11 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Последовательность a_n задана условием: $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Найдите a_{100}, если $a_1 = 3$, $a_2 = 7$.

Ответ: –3.

Найдем еще несколько членов данной последовательности: $a_3 = 4$, $a_4 = -3$, $a_5 = -7$, $a_6 = -4$, $a_7 = 3 = a_1$, $a_8 = 7 = a_2$. Значит, члены последовательности повторяются с периодом 6. Так как 100 при делении на 6 дает остаток 4, то $a_{100} = a_4 = -3$.

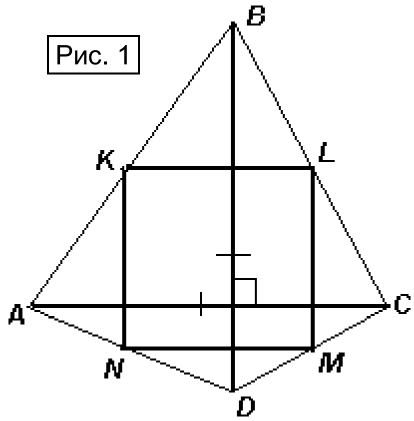
1.2. Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами квадрата. Обязательно ли исходный четырехугольник является квадратом?

Ответ: нет, не обязательно.

Рассмотрим четырехугольник *ABCD* с равными и перпендикулярными диагоналями *AC* и *BD*. Пусть *K*, *L*, *M* и *N* – середины его сторон (см. рис. 1). Середины сторон любого четырехугольника образуют параллелограмм (*теорема Вариньона*). Из условия задачи следует равенство и перпендикулярность сторон параллелограмма *KLMN*, поэтому он является квадратом.

В частности, условию задачи удовлетворяет равнобокая трапеция с перпендикулярными диагоналями или дельтоид с равными диагоналями.

Рис. 1



1.3. На какую наибольшую степень двойки делится число $10^{20} - 2^{20}$?

Ответ: на 2^{24}.

Разложим данное выражение на множители: $10^{20} - 2^{20} = 2^{20}\cdot 5^{20} - 2^{20} = 2^{20}\cdot(5^{20} - 1)$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Продолжим разложение на множители, используя формулы $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ и $a^p + b^p = (a + b)(a^{p-1} - a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 - \ldots - ab^{p-2} + b^{p-1})$. Первая формула справедлива для всех натуральных *n*, а вторая – для всех нечетных *p*.

Тогда $2^{20}\cdot(5^{20} - 1) = 2^{20}\cdot(5^{10} - 1)\cdot(5^{10} + 1) = 2^{20}\cdot(5^5 - 1)\cdot(5^5 + 1)\cdot(25^5 + 1) = 2^{20}\cdot(5 - 1)\cdot(5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1)\cdot(5 + 1)\cdot(5^4 - 5^3 + 5^2 - 5 + 1)\cdot(25 + 1)\cdot(25^4 - 25^3 + 25^2 - 25 + 1) = 2^{24}\cdot(5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1)\cdot 3\cdot(5^4 - 5^3 + 5^2 - 5 + 1)\cdot 13\cdot(25^4 - 25^3 + 25^2 - 25 + 1)$. Последние пять множителей – нечетные, значит, 2^{24} – искомое число.

Можно также не раскладывать на множители выражение $5^{10} + 1$, если отдельно доказать (например, по индукции), что при любом натуральном n выражение $5^n + 1$ дает остаток 2 при делении на 4, то есть $5^{10} + 1$ делится на 2, но не делится на 4.

Второй способ. Используем бином Ньютона: $5^{20} - 1 = (1 + 4)^{20} - 1 = 1 + 20\cdot 4 + \frac{20\cdot 19}{2}\cdot 4^2 + \ldots + 4^{20} - 1 = 5\cdot 2^4 + 10\cdot 19\cdot 2^4 + \ldots + 4^{20}$.

