11 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Для каких значений *x* выполняется неравенство: $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}\geq 2\sqrt{2}$?

<u>Ответ</u>: для всех действительных значений *x*.

<u>Первый способ</u>. Оба слагаемых в левой части положительны. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}\geq 2\sqrt{2^{\sin^2 x}\cdot 2^{\cos^2 x}}=2\sqrt{2^{\sin^2 x+\cos^2 x}}=2\sqrt{2}$.

<u>Второй способ</u>. Пусть $2^{\sin^2 x}=a$ > 0, $2^{\cos^2 x}=b$ > 0, тогда ab = $2^{\sin^2 x}\cdot 2^{\cos^2 x}$ = 2. Докажем, что $a+b\geq 2\sqrt{2}$. Предположим противное: $a + b < 2\sqrt{2}$, тогда $a^2 + b^2 + 2ab < 8$. Так как $a^2 + b^2 + 2ab > 4ab$, то $4ab < 8$, то есть $ab < 2$. Противоречие.

1.2. Окружность пересекает оси координат в точках $A(a;\ 0)$; $B(b;\ 0)$; $C(0;\ c)$ и $D(0;\ d)$. Найдите координаты ее центра.

<u>Ответ</u>: $\left(\frac{a+b}{2};\frac{c+d}{2}\right)$

Центр $O(x;\ y)$ данной окружности является пересечением серединных перпендикуляров к хордам *AB* и *CD.* Уравнения этих перпендикуляров: $x=\frac{a+b}{2}$ и $y=\frac{c+d}{2}$ соответственно.

Отметим, что условие задачи избыточно, так как $OA\cdot OB = OC\cdot OD$ (степень точки O относительно данной окружности).

1.3. При каких натуральных *n* число $n^2 - 1$ является степенью простого числа?

<u>Ответ</u>: при $n = 2$ или $n = 3$.

<u>Решение</u>. Заметим, что $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$, а НОД$(n + 1;\ n - 1) = d \leq 2$. Если $d = 2$, то $n^2 - 1$ является степенью двойки, а если $d = 1$, то $n^2 - 1$ – это первая степень простого числа.

В первом случае $n + 1 = 2^k$ и $n - 1 = 2^m$, причем значения этих степеней различаются на 2. Значит, $k = 2$, $m = 1$, тогда $n = 3$.

Во втором случае $n - 1 = 1$, то есть $n = 2$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Существует ли такое значение α, что все члены бесконечной последовательности $\cos\alpha$; $\cos2\alpha$; ...; $\cos(2^n\alpha)$; ... принимают отрицательные значения?

<u>Ответ</u>: да, существует.

Пусть, например, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, тогда $\cos\alpha = \cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. По индукции. База уже есть, шаг: пусть $\cos(2^k\alpha) = -\frac{1}{2}$ (k – натуральное или 0), тогда $\cos(2^{k+1}\alpha) = \cos(2\cdot2^k\alpha) = 2\cos^2(2^k\alpha) - 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$.

<u>Второй способ</u>. Заметим, что $\cos2\alpha = \cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. Докажем, что если n – четное число, то $2^n\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, а если n – нечетное, то $2^n\alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, где m – некоторое целое число.

Действительно, $2^{2k}\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m \Leftrightarrow 4^k - 1 = 3m$. Так как $4^k - 1$ делится на 3, то для каждого натурального значения k найдется такое натуральное значение m, что это равенство будет верным. Аналогично, $2^{2k-1}\cdot\frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m \Leftrightarrow 2^{2k-1} + 1 = 3m$, а $2^{2k-1} + 1$ делится на 3 при любом натуральном значении k.

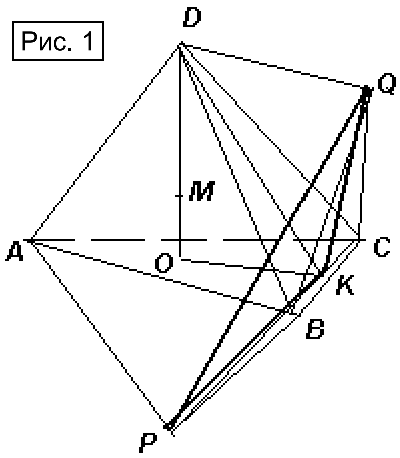
Таким образом, при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ все члены данной последовательности принимают одно и то же отрицательное значение.

