9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Прямые $y = kx + b$, $y = 2kx + 2b$ и $y = bx + k$ различны и пересекаются в одной точке. Какими могут быть ее координаты?

Ответ: (1; 0).

Из уравнения первой прямой следует, что $2y = 2kx + 2b$, тогда из первых двух уравнений получим, что $2y = y$, то есть $y = 0$. Из первого и третьего уравнения получим, что $kx + b = bx + k \Leftrightarrow x(k - b) = k - b$. Если $k = b$, то эти прямые совпадают, что противоречит условию. Следовательно, $x = 1$. Таким образом, другой общей точки, кроме (1; 0), заданные три прямые иметь не могут.

Подставив $x = 1$, $y = 0$ в каждое из уравнений, получим одно и то же равенство $k + b = 0$. Это означает, что при $k = –b$ прямые действительно пересекаются в указанной точке.

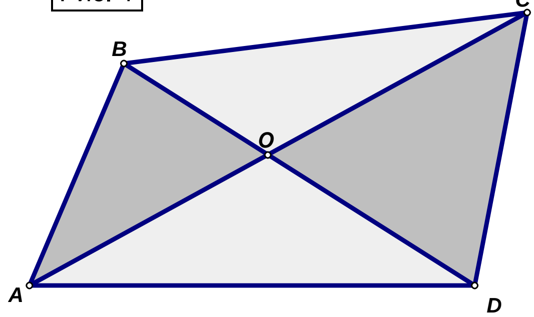
Возможны и другие способы решения, например, составить систему из трех уравнений и решить ее относительно переменных x, y и k (или b).

1.2. Существует ли выпуклый четырехугольник, у которого каждая диагональ не больше, чем любая сторона?

Ответ: нет, не существует.

Первый способ. В любом выпуклом четырехугольнике $ABCD$ хотя бы один угол не меньше, чем 90°. Пусть, например, это угол ABC (см. рис. 1). Тогда в треугольнике ABC диагональ AC четырехугольника является наибольшей стороной, то есть $AC > AB$ и $AC > BC$. Таким образом, четырехугольника, указанного в условии задачи, не существует.

Рис. 1



Второй способ. Пусть O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 1). Для каждого из треугольников AOB, BOC, COD и DOA запишем неравенство треугольника: $OA + OB > AB$, $OB + OC > BC$, $OC + OD > CD$ и $OD + OA > DA$. Сложив эти неравенства почленно, получим: $2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA$. Если же предположить, что любая диагональ не больше любой из сторон, то $AC + AC + BD + BD \le AB + BC + CD + DA$. Полученное противоречие показывает, что искомого четырехугольника не существует.

1.3. Можно ли в клетки таблицы размером 4×4 вписать по целому числу так, чтобы сумма всех чисел таблицы была положительной, а сумма чисел в каждом квадрате размера 3×3 была отрицательной?

Ответ: да, можно.

Заметим, что центральный квадрат размера 2×2 содержится в любом квадрате размера 3×3. Поставим, например, в одну из клеток центрального квадрата число –10, а остальные клетки данной таблицы заполним единицами. Тогда сумма всех чисел таблицы равна 15 + (–10) = 5, а сумма чисел внутри любого квадрата размера 3×3 равна 8 + (–10) = –2.

Существуют и другие примеры.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Докажите, что если $a \le 1$, $b \le 1$ и $a + b \ge 0{,}5$, то $(1 – a)(1 – b) \le \frac{9}{16}$.

Первый способ. Из условия задачи следует, что $1 – a \ge 0$ и $1 – b \ge 0$. Тогда по неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим: $\sqrt{(1-a)(1-b)} \le \frac{(1-a)+(1-b)}{2} = 1-\frac{a+b}{2} \le \frac{3}{4}$. Возведя в квадрат обе части неравенства $\sqrt{(1-a)(1-b)} \le \frac{3}{4}$, получим требуемое неравенство.

Эту же идею можно реализовать, действуя методом «от противного».

Второй способ. Пусть $1 - a = x \geq 0$, $1 - b = y \geq 0$, тогда $x + y = 2 - (a + b) \leq \frac{3}{2}$. Следовательно, $xy \leq x(\frac{3}{2} - x)$. Квадратичная функция $f(x) = x(\frac{3}{2} - x)$ достигает наибольшего значения при $x = \frac{3}{4}$ и это значение равно $\frac{9}{16}$. Значит, $xy \leq \frac{9}{16}$, что и требовалось.

