11 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Решите систему: $\begin{cases} x-y\ge z, \\ x^2+4y^2+5=4z \end{cases}$.

Ответ: (2; –0,5; 2,5).

Решение. Умножим обе части неравенства на 4 и подставим в него значение 4*z* из уравнения. Получим: $x^2+4y^2+5\le 4x-4y$ $\Leftrightarrow$ $x^2-4x+4+4y^2+4y+1\le 0$ $\Leftrightarrow$ $(x-2)^2+(2y+1)^2\le 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=2, \\ y=-0{,}5 \end{cases}$. Подставляя найденные значения *x* и *y* в уравнение, получим, что *z* = 2,5.

1.2. Существует ли выпуклый 1000-угольник, у которого все углы выражаются целыми числами градусов?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Если внутренние углы многоугольника выражаются целыми числами, то и его внешние углы – целые числа. Но у любого выпуклого многоугольника сумма внешних углов равна 360°, а сумма тысячи любых натуральных чисел больше, чем 360.

1.3. Существует ли такая цифра *a*, что $\overline{aaa(a-1)}=(a-1)^{a-2}$.

Ответ: да, существует.

Решение. Действительно, при *a* = 7 получим верное равенство 7776 = 6^5.

Указанное значение a – единственное. Действительно, при a < 6 правая часть равенства содержит меньше четырех цифр, а при a > 7 – больше четырех цифр. Кроме того, при a = 6 правая часть делится на 25, а левая часть на 25 не делится.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Числовая функция *f* такова, что для любых *x* и *y* выполняется равенство *f*(*x* + *y*) = f(*x*) + f(*y*) + 80*xy*. Найдите *f*(1), если *f*(0,25) = 2.

Ответ: 38.

Решение. Из условия задачи следует, что *f*(0,5) = *f*(0,25 + 0,25) = *f*(0,25) + *f*(0,25) + 80⋅0,25⋅0,25 = 2 + 2 + 5 = 9. Аналогично, *f*(1) = *f*(0,5 + 0,5) = *f*(0,5) + *f*(0,5) + 80⋅0,5⋅0,5 = 9 + 9 + 20 = 38.

2.2. Четырёхугольник *ABCD* – вписанный. Лучи *AB* и *DC* пересекаются в точке *M*, а лучи *BC* и *AD* – в точке *N*. Известно, что *BM* = *DN*. Докажите, что *CM* = *CN*.

Решение. Пусть $\angle MBC=\alpha$, тогда $\angle CDN=\angle ABC=180^\circ-\alpha$ (см. рис. 1а). Далее можно рассуждать различными способами.

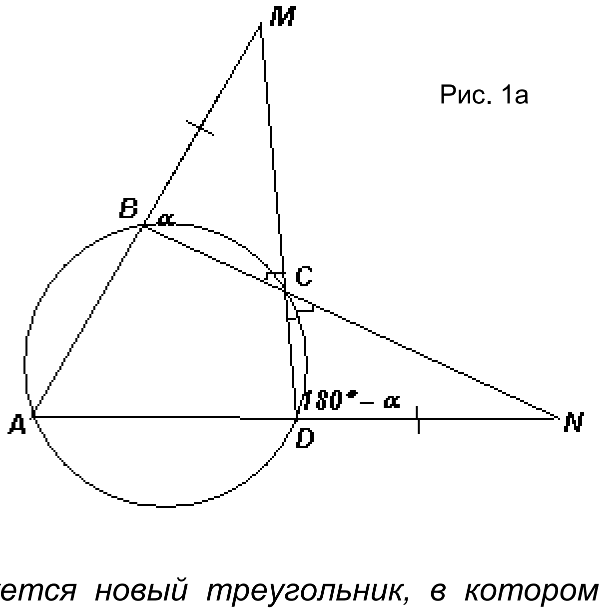


Рис. 1а

<u>Первый способ</u>. По теореме синусов в треугольниках *BCM* и *DCN*: $\frac{CM}{\sin\alpha}=\frac{BM}{\sin\angle BCM}$ и $\frac{CN}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{DN}{\sin\angle DCN}$.

Так как *BM* = *DN*, $\angle BCM=\angle DCN$ и $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$, то *CM* = *CN*.