Можно доказать, что условию задачи удовлетворяют только числа вида $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$*, где m – целое число*.

2.2. На каждой грани правильного тетраэдра с ребром 1 во внешнюю сторону построены правильные тетраэдры. Четыре их вершины, не принадлежащие исходному тетраэдру, образовали новый тетраэдр. Найдите его ребра.

Ответ: каждое ребро равно $\frac{5}{3}$.

Рис. 1



Пусть $DABC$ – данный тетраэдр, O – ортогональная проекция вершины D на плоскость ABC, тогда O – центр треугольника ABC (см. рис. 1).

Первый способ. Рассмотрим $PABC$ и $QBCD$ – два тетраэдра, построенные на гранях исходного тетраэдра Тогда PQ – ребро нового тетраэдра.

Рассмотрим треугольник PKQ, где K – середина ребра BC. Так как PK и QK – апофемы равных правильных тетраэдров, то $PK = QK = \frac{\sqrt{3}}{2}$. DKO – угол между гранями правильного тетраэдра, поэтому $\cos\angle DKO = \frac{OK}{DK} = \frac{1}{3}$. Тогда. $\angle PKQ = 3\angle DKO = 3\arccos\frac{1}{3} = \arccos(-\frac{23}{27})$ (если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, то $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = -\frac{23}{27}$). Из треугольника PKQ по теореме косинусов: $PQ^2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(1-\cos\angle PKQ\right)$. Следовательно, $PQ = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{50}{27}} = \frac{5}{3}$.

Остальные ребра искомого тетраэдра вычисляются точно так же, поэтому имеют ту же длину.

Второй способ. Пусть M – точка пересечения медиан (*центроид*) исходного тетраэдра $DABC$, тогда M лежит на медиане DO тетраэдра и $DM : MO = 3 : 1$. Тетраэдр $PABC$ симметричен исходному относительно плоскости ABC, поэтому O – середина отрезка DP. Следовательно, точка M лежит на отрезке DP и $DM : MP = 3 : 5$.

Проведя аналогичные рассуждения для других построенных тетраэдров, получим, что вершины нового тетраэдра являются образами вершин исходного при гомотетии с центром M и коэффициентом $k = \frac{5}{3}$. Значит, новый тетраэдр – правильный, а длина его ребра равна $\frac{5}{3}$.

2.3. Может ли объединение двух треугольников оказаться 13-угольником?

Ответ: нет, не может.

Решение. Пусть объединением двух треугольников является некоторый n-угольник. Докажем, что $n \le 12$.

Действительно, вершинами n-угольника могут являться либо вершины исходных треугольников, либо точки попарного пересечения их сторон. Вершин у двух треугольников – 6. Каждая сторона одного треугольника не может пересечь более двух сторон другого, поэтому таких точек не более, чем $3\cdot 2 = 6$. Значит, всего вершин не более, чем 12.

Отметим, что объединяя два треугольника, легко получить двенадцатиугольник. Именно так получается шестиконечная звезда.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Сумма восьми чисел равна $\frac{4}{3}$. Оказалось, что сумма любых семи чисел из этих восьми – положительна. Какое наименьшее целое значение может принимать наименьшее из данных чисел?

Ответ: –7.

