7 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Тетрадь, ручка и карандаш стоят 120 рублей. А 5 тетрадей, 2 ручки и 3 карандаша стоят 350 рублей. Что дороже: две тетради или одна ручка? *Ответ обоснуйте*.

Ответ: ручка стоит дороже.

Обозначим цены тетради, ручки и карандаша через T, P и K соответственно. Тогда: $T + P + K = 120$ (1) и $5T + 2P + 3K = 350$ (2). Умножив обе части уравнения (1) на 3, получим: $3T + 3P + 3K = 360$. Вычтем это уравнение из уравнения (2): $2T – P = –10$.

Следовательно, одна ручка на 10 рублей дороже, чем две тетради.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены словесно – без выписывания уравнений в явном виде.

1.2. В треугольнике DEF проведена медиана DK. Найдите углы треугольника, если $\angle KDE = 70°$, $\angle DKF = 140°$. *Ответ обоснуйте*.

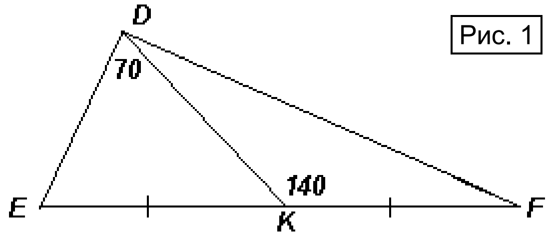


Рис. 1

Ответ: 70°; 90° и 20°.

Так как угол DKF – внешний для треугольника DKE, то $\angle DEK = \angle DKF – \angle KDE = 70°$ (см. рис. 1). Значит, треугольник DKE – равнобедренный: $DK = EK = FK$.

Таким образом, медиана DK треугольника DEF равна половине стороны EF, к которой она проведена, поэтому этот треугольник – прямоугольный: $\angle EDF = 90°$. Следовательно, $\angle DFE = 180° – (\angle DEF + \angle EDF) = 20°$.

1.3. Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое делится на 7 и записывается четырьмя различными цифрами. *Ответ обоснуйте*.

Ответ: 9870.

Выберем последовательно наибольшие возможные значения в разрядах тысяч, сотен и десятков, то есть будем искать число вида $\overline{987a}$. Число 987 делится на 7, значит, a должно делится на 7. Так как значение $a = 7$ выбрать нельзя, то $a = 0$. Число 9870 – искомое.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Число $\frac{100!}{10^{50}}$ записали в виде несократимой дроби. Найдите ее знаменатель. *Ответ обоснуйте*. (*Напомним, что 100! – это произведение всех натуральных чисел от 1 до 100.*)

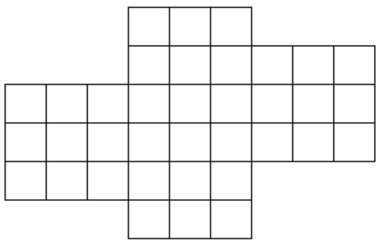
Ответ: 5^{26}.

Так как $10^{50} = 2^{50} \cdot 5^{50}$, то для ответа на вопрос задачи надо выяснить, какие из этих ста простых множителей сократятся.

Заметим, что $100! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 99 \cdot 100$ содержит 50 четных чисел, значит, в разложении числа 100! на простые множители не меньше, чем 50 двоек. Следовательно, 2^{50} сократится.

Среди всех натуральных чисел от 1 до 100 ровно двадцать чисел делятся на 5 и ровно четыре из них делятся на 25. Значит, в разложении числа 100! на простые множители число 5 содержится с показателем степени 24. Сократив дробь на 5^{24}, получим в знаменателе 5^{26}.

2.2. Покажите, как разрезать фигуру, изображенную на рисунке, на восемь равных частей пятью прямолинейными разрезами.



Ответ: см. рис. 2.

Показанный способ разрезания можно придумать, исходя, например, из следующих соображений. Площадь данной фигуры – 36 клеток, поэтому каждая из частей, полученных по результатам разрезания, должна иметь площадь 4,5 клетки. Значит, разрезать по границам клеток *смысла не имеет. Кроме того, чтобы получить восемь равных фигур, разрезы должны проходить по диагоналям четырех прямоугольников с границами на сетке*

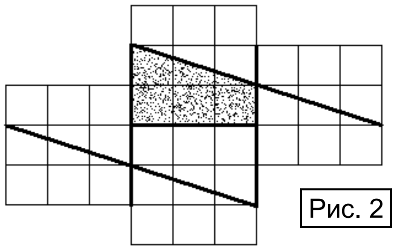


Рис. 2

2.3. По кругу стоят 12 детей. Мальчики всегда говорят правду мальчикам и врут девочкам, а девочки всегда говорят правду девочкам и врут мальчикам. Каждый из них сказал одну фразу своему соседу справа: «Ты – мальчик» или «Ты – девочка». Таких фраз оказалось поровну. Сколько мальчиков и сколько девочек стоит по кругу? *Ответ обоснуйте*.