В полученной сумме первое слагаемое делится только на 16, а каждое из остальных делится хотя бы на 32. Значит, число $5^{20} - 1$ делится только на 2^4, а исходное число – на 2^{24}.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Сравните: sin3 и sin3°.

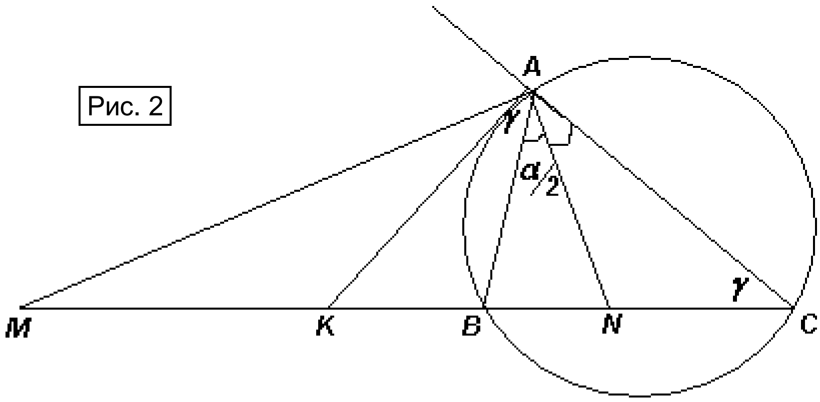
Ответ: sin3 > sin3°.

sin3 = sin(π – 3) > sin0,1 > $\sin\frac{\pi}{60}$ = sin3°, так как π – 3 > 0,1 > $\frac{\pi}{60}$ и эти числа лежат в промежутке (0; $\frac{\pi}{2}$), а функция y = sin$x$ на этом промежутке возрастает.

2.2. Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведены касательная AK к его описанной окружности, а также биссектрисы AN и AM внутреннего и внешнего углов при вершине A (точки M, K и N лежат на прямой BC). Докажите, что $MK = KN$.

Заметим, что $\angle MAN$ = 90°, так как этот угол образован биссектрисами смежных углов (см. рис. 2). Обозначим величины углов A и C данного треугольника через α и γ соответственно. Тогда $\angle KAB = \gamma$ (угол между касательной и хордой), $\angle KNA = \frac{\alpha}{2} + \gamma$ (внешний угол треугольника ACN). Значит, в треугольнике AKN: $\angle KAN = \frac{\alpha}{2} + \gamma = \angle KNA$, следовательно, KA = KN. Таким образом, AK – медиана прямоугольного треугольника MAN, проведенная к гипотенузе, то есть K – середина MN.

Рис. 2



Отметим, что из доказанного утверждения автоматически следует, что точка K является центром окружности Аполлония треугольника ABC.

2.3. Дан правильный девятиугольник. Сколькими способами можно выбрать три его вершины так, чтобы они являлись вершинами равнобедренного треугольника?

Ответ: тридцатью способами.

Так как для любых двух вершин девятиугольника существует ровно одна его вершина, равноудаленная от них, то каждый из получающихся равнобедренных, но не равносторонних, треугольников однозначно определяется своим основанием. Количество способов выбрать две вершины основания из девяти равно $\frac{9!}{2!\cdot 7!}$ = 36. При таком способе подсчета каждый равносторонний треугольник учтен 3 раза. Таких треугольников – три, поэтому искомое число равно 36 – 6 = 30.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

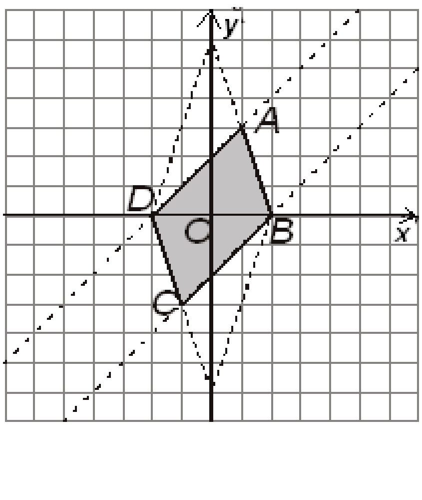
3.1. Найдите наибольшее значение выражения $x^2 + y^2$, если $|x-y| \le 2$ и $|3x+y| \le 6$.