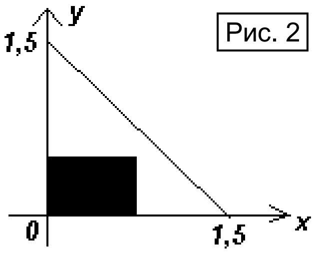


Рис. 2

У этого способа решения есть естественная геометрическая интерпретация. Неравенства $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $x + y \leq \frac{3}{2}$ задают на координатной плоскости прямоугольный равнобедренный треугольник площади $\frac{3}{8}$ (см. рис. 2). Рассмотрим произвольный прямоугольник с вершиной в начале координат и сторонами, параллельными осям координат, который лежит внутри этого треугольника. Доказанное неравенство показывает, что его площадь xy не превосходит половины площади треугольника. Это утверждение останется верным и при замене $\frac{3}{2}$ на любое положительное число.

2.2. В треугольнике ABC угол C равен 135°. На стороне AB вне треугольника построен квадрат с центром O. Найдите OC, если $AB = 6$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Пусть $ABDE$ – построенный квадрат. Его диагональ образует со стороной угол 45°, значит, $\angle ACB + \angle ADB = 180°$ (см. рис. 3). Следовательно, около четырехугольника $ACBD$ можно описать окружность. Так как угол ABD, вписанный в эту окружность, прямой, то центр O окружности является серединой диагонали AD квадрата, то есть его центром.

Тогда OC – радиус этой окружности. Таким образом, $OC = \frac{1}{2}AD = 3\sqrt{2}$.

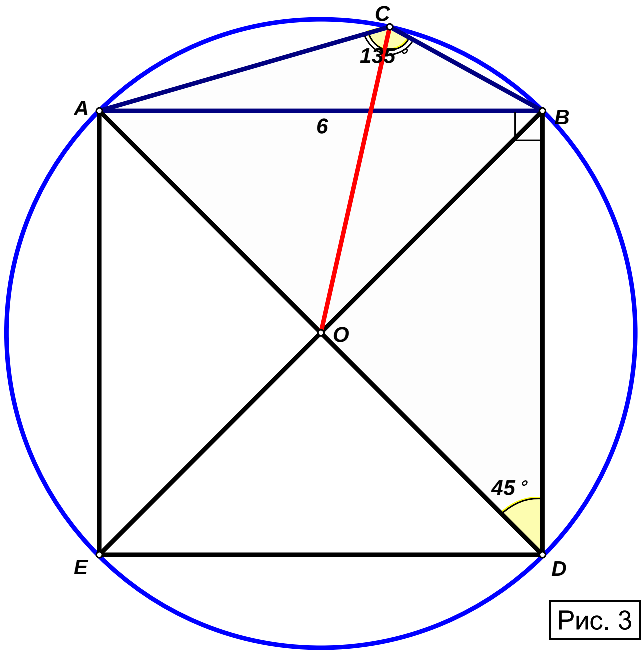


Рис. 3

Обосновать, что точа C лежит на окружности, описанной около квадрата, можно и по-другому. Проведя эту окружность, заметим, что ее центральный угол AOB – прямой, значит, вписанный угол, опирающийся на ту же дугу равен 45°. Следовательно, дополняющая ее дуга той же окружности принадлежит ГМТ, из которых хорда AB видна под углом 135°.

2.3. Перемножили несколько натуральных чисел и получили 224, причем самое маленькое число было ровно вдвое меньше самого большого. Сколько чисел перемножили?

Ответ: три.

Разложим данное число на простые множители: $224 = 2^5 \cdot 7$. Рассмотрим два числа, указанные в условии: самое маленькое и самое большое. Если одно из них делится на 7, то и другое должно делиться на 7. Но 224 не делится на 7^2, значит, оба этих числа являются степенями двойки. Из условия также следует, что это – две последовательные степени числа 2. Кроме того, самое большое число должно быть больше, чем 7. Таким образом, оно равно $2^3 = 8$, а самое маленькое – это $2^2 = 4$. Остался единственный множитель, равный семи, поэтому искомых чисел три: 4, 7 и 8.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. По дорожке стадиона длиной 400 метров из одной точки в одном направлении выбегают три спортсмена с постоянными скоростями 12 км/ч, 15 км/ч и 17 км/ч. Найдите, через какое наименьшее время спортсмены поравняются.

