8 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Ваня пошел с папой в тир. Уговор был такой: Ване даются 10 патронов, и за каждое попадание в цель он получает еще три патрона. Ваня сделал 14 выстрелов и ровно в половине из них он попал в цель. Сколько патронов осталось у Вани?

Ответ: 17 патронов.

Ваня попал в цель 7 раз, поэтому получил 21 дополнительный («призовой») патрон. Так как изначально у него было 10 патронов, то всего патронов в его распоряжении оказалось 31. Выстрелов Ваня сделал 14, значит, 17 патронов у него осталось.

1.2. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 7×7. Покажите, как разрезать его по линиям сетки на шесть частей и сложить из них три квадрата.

Ответ: см. рис. 1.

На рис. 1а показано как разрезать, а на рис. 1б – как составить.

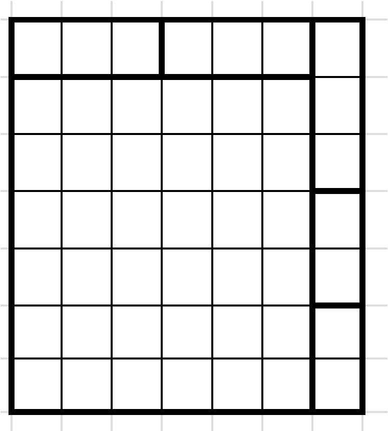


Рис. 1а

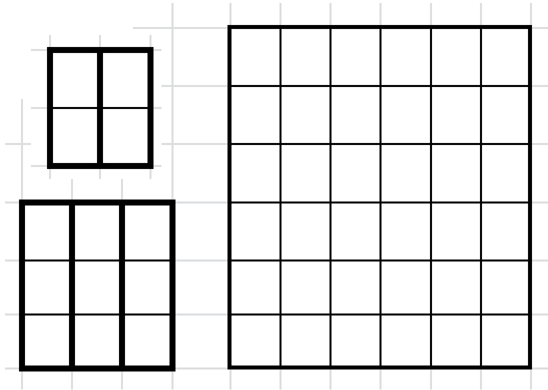


Рис. 1б

1.3. В классе – 17 человек. Известно, что среди любых десяти есть хотя бы одна девочка, а мальчиков больше, чем девочек. Сколько девочек в этом классе?

Ответ: 8.

Так как мальчиков в классе больше, чем девочек, то мальчиков – не менее девяти. Если мальчиков больше девяти, то не будет выполняться условие: среди любых десяти человек есть хотя бы одна девочка. Значит, мальчиков – ровно 9, тогда девочек – 8.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Известно, что числа a, b, c и d – целые и $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}$. Может ли выполняться равенство $abcd = 2012$?

Ответ: нет, не может.

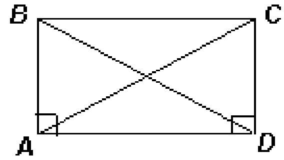
Преобразуем данное равенство: $(a-b)(c+d) = (a+b)(c-d) \Leftrightarrow ac + ad - bc - bd = ac - ad + bc - bd \Leftrightarrow ad = bc$.·

Предположим, что $abcd = 2012$. Тогда $(ad)^2 = 2012$, что невозможно так как число 2012 не является квадратом никакого целого числа.

2.2. В четырехугольнике есть два прямых угла, а его диагонали равны. Верно ли, что он является прямоугольником?

Ответ: да, верно.

Рис. 2а

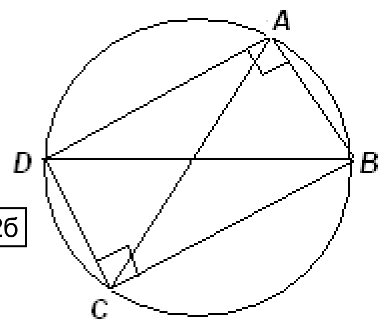


Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором $AC = BD$. Возможны два случая: данные прямые углы либо соседние, либо противоположные.

