9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Решите уравнение: $\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^2+\sqrt{x^2}}{2x^2}=2012$.

<u>Ответ</u>: $-\frac{1}{2012}$

Выражение, стоящее в левой части данного уравнения, имеет смысл только при $x<0$. После упрощения уравнение примет вид: $\frac{-x+|x|}{2x^2}=2012$. Так как при $x<0$ $|x|=-x$, то $x=-\frac{1}{2012}$.

1.2. Существует ли трапеция, в которой каждая диагональ разбивает ее на два равнобедренных треугольника?

<u>Ответ</u>: да, существует.

Например, равнобокая трапеция, у которой меньшее основание равно боковой стороне, а большее основание равно диагонали (см. рис. 1).

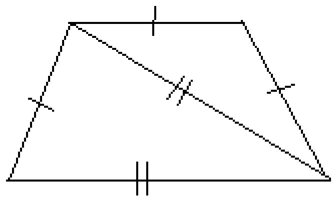


Рис. 1

Несложно доказать, что искомая трапеция определяется однозначно с точностью до подобия: ее углы равны 72° и 108°.

1.3. Может ли произведение трех трехзначных чисел, для записи которых использовано девять различных цифр, оканчиваться четырьмя нулями?

<u>Ответ</u>: да, может.

Например, $125\cdot360\cdot748=33660000$.

*Приведенный пример – не единственный, но в любом примере один из множителей должен делится на 125. Отметим, что такое произведение может оканчиваться даже **пятью нулями**: $625\cdot480\cdot137=41100000$.*

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Три фирмы *A*, *B* и *C* решили совместно построить дорогу длиной 16 км, договорившись финансировать этот проект поровну. В итоге, *A* построила 6 км дороги, *B* построила 10 км, а *C* внесла свою долю деньгами – 16 миллионов рублей. Каким образом фирмы *A* и *B* должны разделить эти деньги между собой?

<u>Ответ</u>: фирме *A* – 2 миллиона, а фирме *B* – 14 миллионов рублей.

Каждая фирма должна была построить $\frac{16}{3}$ км дороги. Вместо фирмы *C* фирма *A* построила $6-\frac{16}{3}=\frac{2}{3}$ км дороги, а фирма *B* построила $10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}$ км. Поэтому 16 миллионов рублей надо разделить между ними в отношении 2 : 14.

2.2. Две окружности пересекаются в точках *P* и *Q*. Прямая, пересекающая отрезок *PQ*, последовательно пересекает эти окружности в точках *A*, *B*, *C* и *D*. Докажите, что $\angle APB=\angle CQD$.

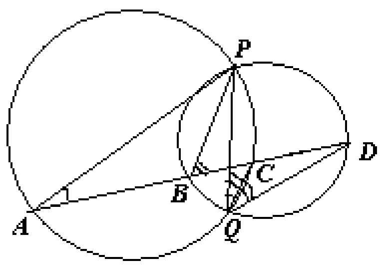


Рис. 2

Проведем отрезок *PQ* и отметим две пары равных вписанных углов: $\angle PBD=\angle PQD$ и $\angle PAB=\angle PQC$ (см. рис. 2). Тогда, используя для треугольника *PAB* теорему о внешнем угле, получим: $\angle APB=\angle PBD-\angle PAB=\angle PQD-\angle PQC=\angle CQD$

2.3. В круговом шахматном турнире участвует 9 мальчиков и 3 девочки (каждый играет с каждым один раз, победа – 1 очко; ничья – 0,5; поражение – 0). Может ли в итоге оказаться, что сумма очков, набранных всеми мальчиками, будет равна сумме очков, набранных всеми девочками?

<u>Ответ</u>: нет, не может.

Сумма всех набранных очков равна общему количеству сыгранных партий: $\frac{12\cdot 11}{2}$ = 66. Предположим, что суммы очков, набранных мальчиками и девочками, равны, тогда девочки должны в сумме набрать 33 очка. Один участник не может набрать больше, чем 11 очков, значит, каждая из девочек набрала ровно 11. Но во встречах между собой кто-то из девочек обязательно «потерял» очки, то есть не смог набрать максимум очков.

Ту же идею можно реализовать иначе. Если даже каждая девочка выиграет у каждого из мальчиков, то в сумме девочки наберут 27 очков. Еще 3 партии они проводят между собой и в любом случае наберут в сумме 3 очка. Таким образом, более, чем 30 очков в сумме девочки набрать не могут, а это меньше половины всех очков, разыгрываемых в турнире.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $ab + bc + ca \geq 12$, то $a + b + c \geq 6$.

Воспользуемся тем, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Тогда $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca) \geq 36$. Учитывая, что $a + b + c > 0$, получим: $a + b + c \geq 6$, что и требовалось.

Можно также действовать методом «от противного». Предположим, что найдутся такие положительные a, b и c, что $a + b + c < 6$. Тогда, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) < 36$. Так как $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, то $3(ab + bc + ca) < 36$, то есть $ab + bc + ca < 6$ – противоречие.

3.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD. Докажите, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне AB.