Ответ: через 24 минуты.

Скорость, с которой второй спортсмен удаляется от первого, равна 3 км/ч = $\frac{1}{8}$ круга за минуту, а скорость, с которой третий бегун удаляется от первого, равна 5 км/ч = $\frac{5}{24}$ круга за минуту. Пусть в первый момент, когда спортсмены поравнялись, второй опередил первого на n кругов, а третий – на m кругов. Тогда искомое время $t = 8n = \frac{24}{5}m$.

Таким образом, $5n = 3m$. Наименьшее натуральное решение этого уравнения: $n = 3$, $m = 5$. Значит, $t = 24$.

3.2. В треугольнике ABC из вершин A и B проведены биссектрисы, а из вершины C – медиана. Оказалось, что точки их попарного пересечения образуют прямоугольный равнобедренный треугольник. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 90°, 60° и 30°.

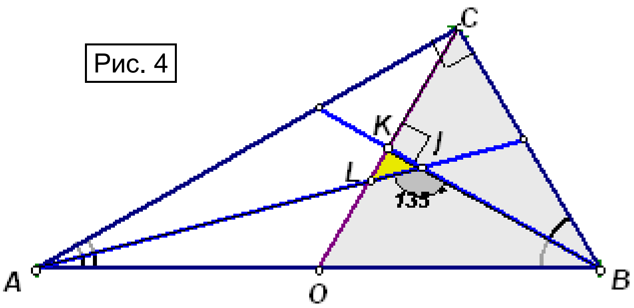


Рис. 4

Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, а его медиана CO пересекает проведенные биссектрисы в точках K и L (см. рис. 4). Так как $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle C > 90°$, то в полученном треугольнике KLI угол при вершине I прямым быть не может. Тогда из условия задачи следует, что $\angle AIB = 135°$, поэтому $\angle ACB = 90°$. Следовательно, $OC = OA = OB$, то есть треугольники AOC и BOC – равнобедренные.

Без ограничения общности можно считать, что прямым в треугольнике KLI является угол при вершине K. Тогда в треугольнике BOC высота BK совпадает с биссектрисой, поэтому $OB = BC$. Таким образом, треугольник BOC – равносторонний. Следовательно, $\angle ABC = 60°$, значит, $\angle BAC = 30°$.

3.3. На острове 100 рыцарей и 100 лжецов. У каждого из них есть хотя бы один друг. Однажды ровно 100 человек сказали: «Все мои друзья – рыцари», и ровно 100 человек сказали : «Все мои друзья – лжецы». Каково наименьшее возможное количество пар друзей, один из которых рыцарь, а другой лжец?

Ответ: 50.

Докажем, что таких пар не меньше, чем 50. Рассмотрим какого-нибудь жителя A острова, утверждающего: «Все мои друзья – лжецы». Если A – рыцарь, то у него есть друг – лжец, значит, есть хотя бы одна пара друзей, в которой один – рыцарь, а другой – лжец. Если A – лжец, то у него есть друг – рыцарь, то есть и в этом случае есть хотя бы одна такая пара. В обоих случаях, сам A – один из этой пары. Так как такое высказывание сделали 100 человек, то количество пар не может быть меньше, чем 100 : 2 = 50.

Возможный пример: пусть 50 рыцарей дружат между собой, 50 лжецов дружат между собой и есть 50 пар вида «рыцарь – лжец», причем больше друзей у жителей из этих пар нет. Тогда любой из первых двух групп вправе сказать: «Все мои друзья – рыцари», а любой из третьей группы: «Все мои друзья – лжецы».

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Числа *x*, *y* и *z* таковы, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$. Какие значения может принимать выражение $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$?

Ответ: 0.

Заметим, что $\frac{x^2}{y+z}+x$ = $\frac{x^2+xy+xz}{y+z}$ = $\frac{x}{y+z}(x+y+z)$. Аналогично, $\frac{y^2}{z+x}+y$ = $\frac{y}{z+x}(x+y+z)$ и $\frac{z^2}{x+y}+z$ = $\frac{z}{x+y}(x+y+z)$.