Ответ: 6 мальчиков и 6 девочек.

Из условия задачи следует, что каждый мальчик произносил одну и ту же фразу: «Ты – мальчик». Действительно, если его сосед справа – мальчик, то он этой фразой говорил правду, а если это девочка, то он этой фразой лгал. Аналогичное рассуждение показывает, что каждая девочка говорила только фразу: «Ты – девочка».

Так как этих фраз было произнесено поровну, то по кругу стоят 6 мальчиков и 6 девочек.

Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

3.1. Два поезда, в каждом из которых по 20 одинаковых вагонов, двигались навстречу друг другу по параллельным путям с постоянными скоростями. Ровно через 36 секунд после встречи их первых вагонов пассажир Вова, сидя в купе четвертого вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Олегом, а еще через 44 секунды последние вагоны поездов полностью разъехались. В каком по счету вагоне ехал Олег? *Ответ обоснуйте*.

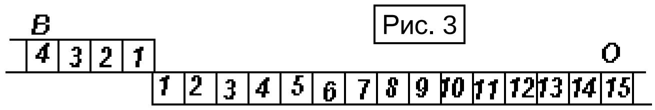


Рис. 3

Ответ: в 15 вагоне.

Будем считать, что первый поезд (в котором ехал Вова) неподвижен. Тогда другой поезд двигался относительно первого, преодолевая расстояние, равное 20 + 20 = 40 вагонам за 36 + 44 = 80 секунд, то есть со скоростью 0,5 вагона в секунду.

От момента встречи первых вагонов поездов до момента, когда Олег поравнялся с Вовой прошло 36 секунд, значит, Олег за это время проехал расстояние, равное 18 вагонам. Следовательно, на момент встречи первых вагонов расстояние между Вовой и Олегом составляло 18 вагонов. Таким образом, если не считать вагоны в которых они ехали, то между ними – 17 вагонов. Вова ехал в четвертом вагоне, то есть между ним и Олегом было 3 вагона первого поезда и 14 вагонов второго поезда, значит, Олег ехал в пятнадцатом вагоне второго поезда (см. рис. 3).

3.2. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен $30°$, $AB = BC = 6$. Проведены высота CD треугольника ABC и высота DE треугольника BDC. Найдите BE. *Ответ обоснуйте*.

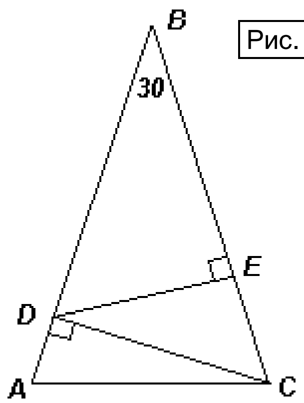


Рис. 4

Ответ: 4,5.

Так как треугольник BDC – прямоугольный и его катет DC лежит напротив угла DBC, который равен $30°$, то $DC = \frac{1}{2}BC$ (см. рис. 4). Кроме того, $\angle DCB = 90° - \angle DBC = 60°$, значит, в прямоугольном треугольнике CED катет CE лежит напротив угла CDE, который равен $30°$. Следовательно, $CE = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{4}BC$. Таким образом, $BE = BC - CE = \frac{3}{4}BC = 4{,}5$.

3.3. Учительница записала на доске два натуральных числа. Леня умножил первое число на сумму цифр второго и получил 201320132013. Федя умножил второе число на сумму цифр первого и получил 201420142014. Не ошибся ли кто-то из ребят? *Ответ обоснуйте*.

Ответ: кто-то из ребят ошибся.

Воспользуемся ***признаком делимости на 3 и 9***: число делится на 3 (9) тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3 (9). Сумма цифр числа 201320132013 равна 18, значит, оно делится на 9 и на 3. Сумма цифр числа 201420142014 равна 21, значит оно делится на 3, но не делится на 9.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Возможны три случая:

1) если оба числа, записанных учительницей, делились хотя бы на 3, то оба полученных произведения должны были делиться на 9. Это означает, что Федя наверняка ошибся;

2) если одно из записанных чисел делилось на 3, а другое – нет, то оба произведения должны были делиться на 3 и не делиться на 9. В этом случае наверняка ошибся Леня;

3) ни одно из записанных чисел не делилось на 3, то оба произведения не могли быть кратны трем, то есть ошиблись оба мальчика.