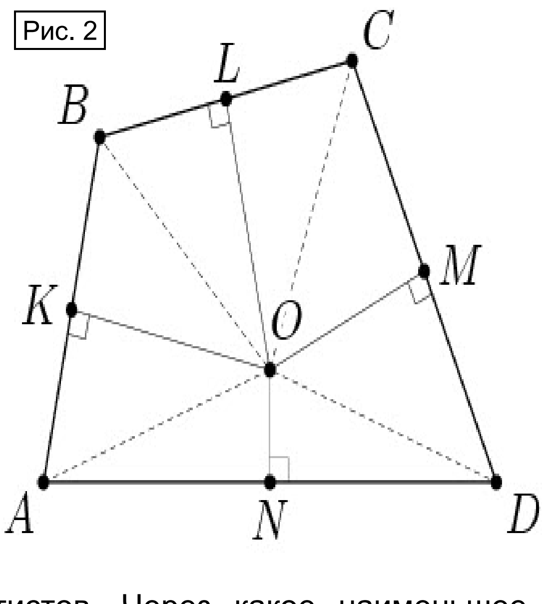
По условию: $a_1 + a_2 + ... + a_8 = \frac{4}{3}$. Пусть $a_1 \le a_2 \le ... \le a_8$. Тогда $a_8 > 0$, кроме того, $a_1 + a_2 + ... + a_7 > 0$, поэтому $a_8 < \frac{4}{3}$. Следовательно, $a_2 + a_3 + ... + a_7 \le 6a_8 < 6\cdot\frac{4}{3} = 8$. Значит, $a_1 > -8$.

Приведем пример, показывающий, что $a_1 = -7$ удовлетворяет условию задачи. Пусть $a_2 = a_3 = ... = a_8 = \frac{25}{21}$. Тогда $-7 + 7\cdot\frac{25}{21} = 7\cdot\frac{4}{21} = \frac{4}{3}$. При этом, $-7 + 6\cdot\frac{25}{21} = \frac{50}{7} - 7 > 0$, то есть сумма любых семи чисел положительна.

3.2. Дан четырехугольник *ABCD* площади 1. Из его внутренней точки *O* опущены перпендикуляры *OK*, *OL*, *OM* и *ON* на стороны *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно. Известно, что $AK \ge KB$, $BL \ge LC$, $CM \ge MD$ и $DN \ge NA$. Найдите площадь четырехугольника *KLMN*.

Ответ: 0,5.

Рис. 2



Из двух наклонных, проведенных из одной точки больше та, у которой проекция больше. Поэтому из неравенств, заданных в условии задачи, следует, что $OA \ge OB \ge OC \ge OD \ge OA$. Значит, $OA = OB = OC = OD$, то есть *O* – центр окружности, описанной около четырехугольника *ABCD* (см. рис. 2). Тогда точки *K*, *L*, *M* и *N* являются серединами сторон *ABCD.*

По теореме Вариньона (*середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырехугольника*) получим, что $S_{KLMN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}$.

3.3. В однокруговом турнире участвуют 10 шахматистов. Через какое наименьшее количество туров может оказаться так, что единоличный победитель уже выявился досрочно? (*В каждом туре участники разбиваются на пары. Выигрыш – 1 очко; ничья – 0,5 очка; поражение – 0*).

Ответ: через 7 туров.

Первый способ. Заметим, что после шестого тура разыграно 30 очков и у лидера – не более, чем 6 очков, тогда остальные девять участников в сумме набрали не менее, чем 24 очка. Следовательно, найдется хотя бы один шахматист, у которого более трех очков (*по принципу Дирихле*). Так как впереди еще 3 тура, то победитель пока неизвестен.

После 7 туров вполне могла сложиться ситуация, когда у лидера – 7 очков, а у каждого из остальных участников – меньше, чем 5 очков. Например, это возможно, если лидер свои партии выиграл, а все остальные партии закончились вничью. Тогда, у двух шахматистов, еще не игравших с лидером, – по 3,5 очка, а у других –по 3 очка. Так как до конца турнира осталось 2 тура, то в этом случае победитель уже определен.

Второй способ. Пусть после тура с номером m у лидера – n очков ($n \le m$), а у следующего за ним (возможно, не единственного) – k очков. К этому моменту разыграно $5m$ очков, значит все, кроме лидера, набрали в сумме $5m - n$ очков, поэтому $k \ge \frac{5m-n}{9} \ge \frac{4m}{9}$. Тогда $2k \ge m - \frac{m}{9}$, но числа m и $2k$ – целые, а $0 < \frac{m}{9} < 1$, поэтому $2k \ge m \Leftrightarrow k \ge \frac{m}{2}$.

