8 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Найдите сумму цифр в десятичной записи числа $4^{12}\cdot 5^{21}$.

<u>Ответ</u>: 8.

Преобразуем: $4^{12}\cdot5^{21} = 2^{24}\cdot5^{21} = 2^3\cdot2^{21}\cdot5^{21} = 2^3\cdot10^{21} = 8\cdot10^{21}$ = 80…0 (*21 нуль*). Сумма цифр полученного числа равна 8.

1.2. Диагональ *BD* параллелограмма *ABCD* образует углы по 45° со стороной *BC* и высотой, проведенной из вершины *D* к стороне *AB*. Найдите угол *ACD*.

<u>Ответ</u>: 45°.

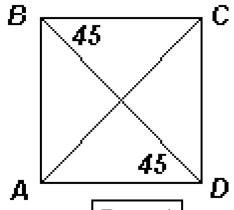


Рис. 1

Из условия задачи следует, что указанная высота параллельна стороне *BC*, следовательно, эта высота совпадает со стороной *DA*, значит, *ABCD* – прямоугольник (см. рис. 1). Так как $\angle ABD = \angle CBD$ = 45°, то *BD* – биссектриса угла *B* этого прямоугольника, значит, *ABCD* – квадрат. Следовательно, *CA* – биссектриса угла *C* квадрата, то есть $\angle ACD$ = 45°.

1.3. Может ли разность квадратов двух простых чисел быть квадратом натурального числа?

<u>Ответ</u>: да, может.

Например, $5^2 – 3^2 = 4^2$ или $13^2 – 5^2 = 12^2$.

Существуют и другие примеры, но найти их гораздо труднее. Используя свойства пифагоровых троек можно доказать, что во всех остальных случаях для выполнения равенства $p^2 – q^2 = n^2$ (p и q – простые числа, n – натуральное) число n должно быть кратно 60. Приведем еще два примера, учитывающих это соображение: $61^2 – 11^2 = 60^2$ и $181^2 – 19^2 = 180^2$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Для чисел *a*, *b* и *c* выполняется равенство $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$. Следует ли из него, что $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$?

<u>Ответ</u>: нет, не следует.

Например, при *a* = с = 1; *b* = 2 первое равенство выполняется, а второе – нет. Значит, второе равенство не является следствием первого.

Существуют и другие примеры. Подобрать пример можно, исходя из различных соображений. Приведем два возможных хода рассуждений.

1) Заметим, что при a = c ≠ 0 равенство $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$ становится тождеством. Второе равенство в этом случае примет вид $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ и будет выполняться только, если |a| = |b| ≠ 0.

2) Из равенства $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$ следует, что $a^2c+b^2c=ab^2+ac^2 \Leftrightarrow ac(a-c)=b^2(a-c)$ $\Leftrightarrow (ac-b^2)(a-c)=0 \Leftrightarrow b^2 = ac$ или a = c. Равенство $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ при b ≠ 0 и c ≠ 0 примет вид b^2 = ac.

Значит, выбрав ненулевые значения переменных так, чтобы a = c и b^2 ≠ ac, мы получим ситуацию, при которой первое равенство выполняется, а второе – не выполняется.

2.2. Полуокружность с диаметром *AD* касается катета *BC* прямоугольного треугольника *ABC* в точке *M* (см. рисунок). Докажите, что *AM* – биссектриса угла *BAC*.

Проведем радиус *OM* данной полуокружности, тогда *OM* = *OA* (см. рис. 2). Следовательно, $\angle OAM = \angle OMA$. Кроме того, $OM \perp BC$, значит, $OM \parallel AC$, поэтому $\angle CAM = \angle OMA$. Таким образом, $\angle OAM = \angle CAM$, то есть *AM* – биссектриса угла *BAC*.

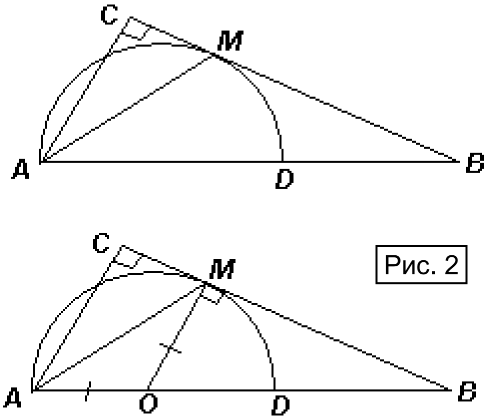


Рис. 2

2.3. Найдутся ли такие три натуральных числа, что сумма любых двух из них – степень тройки?

Ответ: нет, не найдутся.

