее равенство также следует из подобия треугольников AKB' и BKA' , доказанного выше.

4.3. В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединен авиалиниями не более, чем с тремя другими, и из любого города можно попасть в любой другой, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее количество городов может быть в этом государстве?

Ответ: 10.



Рассмотрим один из городов, обозначив его A . Тогда из города A можно попасть напрямую не более, чем в три города, а с одной пересадкой – еще не более, чем в $3 \cdot 2 = 6$ городов (каждый из этих трех городов может быть еще соединен не более, чем с двумя). Таким образом, всего городов может быть не более десяти.

Примеры такого государства – см. рис. 6 а, б.

Отметим, что оба примера – это различные способы изображения одного и того же графа с десятью вершинами, каждая из которых соединена с тремя ребрами. Этот граф называется графом Петерсена и служит иллюстрацией некоторых утверждений теории графов.

Пятый тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов).

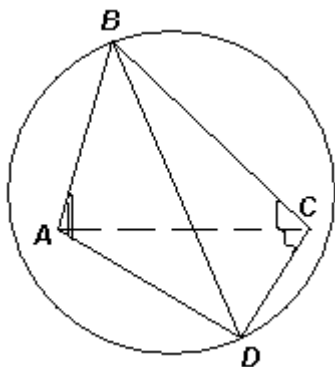
5.1. В классе находятся учитель и несколько учеников. Известно, что возраст

учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе. Сколько учеников находится в классе?

Ответ: 5 учеников.

Пусть в классе n учеников, их средний возраст – p лет, а возраст учителя – m лет.

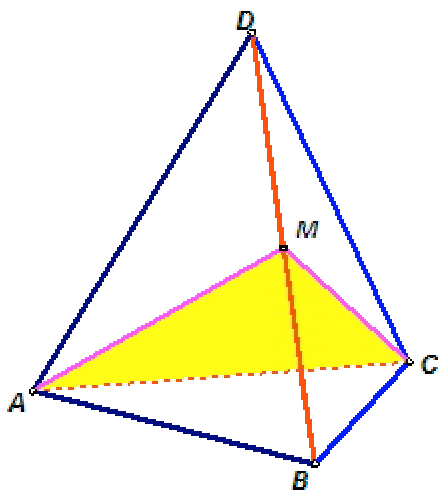
Тогда, по условию, $m = p + 24$ и $m = \frac{pn + m}{n + 1} + 20$. Упрощая второе уравнение, получим: $m(n + 1) = pn + m + 20(n + 1) \Leftrightarrow n(m - p) = 20(n + 1)$. Из первого уравнения следует, что $m - p = 24$, тогда $24n = 20n + 20$, то есть $n = 5$.



5.2. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы BAD и BCD – тупые. Сравните длины ребер AC и BD .

Ответ: $AC < BD$.

Первый способ. Рассмотрим данный тетраэдр и построим сферу с диаметром BD (см. рис. 7а). Так как углы BAD и BCD – тупые, то вершины A и C будут лежать внутри этой сферы, следовательно расстояние от A до C меньше диаметра.



Возможна также некоторая модификация этого решения. Повернем грань BDA тетраэдра так, чтобы точка A оказалась в плоскости BDC , тогда ребро AC увеличится и станет диагональю плоского четырехугольника $BADC$, а величины данных углов и длина диагонали BD не изменятся. Рассмотрим окружность с диаметром BD (см. рис. 7а). Так как точки A и C лежат внутри этой окружности, то $AC < BD$, значит это неравенство выполняется и в данном тетраэдре.

Второй способ. В треугольниках ABD и CBD проведем медианы AM и CM соответственно (см. рис. 7б). Воспользуемся тем, что в тупоугольном треугольнике медиана, проведенная к большей стороне, меньше, чем половина этой стороны (это можно доказать, либо проведя окружность, у которой большая сторона является диаметром, либо используя формулу для вычисления длины медианы и теорему косинусов).

Тогда, так как углы BAD и BCD – тупые, то $AM < \frac{1}{2}BD$ и $CM < \frac{1}{2}BD$. Следовательно, по неравенству треугольника $AC < AM + CM < BD$.

5.3. В шахматном турнире было 12 участников (каждый сыграл с каждым по одному разу). По итогам турнира оказалось, что есть 9 участников, каждый из которых набрал не более четырех очков. Известно, что Петя набрал ровно 9 очков. Как он сыграл с каждым из двух остальных шахматистов? (Победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0 очков.)

Ответ: Петя проиграл обоим.

Рассмотрим 9 участников, о которых говорится в условии задачи. Они провели $\frac{9 \cdot 8}{2}$

между собой $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ партий, то есть разыграли ровно 36 очков. Значит, ни один из них не мог набрать меньше, чем 4 очка, то есть каждый набрал ровно 4 очка. Следовательно, все партии, игравшиеся с остальными тремя шахматистами, они проиграли. Значит, Петя выиграл у каждого из этих девяти, а поскольку он всего набрал 9 очков, то две остальные партии он проиграл.