Для того, чтобы лидер стал досрочным победителем, должно выполняться неравенство: $(9 - m) + k < n \le m$, то есть $k < 2m - 9$. Таким образом, $\frac{m}{2} < 2m - 9 \Leftrightarrow m > 6$.

Построение примера описано выше.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Числа x, y, z и t лежат в интервале (0, 1). Докажите неравенство:
$\sqrt{x^2+(1-t)^2} + \sqrt{y^2+(1-x)^2} + \sqrt{z^2+(1-y)^2} + \sqrt{t^2+(1-z)^2} < 4$.

Первый способ. Воспользуемся тем, что при $a > 0$, $b > 0$ выполняется неравенство $\sqrt{a^2+b^2} < a+b$ (*следует из неравенства* $a^2 + b^2 < (a + b)^2$). Тогда: $\sqrt{x^2+(1-t)^2} < x+1-t$; $\sqrt{y^2+(1-x)^2} < y+1-x$; $\sqrt{z^2+(1-y)^2} < z+1-y$; $\sqrt{t^2+(1-z)^2} < t+1-z$.

Сложим эти неравенства почленно и получим требуемое неравенство

Второй способ. Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной 1. На его сторонах AB, BC, CD и DA отложим отрезки $AK = x$, $BL = y$, $CM = z$ и $DN = t$ соответственно (см. рис. 3).

Тогда требуемое неравенство примет вид $NK + KL + LM + MN < 4$. По неравенству треугольника: $NK < AK + AN$; $KL < BK + BL$; $LM < CL + CM$ и $MN < DM + DN$. Сложив эти неравенства почленно, получим, что $NK + KL + LM + MN < AB + BC + CD + DA = 4$.

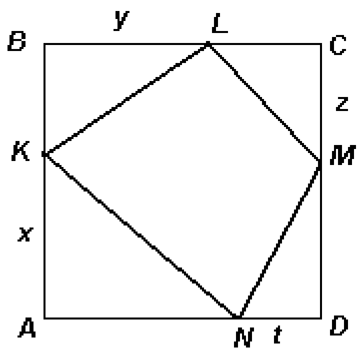


Рис. 3

4.2. Известно, что в неравностороннем треугольнике ABC точка, симметричная точке пересечения медиан относительно стороны BC, принадлежит описанной окружности. Докажите, что $\angle BAC < 60°$.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, M – точка пересечения медиан треугольника ABC, а точка M' симметрична ей относительно BC (см. рис. 4). Тогда $\angle BMC = \angle BM'C = 180° - \alpha$.