1) Пусть углы A и D – прямые (см. рис. 2а). Тогда прямоугольные треугольники ABD и DCA равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $AB = DC$. Кроме того, $AB \parallel DC$, так как $AB\perp AD$ и $DC\perp AD$.

Таким образом, $ABCD$ – параллелограмм, а так как в нем есть прямой угол, то $ABCD$ – прямоугольник.

Рис. 2б



2) Пусть углы *A* и *Ñ* – прямые, тогда около *ABCD* можно описать окружность с диаметром *BD* (см. рис. 2б). Так как диаметр окружности является ее наибольшей хордой, то *AC* – также диаметр этой окружности, значит, углы *B* и *D* – также прямые.

Таким образом, в четырехугольнике *ABCD* все углы прямые, значит, это прямоугольник.

2.3. На какую наибольшую степень тройки делится произведение $3 \cdot 33 \cdot 333 \cdot \ldots \cdot 3333333333$? (*В последнем множителе – десять троек.*)

Ответ: на 3^{14}.

Так как каждый из десяти множителей делится хотя бы на 3, то $3 \cdot 33 \cdot 333 \cdot \ldots \cdot 3333333333 = 3^{10} \cdot 1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \ldots \cdot 1111111111$.

Среди получившихся чисел, записанных только единицами, на 3 могут делиться только числа с суммой цифр, кратной трем: 111, 111111 и 111111111. Каждое из чисел 111 и 111111 делится только на 3, а число, записанное девятью единицами, делится только на 9, так как $111111111 = 9 \cdot 12345679$, а число 12345679 не кратно трем (сумма его цифр равна 37).

Таким образом, данное произведение делится на 3^{14}, но не делится на 3^{15}.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. На доске записаны в ряд сто чисел, отличных от нуля. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, является произведением двух соседних с ним чисел. Первое число – это 7. Какое число последнее?

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Обозначим данные числа: $a_1 = 7$, a_2, ..., a_{100}. По условию: $a_2 = a_1 \cdot a_3$; $a_3 = a_2 \cdot a_4$; ...; $a_{99} = a_{98} \cdot a_{100}$.

Так как в заданном ряду нет нулей, то $a_1 = \frac{a_2}{a_3}$; $a_2 = \frac{a_3}{a_4}$; ...; $a_{98} = \frac{a_{99}}{a_{100}}$.

Перемножив первые два равенства, получим: $a_1 a_2 = \frac{a_2 a_3}{a_3 a_4}$, то есть $a_1 = \frac{1}{a_4}$. Аналогично, из равенств $a_4 = \frac{a_5}{a_6}$ и $a_5 = \frac{a_6}{a_7}$, получим, что $a_4 = \frac{1}{a_7}$. Таким образом, $a_1 = a_7$.

Точно таким же образом, из равенств $a_k = \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}$ и $a_{k+1} = \frac{a_{k+2}}{a_{k+3}}$ можно получить, что для любых значений *k* выполняются равенства $a_k = \frac{1}{a_{k+3}}$ и $a_k = a_{k+6}$.

Следовательно, $a_1 = a_7 = \ldots = a_{97} = 7$, тогда $a_{100} = \frac{1}{a_{97}} = \frac{1}{7}$.

3.2. В треугольнике *ABC* медиана, проведённая из вершины *A* к стороне *BC*, в четыре раза меньше стороны *AB* и образует с ней угол 60°. Найдите угол *BAC*.

Ответ: 150°.

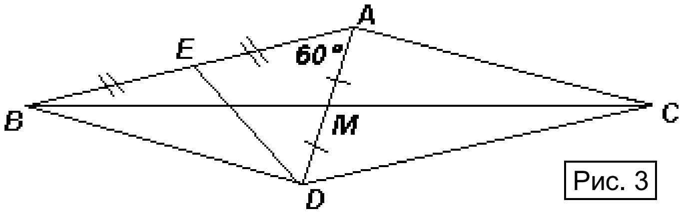


Рис. 3

Продлим медиану *AM* на ее длину: *DM* = *AM*, тогда *ABDC* – параллелограмм (см. рис. 3). В треугольнике *ABD* проведем медиану *DE*, тогда *AE* = $\frac{1}{2}$*AB* = *AD*. Таким образом, треугольник *ADÅ* – равнобедренный с углом 60°, то есть *ADÅ* – равносторонний.