Отметим, что вместо теоремы синусов можно использовать такой прием: «отрежем» треугольник DCN и «приложим» его к треугольнику BCM, совместив равные отрезки DN и BM (см. рис. 1б). Так как $\angle MBC+\angle CDN=180^\circ$*, то в результате этого образуется новый треугольник, в котором равны углы при вершинах C и C', значит, он – равнобедренный. Следовательно, CM = CN.*

<u>Второй способ</u>. Опишем окружности около треугольников BCM и DCN (см. рис. 1в). Так как $BM = DN$ и $\angle BCM = \angle DCN$, то радиусы этих окружностей равны. Докажем, что вторая точка пересечения этих окружностей лежит на отрезке MN. Действительно, пусть окружность, описанная около треугольника BCM, пересекает MN в точке P. Тогда $\angle NPC = \angle MBC = \alpha$, значит точка P лежит на окружности, описанной около треугольника DCN.

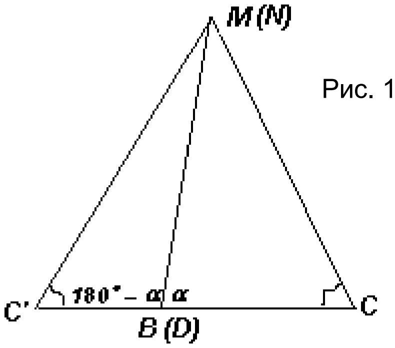


Рис. 1б

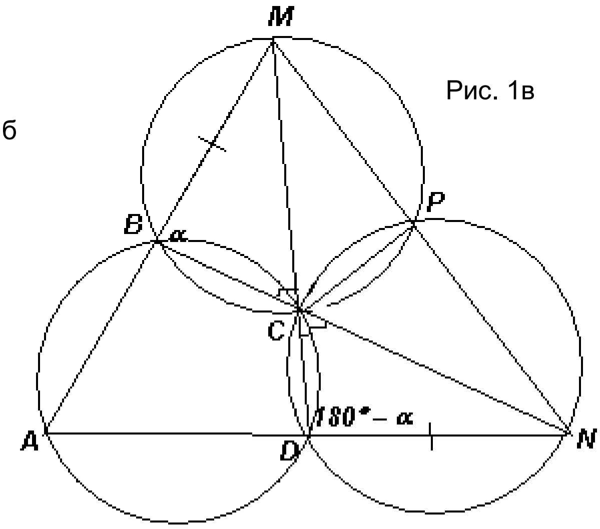


Рис. 1в

Вписанные углы CMN и CNM треугольника MCN опираются на равные дуги равных окружностей, поэтому эти углы равны. Следовательно, $CM = CN$.

Точка P, полученная в этом способе решения, называется точкой Микеля для прямых NA, NB, MA и MD. Через эту точку проходят также окружности, описанные около треугольников ANB и AMD.

2.3. На доске 8×8 в углу расставлены 9 фишек в форме квадрата 3×3. Любая фишка может прыгать через другую фишку на свободную клетку (по горизонтали, вертикали или диагонали). Можно ли за некоторое количество прыжков расставить фишки в форме такого же квадрата в каком-либо другом углу доски?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что фишки стоят в левом нижнем углу доски. Докажем, что в правых углах доски поставить фишки невозможно. Покрасим вертикали доски в черный и белый цвета, чередуя их (иначе говоря, «матрасиком», см. рис. 2). Заметим, что любой прыжок фишки не изменяет цвета вертикали, в которой она стояла. Изначально 6 фишек стояли в «черных» вертикалях, а 3 фишки – в «белых», а в конечной расстановке должно быть наоборот. Значит, такая расстановка невозможна.

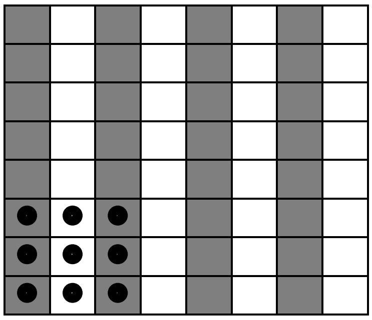


Рис. 2

Для того, чтобы доказать, что фишки нельзя расставить в левом верхнем углу доски, надо «матрасиком» раскрасить горизонтали и провести аналогичное рассуждение.

Отметим, что для доказательства невозможности расстановки фишек в соседних углах доски хватает и «шахматной» раскраски.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin y - \sin x = x - y \\ \sin y - \sin z = z - y \\ x - y + z = \pi \end{cases}$.

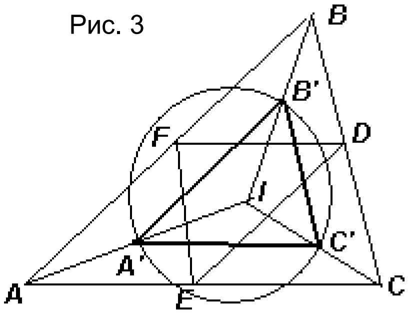
Ответ: $(\pi; \pi; \pi)$.