Ответ: 10.

Множество точек, удовлетворяющих системе неравенств $|x-y| \le 2$ и $|3x+y| \le 6$, образовано пересечением двух полос, поэтому представляет собой границу и внутреннюю часть параллелограмма $ABCD$, где A(1; 3), B(2; 0), C(–1; –3), D(–2; 0) (см. рис. 3).

Пусть $a = x^2 + y^2$, тогда решением задачи является наибольшее значение параметра a, для которого окружность $x^2 + y^2 = a$ имеет общие точки с параллелограммом $ABCD$. Так как центр O(0; 0) этой окружности совпадает с центром симметрии параллелограмма и $AC > BD$, то наибольшее значение a равно $OA^2 = (1 – 0)^2 + (3 – 0)^2 = 10$.

Рис. 3



3.2. В кубе с ребром длины 1 провели два сечения в виде правильных шестиугольников. Найдите длину отрезка, по которому эти сечения пересекаются.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Пусть *PQKLMN* – сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, являющееся правильным шестиугольником (см. рис. 4а).

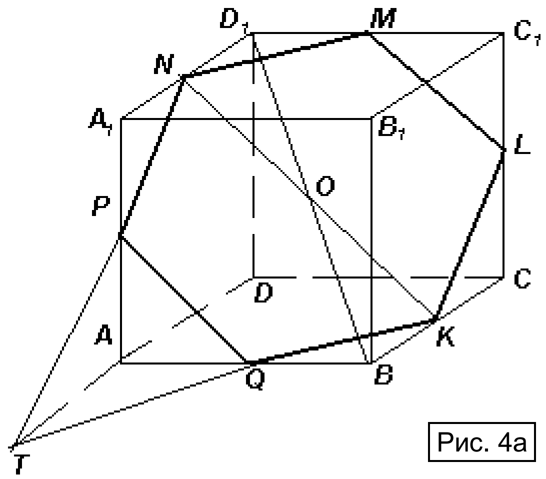


Рис. 4а

1) Докажем, что центр сечения совпадает с центром куба. Действительно, противолежащие стороны *QK* и *MN* правильного шестиугольника равны и параллельны. Кроме того, $AB \parallel C_1D_1$, значит, $\angle KQB = \angle NMD_1$. Следовательно, прямоугольные треугольники *KQB* и NMD_1 равны (по гипотенузе и острому углу), поэтому $KB = ND_1$. Кроме того, $KB \parallel ND_1$, тогда BKD_1N – параллелограмм. Центр сечения является серединой его диагонали *KN*, которая совпадает с серединой диагонали BD_1 куба, что и требовалось.

2) Докажем, что вершинами сечения являются середины ребер куба.

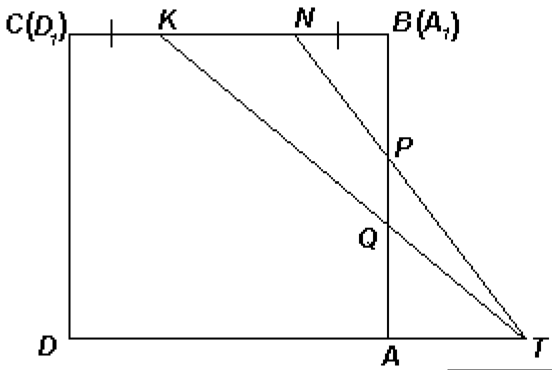


Рис. 4б

Пусть прямые *PN* и *KQ* пересекаются в точке *T* на прямой *AD* (см. рис. 4а). Совместим плоскости граней *ABCD* и AA_1D_1D (*поворотом на 90° вокруг прямой AD*). При этом совпадут вершины *C* и D_1 а также вершины *B* и A_1 (см. рис. 4б).