Пусть нашлись три числа, удовлетворяющие условию. Но среди любых трех чисел найдутся два числа одинаковой четности. Их сумма – четное число, а любая степень тройки – нечетное число.

Полученное противоречие показывает, что требуемых чисел не существует.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. А когда поезд отъезжал, один из математиков насчитал скамеек в три раза больше, чем другой. А сколько скамеек насчитал третий?

Ответ: 7.

Из условия задачи следует, что каждый из математиков в своих подсчетах учел все скамейки на станции ровно по одному разу, то есть в итоге они насчитали равное количество скамеек. Тогда, если после отправления поезда третий математик насчитал *n* скамеек, то второй должен был насчитать (*n* + 3) скамейки, а первый – (*n* + 8) скамеек.

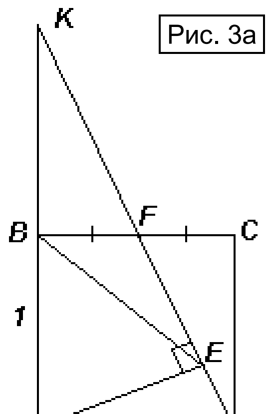
Таким образом, $\frac{n+8}{n+3} = 3$ или $\frac{n+3}{n} = 3$ или $\frac{n+8}{n} = 3$. Первые два уравнения не имеют натуральных корней, а решением третьего уравнения является *n* = 4. Следовательно, всего на станции – 19 скамеек, а математик, о котором спрашивается в задаче, – тот, кто при подъезде к станции насчитал 12 скамеек. Значит, при отъезде от станции он насчитал 7 скамеек.

3.2. В квадрате *ABCD* со стороной 1 точка *F* – середина стороны *BC*, *E* – основание перпендикуляра, опущенного из вершины *A* на *DF*. Найдите длину *BE*.

Ответ: 1.

Первый способ. Продолжим отрезок *DF* до пересечения с прямой *AB* в точке *K* (см. рис. 3а). Прямоугольные треугольники *KBF* и *DCF* равны (по катету и острому углу), значит, *KB* = *DC*. Таким образом, *EB* – медиана прямоугольного треугольника *AEK*, проведенная к гипотенузе, поэтому $BE = \frac{1}{2}AK = 1$.

Рис. 3а



Второй способ. Так как $\angle ABF = \angle AEF = 90°$, то около четырехугольника *ABFE* можно описать окружность, значит, $\angle BAF = \angle CFD$ (см. рис. 3б).

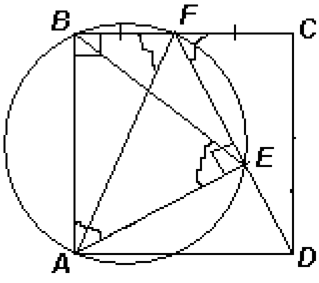


Рис. 3б

Проведем отрезок *AF*, тогда из равенства треугольников *ABF* и *DCF* получим, что $\angle CFD = \angle BFA$. В свою очередь, $\angle BFA = \angle BEA$

(вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Таким образом, $\angle BAF = \angle BEA$, поэтому треугольник ABE – равнобедренный: $BE = AB = 1$.

3.3. Можно ли расставить шесть фотографов на площади таким образом, чтобы каждый из них мог сфотографировать ровно четырёх других? (*Фотографы A и B могут сфотографировать друг друга, если на отрезке AB нет других фотографов*.)

Ответ: да, можно.

Например, см. рис. 4.

Не смогут сфотографировать друг друга только фотографы 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6.

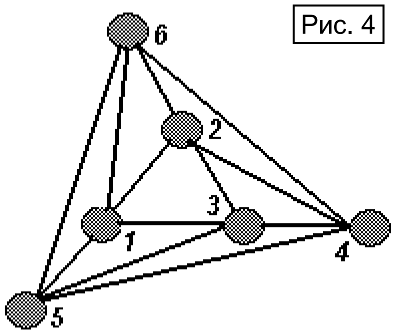


Рис. 4

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. На диске хранится 2013 файлов размером 1 Мб, 2 Мб, 3 Мб, ..., 2012 Мб, 2013 Мб. Можно ли их распределить по трем папкам так, чтобы в каждой папке было одинаковое количество файлов и все три папки имели один и тот же размер (в Мб)?

Ответ: да, можно.

Первый способ. Заметим, что $x + (x + 5) = (x + 1) + (x + 4) = (x + 2) + (x + 3)$, поэтому 6 файлов, размерами которых в Мб являются шесть последовательных натуральных чисел, можно распределить по трем папкам требуемым образом.