Решение. Исходная система равносильна системе $\begin{cases} \sin y + y = \sin x + x \\ \sin y + y = \sin z + z \\ x - y + z = \pi \end{cases}$.

Докажем, что функция $f(t) = \sin t + t$ является возрастающей. Действительно, функция $f(t)$ непрерывна и $f'(t) = \cos t + 1 \geq 0$. Кроме того, производная принимает значение 0 при $t = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$, то есть промежутков, на которых $f'(t) = 0$, не существует. Следовательно, каждое свое значение функция $f(t)$ принимает только при одном значении переменной. Тогда $\begin{cases} \sin y + y = \sin x + x \\ \sin y + y = \sin z + z \\ x - y + z = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = z \\ x - y + z = \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \pi.$

3.2. Точки *D*, *E* и *F* – середины сторон *BC*, *AC* и *AB* треугольника *ABC* соответственно. Через центры вписанных окружностей треугольников *AEF*, *BDF* и *CDE* проведена окружность. Докажите, что ее радиус равен радиусу окружности, описанной около треугольника *DEF*.

Рис. 3



Решение. Заметим, что треугольник *DEF* подобен треугольнику *ABC* с коэффициентом *k* = 0,5 (см. рис. 3). Обозначим центры вписанных окружностей треугольников *AEF*, *BDF* и *CDE* через *A*', *B*' и *C*' соответственно, тогда окружность, содержащая эти точки описана около треугольника *A*'*B*'*C*'.

Пусть *I* – центр вписанной окружности треугольника *ABC*. Треугольник *AEF* является образом треугольника *ABC* при гомотетии с центром *A* и коэффициентом *k* = 0,5, поэтому точка *A*' является образом точки *I* при этой гомотетии, значит, *A*' – середина отрезка *AI*. Аналогично, рассмотрев гомотетии с центрами *B* и *C* и коэффициентом *k* = 0,5, получим, что точки *B*' и *C*' – середины отрезков *BI* и *CI* соответственно. Следовательно, отрезки *A*'*B*', *B*'*C*' и *C*'*A*' – средние линии треугольников *AIB*, *BIC* и *CIA* соответственно. Таким образом, треугольник *A*'*B*'*C*' также подобен треугольнику *ABC* с коэффициентом *k* = 0,5. Значит треугольники *A*'*B*'*C*' и *DEF* равны, поэтому равны и радиусы окружностей, описанных около них.

Для решения можно также использовать следующие факты: 1) окружность, описанная около треугольника DEF, является окружностью девяти точек треугольника ABC; 2) стороны треугольника DEF соответственно параллельны сторонам треугольника ABC, так как равны радиусы вписанных окружностей треугольников AEF, BDF и CDE.

3.3. На столе выложены в ряд 64 гирьки, причем масса двух любых соседних гирек отличается на 1 г. Требуется разложить гирьки на две кучки с равными массами и равным количеством гирь. Всегда ли это удастся?

Ответ: всегда.

Решение. Разобьем все гири на четверки гирь, стоящих подряд. Рассмотрим любую из этих четверок. Пусть масса первой гири равна *m*, тогда возможны следующие варианты масс четырех гирь (в граммах):

1) *m*, (*m* + 1), (*m* + 2), (*m* + 3) или *m*, (*m* –1), (*m* – 2), (*m* – 3);
2) *m*, (*m* + 1), (*m* + 2), (*m* + 1) или *m*, (*m* –1), (*m* – 2), (*m* – 1);
3) *m*, (*m* + 1), *m*, (*m* + 1) или *m*, (*m* –1), *m*, (*m* – 1);
4) *m*, (*m* + 1), *m*, (*m* – 1) или *m*, (*m* –1), *m*, (*m* + 1).

В каждом из случаев четверка гирь разбивается на две пары с равной суммой масс. Действительно: 1), 3) I + IV = II + III; 2), 4) I + III = II + IV (римскими цифрами обозначены массы гирь по порядку).

Следовательно, из каждой четверки можно положить две гири в одну кучку, а две другие – в другую кучку. Разбиение, осуществленное таким образом, будет искомым.

Объяснить, что любая четверка гирь, стоящих подряд, разбивается на две пары с равными суммами масс можно и без разбора различных случаев: положим первые две гири в разные кучки (большую – в первую кучку, а меньшую – во вторую) и следующие две гири также положим в разные кучки, но наоборот (меньшую – в первую кучку, а большую – во вторую). Так как модуль разности между массами первой и второй гирь равен модулю разности между массами третьей и четвертой гирь, то такое разбиение будет искомым.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Существуют ли такие две функции с наименьшими положительными периодами 2 и 6, что их сумма имеет наименьший положительный период 3?