Пусть K – точка на стороне CD, в которой пересекаются биссектрисы углов CAD и CBD (см. рис. 3). Тогда, по свойству биссектрисы треугольника, выполняются равенства: $\frac{CK}{DK} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$. Следовательно, $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$.

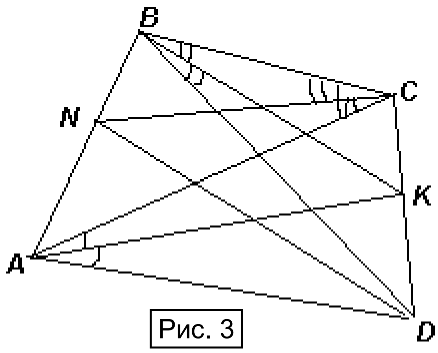


Рис. 3

Пусть биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке N, тогда $\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$. Используя теперь утверждение, обратное свойству биссектрисы, получим, что DN – биссектриса угла ADB.

3.3. Может ли число $(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y + 1)^2$ при каких-то целых x и y оказаться точным квадратом?

<u>Ответ</u>: нет, не может.

Так как $x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$, то при любых целых x и y значение каждого из выражений в скобках – нечетное число. Квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1, поскольку $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$. Таким образом, значение данного выражения является четным числом и при делении на 4 дает остаток 2.

Пусть оно является точным квадратом, тогда это квадрат четного числа. Но квадрат любого четного числа делится на 4 – противоречие.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Известно, что модули корней каждого из двух квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ меньше десяти. Может ли трехчлен $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2}$ иметь корни, модули которых не меньше десяти?

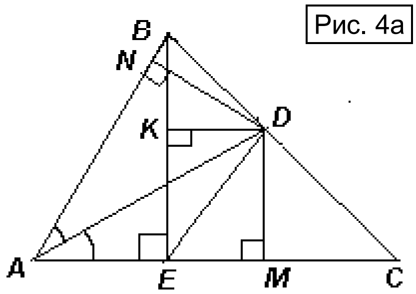
Ответ: нет, не может.

Заметим, что графики всех трех трехчленов являются параболами, у которых «ветви» направлены вверх. Тогда, из условия задачи следует, что при $|x| \geq 10$ каждый из двух данных трехчленов принимает положительные значения. Следовательно, для таких значений x: $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = \frac{1}{2}((x^2 + ax + b) + (x^2 + cx + d)) > 0$.

Следовательно, график этого трехчлена либо целиком лежит выше оси x, либо пересекает эту ось в одной или двух точках, лежащих между –10 и 10. В первом случае, этот трехчлен не имеет корней, а во втором – модули его корней меньше десяти.

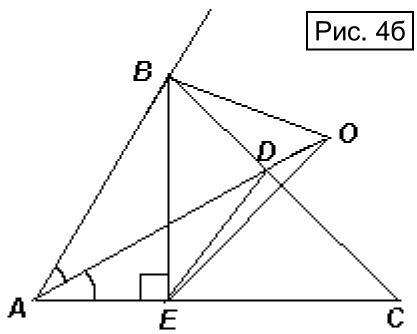
4.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и высота BE. Докажите, что $\angle CED > 45°$.

Рис. 4а



Первый способ. Из точки D опустим перпендикуляры DM и DN на прямые AC и AB соответственно (см. рис. 4а). Так как AD – биссектриса, то $DM = DN$, кроме того оба перпендикуляра лежат внутри треугольника ABC, поскольку он остроугольный. Проведем также перпендикуляр DK к высоте BE, тогда $DMEK$ – прямоугольник. Так как $DM = DN > DK$, то $\angle CED > 45°$, что и требовалось.

Рис. 4б



Второй способ. Проведем биссектрису прямого угла BEC (см. рис. 4б). Пусть она пересечет луч AD в точке O. Так как $\angle CEO = 45°$, то для доказательства требуемого неравенства достаточно показать, что $\angle CED > \angle CEO$, то есть, что точка O лежит вне треугольника ABC.

Заметим, что O – центр вневписанной окружности треугольника ABE, так как является пересечением его внутренней и внешней биссектрис. Значит, BO – также биссектриса внешнего угла этого треугольника.

Тогда $\angle ABO = \angle ABE + \angle OBE = 90° - \angle A + \frac{1}{2}(90° + \angle A) = 135° - \frac{1}{2}\angle A > 90° > \angle B$, так как углы A и B треугольника ABC – острые. Следовательно, точка O действительно лежит вне треугольника ABC.

Также можно, обозначив точку пересечения EO и BC через F и используя свойство биссектрисы треугольника и тригонометрические функции, доказать, что $\frac{BD}{DC} < \frac{BF}{FC}$, *откуда и будет следовать утверждение задачи.*

4.3. На тарелке лежат 9 разных кусков сыра. Всегда ли можно разрезать не более одного из кусков на две части так, чтобы получившиеся 10 кусков сыра можно было разложить на две порции равной массы по 5 кусков в каждой?