Аналогично, из равенства $y + (y + 5) + (y + 7) = (y + 1) + (y + 3) + (y + 8) = (y + 2) + (y + 4) + (y + 6)$ следует, что 9 файлов, размерами которых в Мб являются девять последовательных натуральных чисел, также можно распределить по трем папкам требуемым образом.

Уравнение $6n + 9m = 2013 \Leftrightarrow 2n + 3m = 671$ имеет натуральные решения, например, $m = 1$; $n = 334$. Это означает, что разбивая числа от 1 до 2013 на одну «девятку» и 334 «шестерки» последовательных натуральных чисел (любым способом) и распределяя соответствующие файлы по трем папкам указанным выше образом, мы получим требуемое распределение.

Отметим, что указанное распределение можно осуществить многими способами. Действительно, уравнение $2n + 3m = 671$ имеет 112 натуральных решений, а для каждой пары решений существует много способов выбора «шестерок» и «девяток».

Второй способ. Возьмём файлы парами и сначала разложим их в три папки следующим образом:

1) 1 + 2013, 4 + 2010, ...
2) 2 + 2012, 5 + 2009, ...
3) 3 + 2011, 6 + 2008, ...

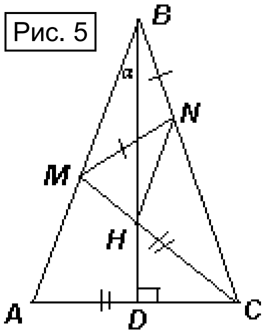
В этих папках будет одинаковое количество файлов и папки будут иметь один и тот же размер. Так как число 2013 при делении на 6 дает остаток 3, то в конце этого процесса останутся три файла с размерами 2014 : 2 = 1007 (Мб), 1006 Мб и 1008 Мб.

Теперь поступим так: положим файл размером 1007 Мб в папку 3), а в папках 1) и 2) поменяем местами файлы размерами 1 Мб и 2 Мб и добавим в них файлы размерами 1006 Мб и 1008 Мб соответственно. Тем самым в каждую папку будет добавлено 1007 Мб и условие задачи будет выполнено.

Отметим, что в результате требуемого распределения каждая из трех папок будет иметь размер $\frac{1+2013}{2}\cdot 2013 : 3 = 675697$ *(Мб).*

4.2. На равных сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* выбраны точки *M* и *N* соответственно так, что *AC* = *CM* и *MN* = *NB*. Высота треугольника, проведенная из вершины *B*, пересекает отрезок *CM* в точке *H*. Докажите, что *NH* – биссектриса угла *MNC*.

Рис. 5



Пусть $\angle ABH = \alpha$ (см. рис. 5). Так как высота *BD* данного треугольника является и биссектрисой, то $\angle ABC = 2\alpha$. Треугольник *BNM* – равнобедренный, поэтому $\angle BMN = \angle ABC = 2\alpha$. Треугольник *ACM* – также равнобедренный, значит $\angle CMA = \angle CAM = 90° - \alpha$. Таким образом, $\angle CMN = 180° - \angle BMN - \angle CMA = 180° - 2\alpha - (90° - \alpha) = 90° - \alpha$. Следовательно, *MC* – биссектриса угла *AMN*. Так как *BD* – биссектриса внутреннего угла треугольника *BMN*, а *MC* – биссектриса его внешнего угла, то точка *H* их пересечения является центром вневписанной окружности этого треугольника. Следовательно, *NH* – биссектриса внешнего угла *MNC* треугольника *BMN*.

4.3. Толя выложил в ряд 101 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трехкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько трехкопеечных монет могло быть у Толи?

Ответ: 25 или 26.

Рассмотрим четыре монеты, лежащие подряд. Из условия задачи следует, что среди них не может быть более одной трехкопеечной монеты, более двух двухкопеечных и более двух копеечных монет.

Пусть нашлась такая четверка монет, среди которых вообще нет трехкопеечных, тогда в этой четверке копеечных и двухкопеечных монет должно быть ровно по две. Но это невозможно, так как между любыми двухкопеечными должны лежать две монеты, а копеечные монеты при этом лежать рядом не могут. Таким образом, среди любых четырех монет, лежащих подряд, есть ровно одна трехкопеечная монета.

Так как $101 = 4\cdot 25 + 1$, то трехкопеечных монет может оказаться либо 25, либо 26.

Примеры: 1) для 25 монет: 1 3 1 2 **|** 1 3 1 2 **|** … **|** 1 3 1 2 **|** 1 (*25 групп вида 1312 и монета 1*); 2) для 26 монет: 3 1 2 1 **|** 3 1 2 1 **|** … **|** 3 1 2 1 **|** 3 (*25 групп вида 3121 и монета 3*).