Ответ: да, существуют.

Решение. Пусть, например, $f(x) = \cos\frac{2}{3}\pi x + \cos\pi x$, $g(x) = -\cos\pi x$, тогда $h(x)$ = $f(x) + g(x) = \cos\frac{2}{3}\pi x$. Каждая из этих функций определена на множестве *R*.

Наименьший положительный период функции $g(x)$ равен $\frac{2\pi}{\pi}$ = 2, а наименьший положительный период функции $h(x)$ равен $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi}$ = 3. Докажем, что наименьший положительный период функции $f(x)$ равен 6.

Действительно, число 6 кратно 3 и 2, поэтому является как периодом функции $y = \cos\frac{2}{3}\pi x$, так и периодом функции $y = \cos\pi x$, значит, является и периодом их суммы.

Предположим, что существует такое число *T*, что 0 < *T* < 6, которое также является периодом функции $f(x)$. Тогда для всех действительных значений *x* должно выполняться равенство $\cos\frac{2}{3}\pi(x+T) + \cos\pi(x+T)$ = $\cos\frac{2}{3}\pi x + \cos\pi x$. При *x* = 0 получим: $\cos\frac{2}{3}\pi T + \cos\pi T$ = 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{2}{3}\pi T = 1, \\ \cos\pi T = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\pi T = 2\pi k,\ k \in Z, \\ \pi T = 2\pi n,\ n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = 3k,\ k \in Z, \\ T = 2n,\ n \in Z \end{cases}$. Следовательно, 3*k* = 2*n*, то есть *k* – четное число. Пусть *k* = 2*m*, где $m \in Z$, тогда *T* = 6*m*. Если *m* > 0, то 6*m* ≥ 6.

Полученное противоречие показывает, что у функции $f(x)$ не может быть периода, меньшего, чем 6.

Существуют и другие примеры.

4.2. В тетраэдре *ABCD*: *AB* = 8, *BC* = 10, *AC* = 12, *BD* = 15. Известно, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противолежащие грани, пересекаются в одной точке. Найдите длины ребер *DA* и *DC*.

Ответ: *DA* = 18, *DC* = 22,5.

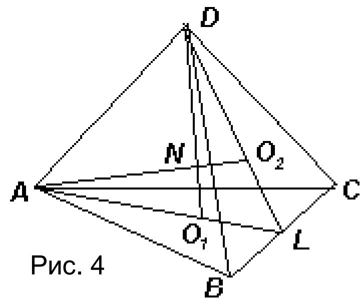


Рис. 4

Решение. Докажем, что если отрезки, соединяющие вершины тетраэдра *ABCD* с центрами вписанных окружностей противолежащих граней пересекаются в одной точке, то равны произведения длин противолежащих ребер тетраэдра, то есть *DC*·*AB* = *DB*·*AC* = *DA*·*BC*.

Действительно, пусть отрезки DO_1 и AO_2, где O_1 и O_2 – центры вписанных окружностей треугольников *ABC* и *DBC* пересекаются в точке *N* (см. рис. 4). Тогда точки *A*, *D*, O_1 и O_2 лежат в одной плоскости, поэтому прямые AO_1 и DO_2 пересекают ребро *BC* в одной и той же точке *L*. Так как *AL* и *DL* – биссектрисы треугольников *ABC* и *DBC*, то по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{CL} = \frac{DB}{DC}$. Следовательно, *DC*·*AB* = *DB*·*AC*.

Заменив, например, AO_2 на BO_3, где O_3 – центр вписанной окружности грани *DBC*, и проведя аналогичное рассуждение, получим требуемое двойное равенство.

Отметим, что справедливо и утверждение, обратное доказанному.

В нашем случае *DB*·*AC* = 180, поэтому *DA* = 18, *DC* = 22,5.

4.3. В равенстве $x^5 + 2x + 3 = p^k$ числа *x* и *k* – натуральные. Может ли число *p* быть простым?

Ответ: нет, не может.

Решение. Предположим, что p – простое число. Заметим, что х = –1 – корень многочлена, стоящего в левой части равенства. Тогда этот многочлен можно представить в виде произведения, то есть записать исходное равенство в виде: $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 3) = p^k$. При $x = 1$ это равенство не выполняется ни при каких простых p и натуральных k, значит, $x \geq 2$. Следовательно, каждый множитель в левой части полученного равенства больше 1, причем второй множитель больше первого.