Предположим, что точка *K* не является серединой ребра *BC*. Как было показано выше, отрезки *KC* и *NB* равны. Пусть точка *N* лежит на отрезке *BK*, тогда точка *P* лежит на отрезке *QB* Используя теорему Пифагора в треугольниках *KBQ* и *NBP*, получим, что $KQ > NP$, что противоречит равенству сторон правильного шестиугольника. Таким образом, *K* – середина ребра *BC*. Аналогично доказывается, что остальные вершины сечения также являются серединами ребер.

3) Заметим, что два сечения, указанных в условии задачи, имеют общий отрезок, соединяющий середины противоположных ребер куба. Действительно, всего у куба 12 ребер. Если середины шести из них являются вершинами сечения, то из оставшихся шести точек в одной плоскости лежат не более четырех. Поэтому любые два таких сечения имеют две общие вершины, которые лежат на противоположных ребрах. Следовательно, они пересекаются по отрезку, соединяющему середины этих ребер куба.

Длина такого отрезка равна диагонали грани куба, то есть равна $\sqrt{2}$.

3.3. На шахматную доску поставлены 11 коней так, что никакие два не бьют друг друга. Докажите, что на ту же доску можно поставить еще одного коня с сохранением этого свойства.

Докажем, что 11 коней не смогут побить все поля доски. Действительно, чтобы побить выделенные 12 клеток (см. рис. 5а) необходимо, по крайней мере, 12 коней, так как никакие две клетки не могут быть побиты одним конем.

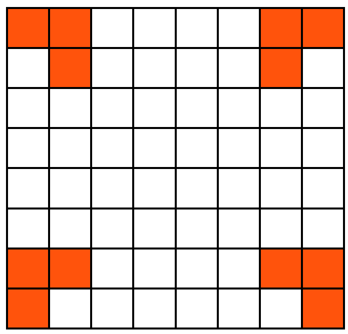


Рис. 5а

Значит, на доске есть хотя бы одна клетка, которая не бьется ни одним из уже поставленных коней. Тогда на нее можно поставить еще одного коня.

Это решение допускает и некоторую модификацию, использующую тот факт, что конь, стоящий на белой клетке, бьет черную клетку (и наоборот). Без ограничения общности можно считать, что хотя бы шесть черных клеток занято конями изначально, значит, белых клеток занято не более пяти. Докажем, что можно занять ещё одну белую клетку. На рис. 5б отмечено шесть белых клеток, которые не могут быть побиты менее, чем шестью черными конями, значит на одну из них можно поставить еще одного коня.

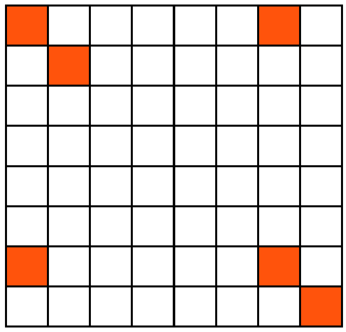


Рис. 5б

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на интервале (0; 1).

Первый способ. Предположим, что данное уравнение не имеет корней на интервале (0; 1). Тогда, в силу непрерывности, квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ сохраняет знак на этом промежутке. При этом, ее значения: $f(0) = c$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(a + 2b + 4c)$, $f(1) = a + b + c$ – числа одного знака. Следовательно, число $f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1) = 2a + 3b + 6c$ имеет тот же знак, что противоречит условию. Предположение неверно, следовательно, данное уравнение имеет корень на интервале (0; 1).

Второй способ. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Если $c = 0$, то $f(x) = 0$ при $x = 0$ или $x = -\frac{b}{a}$. Из условия $2a + 3b = 0$ следует, что $-\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \in (0; 1)$, что и требовалось.