Сложим почленно три полученных равенства, введя следующие обозначения: $A=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$, $B=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$ и вынося за скобки в правой части выражение $x + y + z$. Тогда $B + (x + y + z) = (x + y + z)A$. По условию $A = 1$, поэтому $B = 0$.

Отметим, что вопрос существования чисел x, y и z, удовлетворяющих условию, в данной задаче не рассматривается.

4.2. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Точки *B*' и *C*' симметричны его вершинам *B* и *C* относительно прямых *AC* и *AB* соответственно. Окружности, описанные около треугольников *ABB*' и *ACC*' вторично пересекаются в точке *P*. Докажите, что прямая *AP* проходит через центр окружности, описанной около *ABC*.

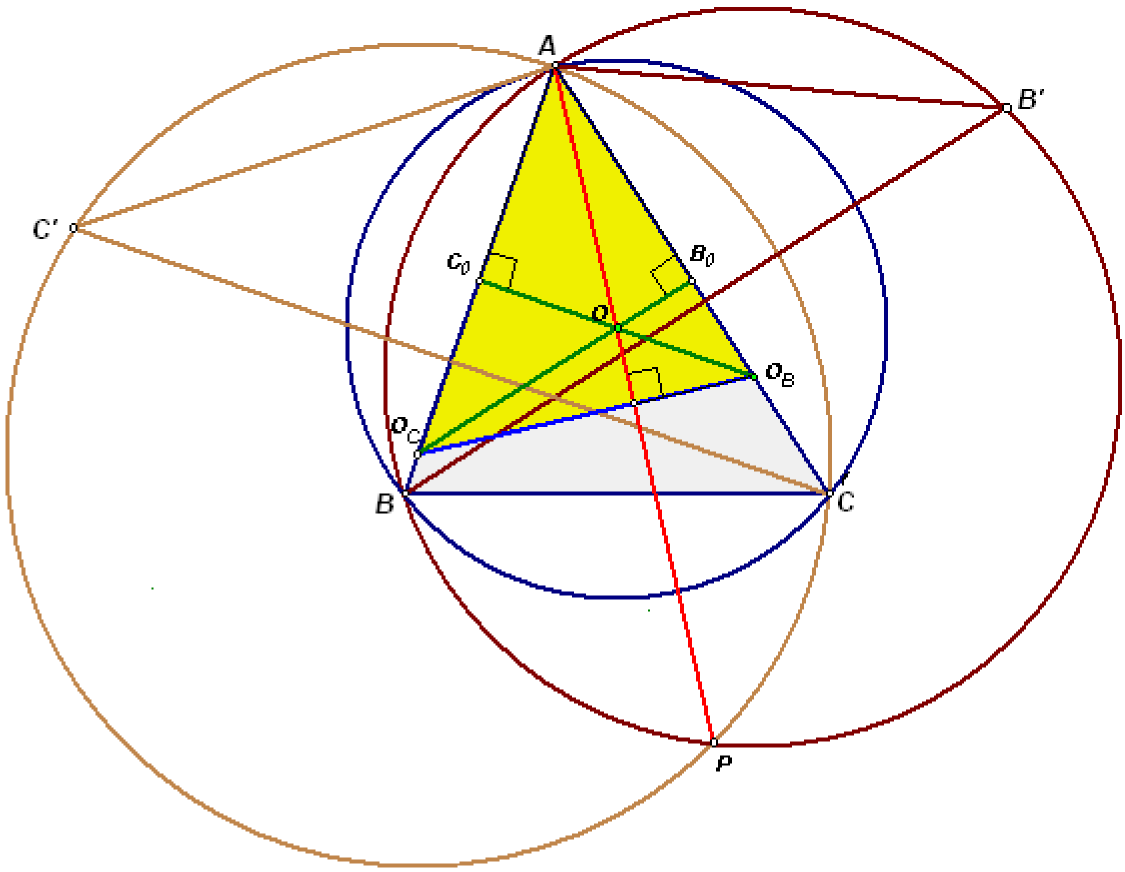


Рис. 5

Так как *AC* является серединным перпендикуляром к отрезку *BB*', то центр O_B окружности, описанной около треугольника *ABB*', лежит на прямой *AC*. Аналогично, центр O_C окружности, описанной около треугольника *ACC*', лежит на прямой *AB* (см. рис. 5).