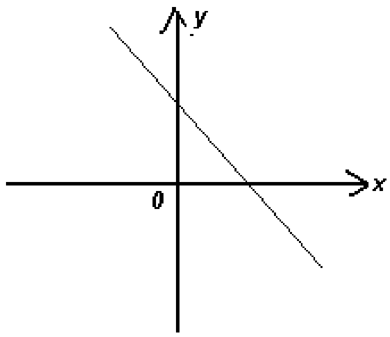
Ответ: всегда.

Упорядочим данные куски сыра по возрастанию массы: $m_1 < m_2 < ... < m_8 < m_9$. Тогда, $S_1 = m_1 + m_3 + m_5 + m_7 < m_2 + m_4 + m_6 + m_8 = S_2$, а $S_1 + m_9 > S_2$ (так как $m_9 > m_8$, $m_7 > m_6$, $m_5 > m_4$, $m_3 > m_2$). Следовательно, можно разрезать самый тяжелый кусок на две части с массами k и n так, чтобы $S_1 + k = S_2 + n$. Тем самым условие задачи будет выполнено.

Отметим, что возможность разрезать кусок сыра в любом заданном отношении масс следует, строго говоря, из соображений непрерывности. Несложно также указать конкретные значения n и k: $n = \frac{S_1 + m_9 - S_2}{2}$; $k = S_2 - S_1 + n = \frac{S_2 + m_9 - S_1}{2}$.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. На координатной плоскости задан график функции $y = kx + b$ (см. рисунок). В той же координатной плоскости схематически постройте график функции $y = kx^2 + bx$. Решение поясните.



Ответ: см. рис. 5.

Запишем формулу квадратичной функции в виде: $y = x(kx + b)$. Ее графиком является парабола.

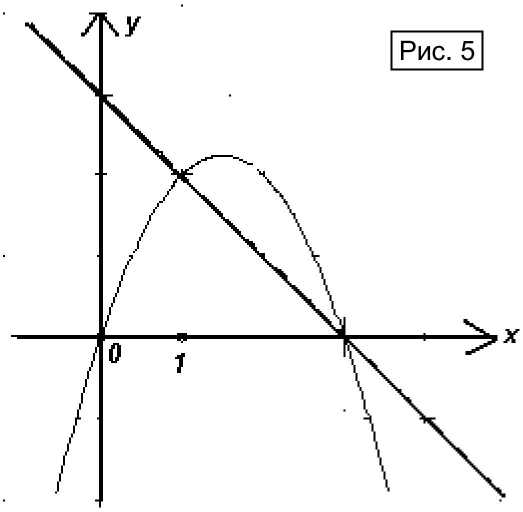
1) Заметим, что один из нулей квадратичной функции совпадает с нулем функции $y = kx + b$, а другой: $x = 0$.

2) График расположен «ветвями» вниз, так как $k < 0$.

Таким образом, искомая парабола проходит через начало координат и точку пересечения прямой $y = kx + b$ с осью абсцисс; она расположена «ветвями» вниз симметрично относительно серединного перпендикуляра к отрезку, концы которого – нули этой функции.

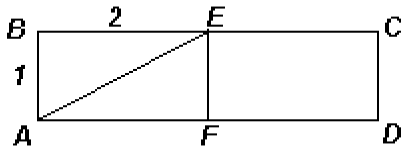
Отметим, что одним из корней уравнения $x(kx + b) = kx + b$ является $x = 1$, поэтому можно указать абсциссу второй точки пересечения данного и искомого графиков.

Рис. 5



5.2. Длина прямоугольного участка равна 4 метра, а ширина – 1 метр. Можно ли посадить на нем три дерева так, чтобы расстояние между любыми двумя деревьями было не меньше, чем 2,5 метра?

Рис. 6



Ответ: нет, нельзя.

Пусть это не так, тогда разобьем данный участок *ABCD* на два прямоугольника размером 2×1 (см. рис. 6). По принципу Дирихле, хотя бы в одном из прямоугольников *ABEF* или *DCEF* должны тогда расти, по крайней мере, два дерева. Две наиболее удаленные точки прямоугольника это концы его диагонали. Но ее длина: $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{5} < 2,5$, то есть расстояние между двумя деревьями будет меньше, чем 2,5 метра, что противоречит условию.

5.3. На поляне пасутся 150 коз. Поляна разделена изгородями на несколько участков. Ровно в полдень некоторые козы перепрыгнули на другие участки. Пастух подсчитал, что на каждом участке количество коз изменилось, причем ровно в семь раз. Не ошибся ли он?

Ответ: пастух ошибся.

Пусть x – количество коз на тех участках, где их число увеличилось в 7 раз, а y – количество коз на тех участках, где их число уменьшилось в 7 раз. Тогда имеет место система уравнений: $\begin{cases} x + y = 150 \\ 7x + \frac{y}{7} = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 150 \\ 49x + y = 1050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 150 \\ 48x = 900 \end{cases}$. Полученная система не имеет натуральных решений (так как второе уравнение не имеет натуральных решений).

Полученное противоречие показывает, что пастух ошибся.