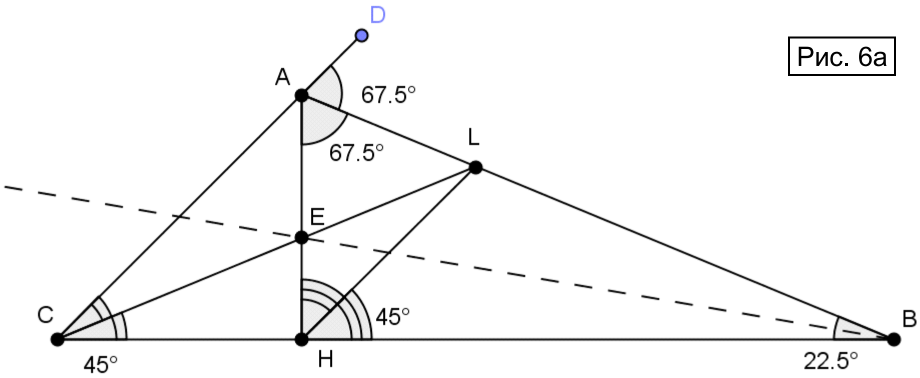
2) Если $c \neq 0$, то $f(0) = c$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4a+6b+9c}{9} = \frac{2(2a+3b)+9c}{9} = \frac{-12c+9c}{9} = -\frac{c}{3}$. Таким образом, на концах отрезка $\left[0; \frac{2}{3}\right]$ функция принимает значения разных знаков. Следовательно, по теореме о промежуточном значении, она обращается в ноль в некоторой внутренней точке этого отрезка.

Третий способ. Так как $\int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Big|_0^1 = \frac{2a+3b+6c}{3} = 0$, то квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает на отрезке [0; 1] как положительные, так и отрицательные значения. Кроме того, эта функция непрерывна на [0; 1], значит, она обращается в ноль в некоторой его внутренней точке.

4.2. В треугольнике ABC: $\angle B = 22{,}5°$, $\angle C = 45°$. Докажите, что высота AH, медиана BM и биссектриса CL пересекаются в одной точке.

Первый способ.

Пусть DAB – внешний угол данного треугольника, тогда $\angle DAB$ = 67,5° (см. рис. 6а).

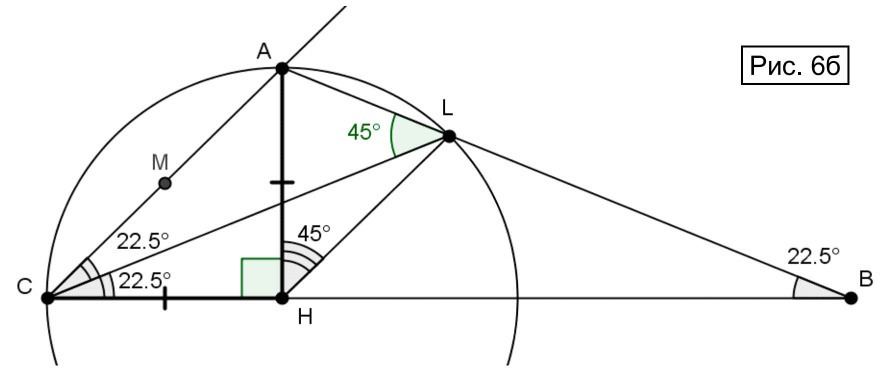


Из прямоугольного треугольника ABH: $\angle HAB$ = 67,5°. Следовательно, в точке L пересекаются внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника ACH, то есть L – центр вневписанной окружности треугольника ACH. Тогда HL – еще одна внешняя биссектриса треугольника ACH, значит, $\angle LHB$ = 45° = $\angle ACB$. Следовательно, AC || LH, то есть $ACHL$ – трапеция, а отрезки CL и AH – ее диагонали.

Пусть эти диагонали пересекаются в точке E. Так как B – точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, то прямая BE проходит через середину основания AC, то есть содержит медиану BM треугольника ABC (*замечательное свойство трапеции*), что и требовалось.

Второй способ.