Следовательно, в треугольнике *ABD* медиана *DE* равна половине стороны *AB*, к которой она проведена, значит, треугольник *ABD* – прямоугольный ($\angle ADB = 90°$). Тогда $\angle CAD = \angle ADB = 90°$, $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 150°$.

Доказать, что треугольник ABD – прямоугольный, можно иначе. Проведем перпендикуляр BD' к прямой AD и получим прямоугольный треугольник ABD', в котором $\angle ABD' = 30°$*, тогда* $AD' = \frac{1}{2}AB = AD$*. Значит, точки D и D' совпадают.*

3.3. На турнир приехали школьники из разных городов. Один из организаторов заметил, что из них можно сделать 19 команд по 6 человек, и при этом еще менее четверти команд будут иметь по запасному игроку. Другой предложил сделать 22 команды по 5 или по 6 человек в каждой, и тогда более трети команд будут состоять из шести игроков. Сколько школьников приехало на турнир?

Ответ: 118.

Согласно первому условию, количество приехавших школьников равно $19\cdot6 + x$, где x – целое неотрицательное число и $x \le 4$. Тогда $19\cdot6 + x = 114 + x \le 118$.

Из второго условия задачи следует, что искомое количество школьников равно $n\cdot6 + (22 - n)\cdot5$, где n – количество команд, состоящих из шести человек. По условию, $n \ge 8$, тогда $n\cdot6 + (22 - n)\cdot5 = n + 110 \ge 118$.

Таким образом, на турнир приехало ровно 118 школьников.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Решите уравнение: $x^{2012} + \frac{1}{x^{2012}} = 1 + x^{2013}$.

Ответ: 1.

Воспользуемся тем фактом, что при $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \ge 2.$ (*Это неравенство выполняется, так как оно равносильно верному неравенству* $\frac{(a-1)^2}{a} \ge 0$.)

Использовать этот факт можно по-разному.

Первый способ. Заметим, что $x = 1$ является корнем данного уравнения и докажем, что других корней нет. Действительно:

1) Если $x < 1$, то $x^{2012} + \frac{1}{x^{2012}} \ge 2 > 1 + x^{2013}$, то есть в этом случае корней нет.

2) Если $x > 1$, то $x^{2012} > 1$, значит, $\frac{1}{x^{2012}} < 1$. Кроме того, $x^{2012} < x^{2013}$, так как $x^{2012}(x-1) > 0$ при $x > 1$. Таким образом, $x^{2012} + \frac{1}{x^{2012}} < 1 + x^{2013}$, то есть и в этом случае корней нет.

Второй способ. Так как $x^{2012} + \frac{1}{x^{2012}} \ge 2$, то и $1 + x^{2013} \ge 2$, то есть корни уравнения не могут быть меньше 1.

Освободившись от знаменателя и перенеся все слагаемые в одну часть, при $x \ne 0$ получим: $x^{4025} - x^{4024} + x^{2012} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^{4024}(x-1) + (x-1)(x^{2011} + x^{2010} + \ldots + x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^{4024} + x^{2011} + x^{2010} + \ldots + x + 1) = 0$.