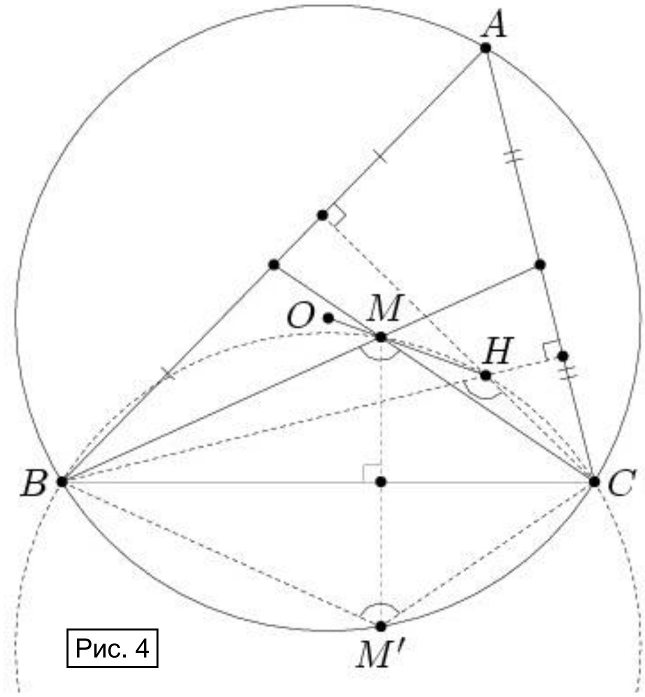


Рис. 4

Так как точка M лежит внутри треугольника ABC, то $180° - \alpha > \alpha$, то есть $\alpha < 90°$. Следовательно, центр O окружности, описанной около треугольника ABC, лежит в одной полуплоскости с вершиной A (относительно BC), поэтому $\angle BOC = 2\alpha$.

Докажем, что O лежит вне окружности, описанной около треугольника BMC. Действительно, если H – ортоцентр треугольника, то $\angle BHC = 90° + \angle HBA = 180° - \alpha = \angle BMC$, значит, точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BMC. Кроме того, точка M лежит на отрезке OH (теорема о прямой Эйлера). Следовательно, точка O лежит вне окружности, описанной около треугольника BMC.

Тогда $\angle BOC < \angle BMC$, то есть $2\alpha < 180° - \alpha \Leftrightarrow \alpha < 60°$.

В заключительной фазе решения использовано, что точки O, M и H попарно различны, так как треугольник ABC – не равносторонний.

4.3. Среди n рыцарей каждые двое – либо друзья, либо враги. У каждого из рыцарей ровно три врага, причём враги его друзей являются его врагами. При каких n такое возможно?

Ответ: при $n = 4$ или $n = 6$.

Из условия задачи следует, что рыцарей – не менее четырех. Заметим, что у рыцаря не может быть более двух друзей, иначе найдутся 4 рыцаря, у которых есть общий враг, но тогда у этого врага, в свою очередь, будет не менее четырех врагов, что противоречит условию. Значит, у каждого рыцаря не более двух друзей и ровно три врага, следовательно, всего рыцарей – не более шести.

Докажем, что не могло быть пяти рыцарей. Пусть рыцарей – 5: A, B, C, D и E. Тогда есть 2 рыцаря которые дружат между собой. Пусть A и B дружат, тогда C, D и E – их враги. Заметим, что C, D и E не могут попарно враждовать или попарно дружить, так как тогда у каждого из них либо по 4 врага, либо по 2. Если же дружат только двое, например, C и D, то у E – 4 врага, а если C дружит и с D, и с E, то у него 2 врага. Оба случая невозможны, значит, рыцарей не может быть ровно 5.

Примеры: если рыцарей – 4, то друзей ни кого из них нет и каждый враг каждому, а если рыцарей – 6, то разбиваем рыцарей на две тройки и каждый рыцарь дружит с рыцарями из своей тройки и враждует с рыцарями из другой.

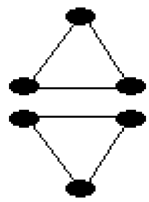


Рис. 5

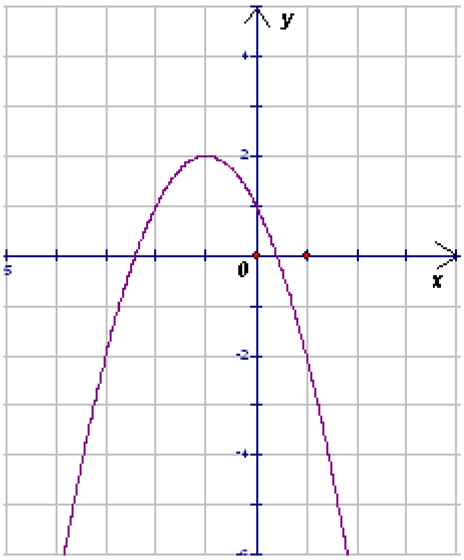
Второй способ. Заметим, что из условия задачи следует, что отношение «быть другом» – транзитивно. Действительно, пусть A дружит с B, а B дружит с C, тогда A и C не могут быть врагами, так как в этом случае они должны быть врагами и для B. Значит, A и C – друзья.