Если число p – простое, то $x + 1 = p^a$, $x^4 - x^3 + x^2 - x + 3 = p^b$, где a и b – натуральные числа и $b > a$. Тогда $x^4 - x^3 + x^2 - x + 3$ при каком-то натуральном значении x делится на $x + 1$ без остатка, значит, остаток от деления многочлена $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 3$ на $x + 1$ при таком х должен делиться на $x + 1$. По теореме Безу этот остаток равен $P(-1)$. Следовательно, $P(-1) = 7$ делится на $(x + 1)$, то есть $x = 6$.

Подставив $x = 6$ в исходное равенство, получим:$7791 = p^k$, но это невозможно, так как число 7791 не является простым и не является степенью простого (оно делится на 3, но не делится на 9).

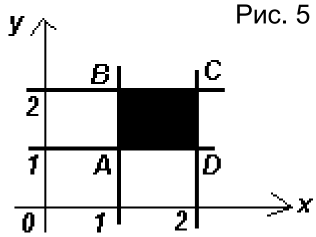
Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Найдите наименьшее значение дроби $\frac{x}{y}$, если $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$.

Ответ: 0,5.

Решение. Из условия задачи следует, что $\sqrt{y-1}=1-\sqrt{x-1} \geq 0$, то есть $\sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$. Аналогично получим, что $1 \leq y \leq 2$. Тогда $0{,}5 \leq \frac{1}{y} \leq 1$, следовательно, $0{,}5 \leq \frac{x}{y} \leq 2$. Значение $\frac{x}{y} = 0{,}5$ достигается при $x = 1$, $y = 2$, удовлетворяющих исходному равенству.

Рис. 5



Оценив значения x и y, можно продолжить решение иначе, используя координатную плоскость. Заметим, что график *заданного уравнения целиком лежит в квадрате ABCD (см. рис. 5). Так как этот квадрат лежит в первой координатной четверти, то выражение $\frac{x}{y}$ принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда $\frac{y}{x} = k$ принимает наибольшее значение. Таким образом, из всех прямых вида $y = kx$, где $k > 0$, надо выбрать прямую, пересекающую квадрат ABCD и имеющую наибольший угловой коэффициент. Этому условию удовлетворяет прямая OB, где B(1; 2). График заданного уравнения содержит точку B, так как при подстановке ее координат в это уравнение получается верное числовое равенство. Следовательно, искомое наименьшее значение равно 0,5.*

5.2. Правильный треугольник со стороной 1 разрезан произвольным образом на равносторонние треугольники, в каждый из которых вписан круг. Найдите сумму площадей этих кругов.

Ответ: $\frac{\pi}{12}$.

Решение. Так как все правильные треугольники подобны, то у них отношение площади вписанного круга к площади треугольника одно и то же, то есть $\frac{S_1'}{S_1} = \frac{S_2'}{S_2} = \ldots = \frac{S_n'}{S_n} = m$, где в знаменателях дробей – площади n треугольников, полученных при разбиении, а в числителях – .площади соответствующих вписанных кругов. Тогда $\sum_{k=1}^{n} S_k' = m \cdot \sum_{k=1}^{n} S_k = mS = S'$, где S и S' – площади исходного треугольника и вписанного в него круга.

Так как радиус круга, вписанного в данный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$, то его площадь равна $\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi}{12}$.

5.3. Сумма цифр натурального числа n равна сумме цифр числа $2n + 1$. Могут ли быть равными суммы цифр чисел $3n – 3$ и $n – 2$?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Воспользуемся тем, что любое натуральное число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9. Следовательно, если у двух чисел одинаковые суммы цифр, то разность этих чисел делится на 9. Тогда из условия задачи следует, что $(2n + 1) – n = n + 1$ делится на 9.

Предположим, что у чисел $3n – 3$ и $n – 2$ также одинаковые суммы цифр. Тогда $(3n – 3) – (n – 2) = 2n – 1$ делится на 9. В этом случае на 9 должно делиться число $(2n – 1) – (n + 1) = n – 2$, но тогда и число $(n + 1) – (n – 2) = 3$ также должно делиться на 9, что невозможно.

Вторую часть рассуждений можно провести иначе. Из того, что $n + 1$ делится на 9, следует, что $n = 9k – 1$, где k – натуральное число. Тогда $3n – 3 = 27k – 6$, а $n – 2 = 9k – 3$. Следовательно, при делении на 9 первое число дает остаток 3, а второе – остаток 6. Поэтому их суммы цифр не могут быть равными.