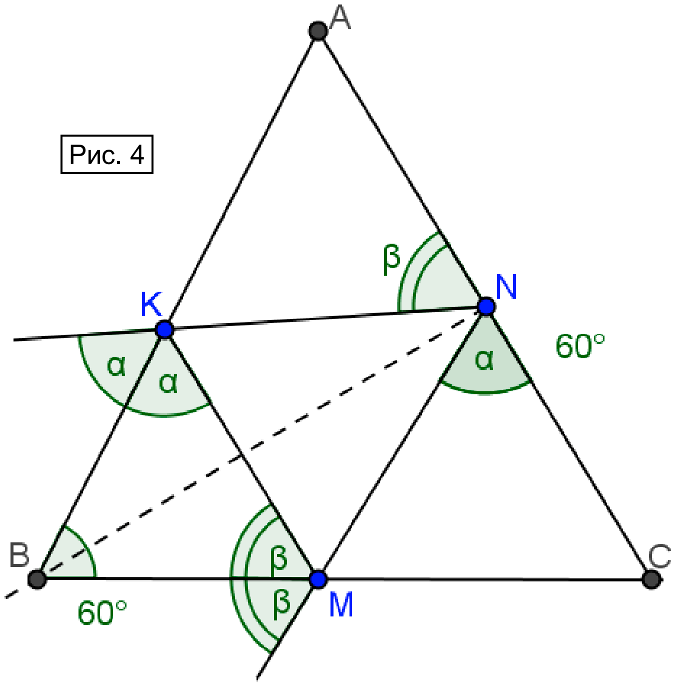
Так как при $x \ge 1$ вторая скобка принимает положительные значения, то $x = 1$ – единственное решение уравнения.

4.2. На сторонах *AB*, *BC* и *AC* равностороннего треугольника *ABC* выбраны точки *K*, *M* и *N* соответственно так, что угол *MKB* равен углу *MNC*, а угол *KMB* равен углу *KNA*. Докажите, что *NB* – биссектриса угла *MNK*.

Пусть $\angle MKB = \angle MNC = \alpha$, $\angle KMB = \angle KNA = \beta$ (см. рис. 4). Так как каждый угол треугольника ABC равен $60°$, то из треугольника KMB получим, что $\alpha + \beta = 120°$, тогда из треугольников NKA и NMC получим, что $\angle NKA = \alpha$, $\angle NMC = \beta$.

Рассмотрим углы, вертикальные углам NKA и NMC, которые равны α и β соответственно. Заметим, что лучи KB и MB являются биссектрисами внешних углов треугольника KNM. Так как биссектрисы двух внешних углов треугольника и биссектриса внутреннего угла при третьей вершине пересекаются в одной точке (*центре вневписанной окружности*), то NB – биссектриса угла MNK.

Рис. 4



4.3. Петя расставляет в вершинах куба числа 1 и –1. Андрей вычисляет произведение четырех чисел, стоящих в вершинах каждой грани куба, и записывает его в центре этой грани. Петя утверждает, что он сможет так расставить числа, что их сумма и сумма чисел, записанных Андреем, будут противоположными. Прав ли Петя?

Ответ: нет, не прав.

Первый способ. Заметим, что Петя расставляет 8 чисел, а Андрей записывает еще 6. Найдем произведение этих четырнадцати чисел. Каждая вершина куба содержится в трех гранях, поэтому каждое число, поставленное Петей, войдет в три произведения, которые запишет Андрей. Следовательно, в произведение всех чисел в вершинах и на гранях каждое число, записанное Петей, будет входить в четвертой степени, значит, это произведение будет равно 1.

Для того, чтобы суммы чисел, расставленных Петей и записанных Андреем, были противоположны, необходимо, чтобы семь записанных чисел были равны по 1, а еще семь были равны по –1. Но в этом случае произведение всех записанных чисел будет равно –1. Полученное противоречие показывает, что Петя не прав.

Второй способ. Для того, чтобы Петя оказался прав, необходимо, чтобы сумма всех четырнадцати чисел в вершинах и в центрах граней была равна нулю. Покажем, что это невозможно.

Действительно, пусть в каждой вершине куба уже стоит число 1, тогда и в центре каждой грани стоит 1, то есть сумма всех чисел равна 14. Заметим, что изменив знак одного числа в вершине мы, тем самым, изменяем знак чисел, стоящих в центрах трех граней. Сумма всех чисел при этом изменяется на 8. Каждое дальнейшее изменение знака одного из чисел в вершине приводит либо сохранению этой суммы, либо к ее изменению на 4 или на 8. Таким образом, при любых изменениях знаков чисел в вершинах сумма всех чисел может измениться только на число, кратное четырем. Так как 14 не делится на 4, то нулем эта сумма стать не может.