Рассмотрим сначала граф, у которого n вершин, обозначающих рыцарей, а ребра соединяют пары врагов. Так как у каждого рыцаря ровно три врага, то $n \geq 4$. Кроме того, в любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству ребер (*лемма о рукопожатиях*). В данном случае эта сумма равна $3n$, поэтому n – четное число.

Рассмотрим теперь дополнительный граф с n вершинами (ребра теперь обозначают дружбу. Тогда случай $n = 4$ реализуется в виде графа без ребер.

Пусть теперь $n > 4$. Из любой вершины графа выходит $n - 4$ ребра, а так как отношение дружбы транзитивно, то в графе есть полный подграф из $n - 3$ вершин. Для остальных вершин графа все вершины этого подграфа являются «врагами», поэтому $n - 3 \leq 3$, то есть $n \leq 6$. Таким образом, возможен только случай $n = 6$ (см. рис. 5).

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).



5.1. На координатной плоскости изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$ (см. рисунок). На этой же координатной плоскости схематически изобразите график функции $y = cx^2 + 2bx + a$. Ответ поясните.

<u>Ответ</u>: см. рис. 6.

Вычислим значения a, b è c.

<u>Первый способ</u>. Выберем три удобные точки данного графика, например, (0; 1); (1; –2) и (–1; 2). Учитывая, что $y(0) = c$; $y(1) = a + b + c$; $y(-1) = a - b + c$, получим систему

уравнений: $\begin{cases} c = 1, \\ a + b + c = -2, \\ a - b + c = 2. \end{cases}$ Ее решением является: $a = -1$; $b = -2$; $c = 1$.

<u>Второй способ</u>. Заметим, что данный график получается параллельным переносом графика функции $y = -x^2$, поэтому $a = -1$. Значение $b = -2$ вычисляется из равенства $-\frac{b}{2a} = -1$ (*абсцисса вершины параболы*), а $c = y(0) = 1$.

Следовательно, искомый график задается уравнением $y = x^2 - 4x - 1 \Leftrightarrow y = (x - 2)^2 - 5$.

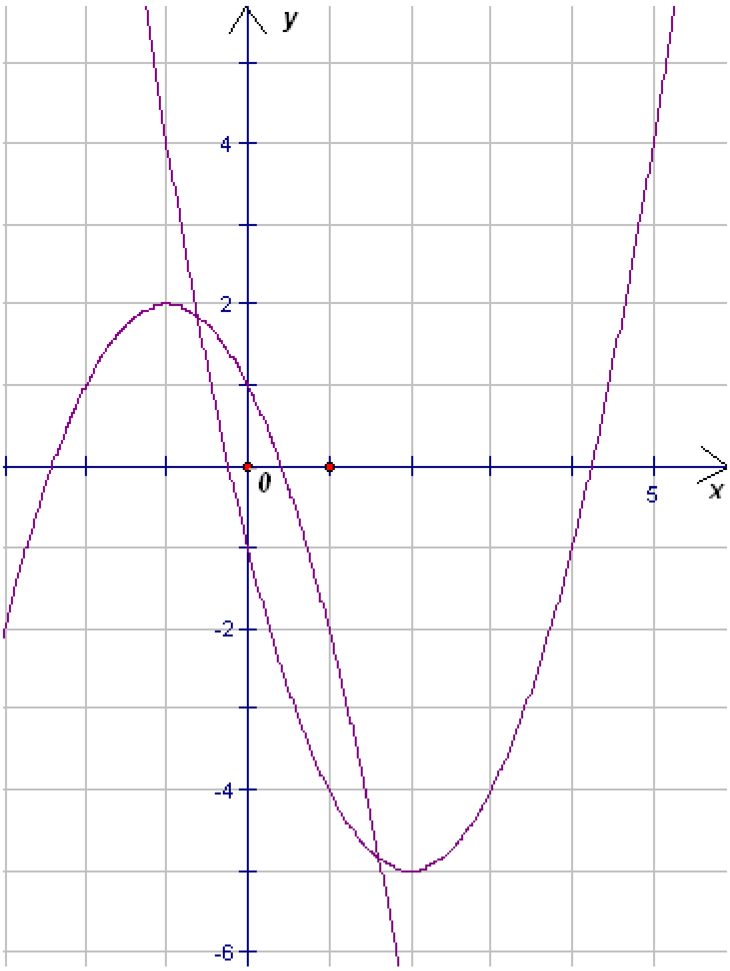
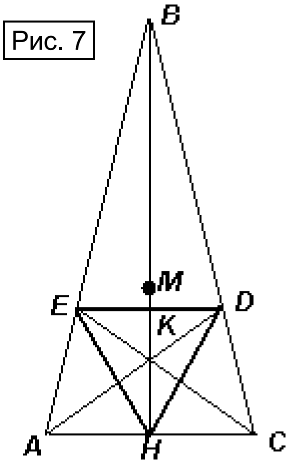