Из теоремы Чевы следует, что требуемое утверждение равносильно выполнению равенства $\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$, которое, в данном случае, равносильно равенству $\frac{AL}{LB}=\frac{CH}{HB}$ (см. рис. 6б). Для доказательства последнего равенства достаточно доказать, что LH || AC.



Заметим, что треугольник AHC – прямоугольный и равнобедренный ($\angle AHC$ = 90°, $\angle ACH$ = 45°, значит, $\angle AHC$ = 45°). Так как $\angle LCB$ = 22,5°, то $\angle ALC$ = 45° (внешний угол треугольника BLC). Таким образом, точка L лежит на окружности с центром в точке H и радиусом HA. Тогда $\angle LHA = 2\angle LCA$ = 45° = $\angle CAH$, поэтому LH || AC.

Так как оба способа решения сводятся к доказательству параллельности AC и LH, то их можно комбинировать.

4.3. В футбольном чемпионате участвуют 18 команд. На сегодняшний день проведено 8 туров (в каждом туре все команды разбиваются на пары и в каждой паре команды играют друг с другом, причем пары не повторяются). Верно ли, что найдутся три команды, которые не сыграли ни одного матча между собой?

Ответ: да, верно.

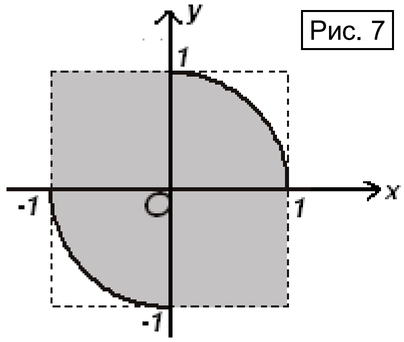
Рассмотрим одну из команд, обозначив ее через A. Так как за 8 туров она сыграла с восемью командами, то с девятью она не сыграла. Если среди этих девяти есть две команды B и C, не сыгравшие между собой, то A, B и C образуют искомую тройку команд.

В противном случае эти 9 команд сыграли между собой полный круговой турнир. Для этого потребовалось $\frac{9\cdot 8}{2}$ = 36 матчей. Однако, в каждом туре они могли играть между собой не более четырех матчей, поэтому за 8 туров таких матчей могло быть сыграно не более 32. Полученное противоречие показывает, что искомая тройка команд обязательно найдется.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\geq xy$.

Ответ: см. рис 7.



Данное неравенство равносильно совокупности систем: $\begin{cases}|x|\leq 1,\\ |y|\leq 1,\\ xy\leq 0\end{cases}$ или $\begin{cases}|x|\leq 1,\\ |y|\leq 1,\\ xy>0,\\ (1-x^2)(1-y^2)\geq x^2y^2\end{cases}$.

Множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих первой системе, представляет собой объединение двух квадратов со стороной 1, расположенных во II и IV координатных четвертях. Учитывая, что последнее неравенство второй системы равносильно неравенству $x^2 + y^2 \leq 1$, получим, что множество точек, удовлетворяющих второй системе – объединение двух «четвертинок» единичного круга, расположенных в I и III координатных четвертях.

5.2. Какое наибольшее количество треугольных граней может иметь пятигранник?

Ответ: 4.

Примером такого пятигранника является четырехугольная пирамида. Докажем, что все пять граней пятигранника не могут являться треугольниками.

Действительно, пусть такой пятигранник существует. Тогда, учитывая что каждое его ребро является общим для двух граней, получим, что у него должно быть $\frac{5\cdot 3}{2}$ ребер, что невозможно.

5.3. Существуют ли четыре последовательных натуральных числа, каждое из которых можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

Ответ: нет, не существуют.

Квадрат любого натурального числа при делении на 4 дает в остатке либо 0, либо 1. Значит, сумма двух квадратов при делении на 4 может иметь в остатке либо 0, либо 1, либо 2. Но среди четырех последовательных натуральных чисел одно дает остаток 3 при делении на 4, поэтому оно не может быть представлено в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.