Проведем окружность с центром *O*, описанную около треугольника *ABC*. Общей хордой этой окружности и окружности *ACC*' является отрезок *AB*, поэтому линия центров OO_B является серединным перпендикуляром к *AB*. Аналогично, OO_C – серединный перпендикуляр к стороне AC. Обозначив точки пересечения OO_B с AB и OO_C с AC через C_0 и B_0 соответственно, получим, что O_BC_0 и O_CB_0 являются высотами треугольника AO_BO_C, а точка O их пересечения – ортоцентром этого треугольника.

Отрезок AP является общей хордой двух окружностей, указанных в условии задачи, значит, он перпендикулярен их линии центров O_BO_C. Следовательно, прямая AP содержит третью высоту треугольника AO_BO_C, поэтому AP проходит через точку O.

4.3. На экране компьютера – число 141. Каждую секунду компьютер перемножает все цифры числа на экране, полученное произведение либо прибавляет к этому числу, либо вычитает из него, а результат появляется на экране вместо исходного числа. Появится ли еще когда-нибудь на экране число 141?

Ответ: нет, не появится.

На первом шаге на экране появится либо число 145, либо число 137.

В первом случае число 141 никогда появиться не сможет, так как если число на экране оканчивается на 5, то произведение его цифр кратно пяти. Поэтому из числа, оканчивающегося на 5, можно получить только число, оканчивающееся на 5 или на 0. Если же число оканчивается на 0, то оно в дальнейшем не изменяется.

Во втором случае на следующем шаге возникнет либо число 158, либо число 116. Но произведение цифр четного числа всегда четно, поэтому из четного числа можно получить на экране только четное. А так как 141 – число нечетное, то и в этом случае его получить не удастся.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Верно ли, что $2^{62} + 1$ делится на $2^{31} + 2^{16} + 1$?

Ответ: да, верно.

Пусть $2^{15} = a$. Тогда $2^{62} + 1 = 4a^4 + 1 = (4a^4 + 4a^2 + 1) - 4a^2 = (2a^2 + 1)^2 - (2a)^2 = (2a^2 + 2a + 1)(2a^2 - 2a + 1) = (2^{31} + 2^{16} + 1)(2^{31} - 2^{16} + 1)$.

Следовательно, $2^{62} + 1$ делится на $2^{31} + 2^{16} + 1$.

Эту же идею (разложение на множители с помощью выделения квадрата двучлена) можно реализовать непосредственно, не прибегая к замене.

5.2. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ отметили точки E и F, так что $AFCE$ – ромб. Известно, что $AB = 16$, $BC = 12$. Найдите EF.

Ответ: 15.

Из условия задачи следует, что прямоугольник и ромб имеют общий центр симметрии O. Кроме того, из прямоугольного треугольника ABC получим, что $AC = 20$ (см. рис. 6). Далее можно рассуждать по-разному.

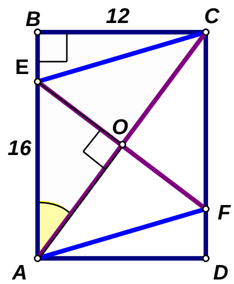


Рис. 6

Первый способ. Также из треугольника ABC: $\operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{4}$. Тогда из треугольника OAE: $OE = AO\cdot \operatorname{tg}\angle BAC = 7{,}5$; $EF = 2OE = 15$.

Второй способ. Пусть $AE = EC = x$, тогда $BE = 16 - x$. Из прямоугольного треугольника CBE: $x^2 = 12^2 + (16 - x)^2$. Отсюда $x = 12{,}5$. Из прямоугольного треугольника COE: $OE^2 = EC^2 - CO^2 = 7{,}5^2$; тогда $EF = 2OE = 15$.

5.3. В классе 33 ученика, всем вместе 430 лет. Докажите, что если выбрать 20 самых старших из них, то им вместе будет не меньше, чем 260 лет. (*Возраст любого ученика – целое число*.)

Пусть это не так, то есть двадцати самым старшим в сумме – меньше, чем 260 лет. Тогда тринадцати остальным (самым младшим) – более 170 лет. Так как $13\cdot 13 = 169$, то среди них найдется хотя бы один, которому не менее четырнадцати лет (по принципу Дирихле). Но тогда каждому из двадцати самых старших не может быть меньше, чем 14 лет. Следовательно, вместе им не меньше, чем $14\cdot 20 = 280$ лет.

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.