Рис. 6

5.2. Верно ли, что в любом треугольнике точка пересечения медиан лежит внутри треугольника, образованного основаниями биссектрис?

Рис. 7



<u>Ответ</u>: нет, неверно.

Приведем один из возможных примеров. Рассмотрим равнобедренный треугольник *ABC*, в котором *AB* = *BC* = 3, *AC* = 1 (см. рис. 7). Пусть *BH* – его высота, *AD* и *CE* – биссектрисы, *M* – точка пересечения медиан. Тогда *BE* : *EA* = *BD* : *DC* = *AB* : *AC* = 3 : 1 (по свойству биссектрисы треугольника).

Пусть отрезок *DE* пересекает *BH* в точке *K*, тогда *BK* : *KH* = 3 : 1 (по теореме о пропорциональных отрезках). *BM* : *MH* = 2 : 1 (по свойству медиан треугольника). Следовательно, точка *G* лежит вне треугольника *DEH*, образованного основаниями биссектрис.

5.3. Найдите все трехзначные числа, квадраты которых оканчиваются на 1001.

<u>Ответ</u>: 501; 749.

<u>Первый способ</u>. Пусть $\overline{abc}$ = 100*a* + 10*b* + *c* – искомое число. Тогда $\overline{abc}^2 = 10000a^2 + 2000ab + 100b^2 + 200ac + 20bc + c^2$.

Последняя цифра этого числа зависит только от c^2. Так как c^2 оканчивается на 1, значит, *c* = 1 или *c* = 9. Предпоследняя цифра зависит от выражения $20bc + c^2$ = $\left[\begin{array}{l} 20b+1 \\ 180b+81 \end{array}\right.$. Перебором находим, что окончанию 01 могут удовлетворять только три пары значений (*b*; *c*): (5; 1), (0; 1) или (4; 9). Таким образом, квадрат искомого числа имеет вид: $10000a^2 + 10200a + 2601$ или $10000a^2 + 200a + 1$ или $10000a^2 + 9800a + 1201$.

Перебором убеждаемся, что в первом случае ни одно значение *a* не удовлетворяет условию, во втором случае *a* = 5, а в третьем – *a* = 7.

<u>Второй способ</u>. Пусть *n* – искомое число. Так как n^2 оканчивается на 1001, то $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ оканчивается на 1000, то есть оно кратно 1000. Поскольку ровно одно из чисел *n* – 1 или *n* + 1 может делиться на 5, значит это же число должно быть кратно 125. Оба этих числа – четные, значит, то из них, которое делится на 125, делится и на 250.

Так как искомое число – трехзначное, то остается проверить, на что оканчиваются произведения в семи возможных случаях: 248·250; 250·252; 498·500; 500·502; 748·750; 750·752; 998·1000. На 1000 оканчиваются только два из них: 1) 500·502 = 251000, тогда $n - 1 = 500 \Leftrightarrow n = 501$; 2) 748·750 = 561000, тогда $n + 1 = 750 \Leftrightarrow n = 749$.