Второй способ. Предположим, что Федя не ошибся. Тогда, так как 201420142014 делится на 3, но не делится на 9, то одно из чисел, записанных учительницей, делилось на 3, но не делилось на 9, а другое – не делилось на 3. В этом случае Леня не мог получить число, делящееся на 9, то есть Леня ошибся.

Таким образом, они не могли быть правы одновременно, значит, кто-то из мальчиков ошибся.

Для решения также можно использовать более общее утверждение: любое число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки от деления на 3 (9).

Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

4.1. В соревнованиях велогонщиков на круговом треке приняли участие Вася, Петя и Коля, стартовав одновременно. Вася каждый круг проезжал на 2 секунды быстрее Пети, а Петя – на три секунды быстрее Коли. Когда Вася закончил дистанцию, Пете осталось проехать один круг, а Коле – два круга. Сколько кругов составляла дистанция?

Ответ: 6 кругов.

Пусть дистанция составляла n кругов, а Вася преодолевал каждый круг за t секунд. Тогда всю дистанцию Вася проехал за tn секунд. Петя проехал $n - 1$ круг, проезжая каждый круг за $t + 2$ секунды, значит, к моменту финиша Васи он затратил $(t + 2)(n - 1)$ секунд. Коля проехал $n - 2$ круга, проезжая каждый круг за $t + 5$ секунд, значит, к моменту финиша Васи он затратил $(t + 5)(n - 2)$ секунды.

Из условия задачи следует, что $tn = (t + 2)(n - 1) = (t + 5)(n - 2)$, что можно записать в виде системы уравнений: $\begin{cases} tn = (t+5)(n-2), \\ tn = (t+2)(n-1) \end{cases}$. Решим ее.

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{cases} 5n - 2t = 10, \\ 2n - t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5n - 2t = 10, \\ 4n - 2t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6, \\ t = 10 \end{cases}.$$

4.2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно так, что лучи AM и AN делят угол BAD на три равные части. ME – высота треугольника MAN. Найдите угол EDN. *Ответ обоснуйте*.

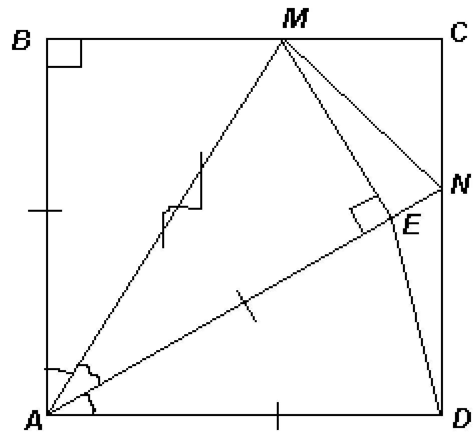


Рис. 5

Ответ: 15°.

Заметим, что прямоугольные треугольники MBA и MEA равны (по гипотенузе и острому углу, см. рис. 5). Следовательно, $AE = AB = AD$, то есть треугольник DAE

– равнобедренный. Так как $\angle DAE = 30°$, то $\angle EDA = \angle DEA = (180° - \angle DAE) : 2 = 75°$. Значит, $\angle EDN = 90° - \angle EDA = 15°$.

4.3. Из шахматной доски (размером 8×8) вырезали центральный квадрат размером 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на равные фигурки в виде буквы «Г», состоящие из четырех клеток? *Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Ответ обоснуйте.*

Ответ: нет, нельзя.

Предположим, что искомое разрезание возможно. Покрасим горизонтали доски поочередно в два цвета («матрасиком», см. рис. 6). Тогда в каждой фигурке, независимо от ее расположения, будут три клетки одного цвета и одна клетка другого цвета. Так как в оставшейся части доски – по 30 клеток каждого цвета, то фигурок при разрезании может получиться только четное количество.

С другой стороны, фигурок будет $(64 - 4) : 4 = 15$, то есть нечетное количество.

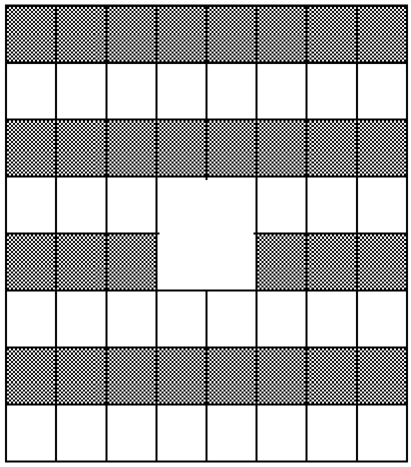


Рис. 6

Полученное противоречие показывает, что указанное разрезание осуществить невозможно.