## 7 класс

### Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

**1.1.** Два автобуса ехали навстречу друг другу с постоянными скоростями. Первый выехал из Москвы в 11 часов утра и прибыл в Ярославль в 16 часов, а второй выехал из Ярославля в 12 часов и прибыл в Москву в 17 часов. В котором часу они встретились?

**Ответ**: в 14 часов.

**Решение**. Так как каждый автобус ехал ровно 5 часов, то за час они проезжают одинаковые расстояния: $\frac{1}{5}S$, где $S$ – длина пути от Москвы до Ярославля. К тому времени, как выехал второй автобус, первый успел проехать $\frac{1}{5}S$. После этого каждый автобус до встречи преодолел расстояние, равное $\frac{2}{5}S$. Следовательно, автобусы встретились через 2 часа после выезда второго, то есть в 14 часов.

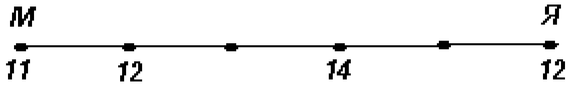
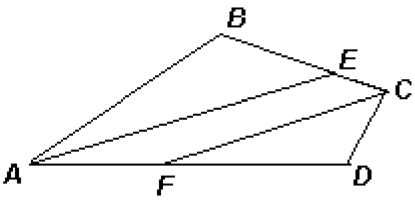


Рис. 1

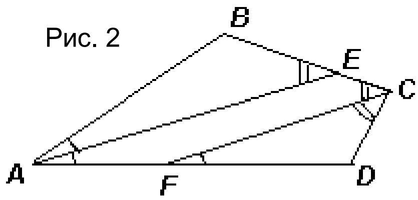
*Это рассуждение можно проиллюстрировать (см. рис. 1).*

**1.2.** В четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы $AE$ и $CF$ углов $A$ и $C$ параллельны (см. рисунок). Докажите, что углы $B$ и $D$ равны.




**Решение**. Из условия задачи и равенства соответственных углов при параллельных прямых следует, что $\angle CFD = \angle EAD = \angle EAB$ и что $\angle BEA = \angle BCF = \angle DCF$ (см. рис. 2). Тогда два угла треугольника $ABE$ соответственно равны двум углам треугольника $CDF$. Следовательно, равны и третьи углы этих треугольников: $\angle ABE = \angle CDF$.

Рис. 2

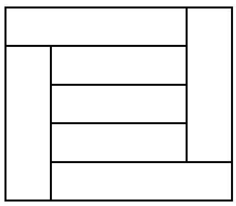



*Можно также использовать свойства других углов при параллельных прямых и секущей.*

**1.3.** Можно ли разрезать квадрат 5×5 на прямоугольники двух видов: 1×4 и 1×3 так, чтобы получилось 7 прямоугольников?

**Ответ**: да, можно.

Рис. 3



**Решение**. Например, см. рис. 3.

*Отметим, что количество прямоугольников каждого вида определяется однозначно, а располагать их можно по-разному. Действительно, пусть $x$ – количество прямоугольников 1×4, тогда прямоугольников 1×3 должно быть $7 - x$. Уравнение $4x + 3(7 - x) = 25$ имеет единственное решение: $x = 4$.*

### Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

**2.1.** Банк «Империал» при снятии денег со счета берет комиссию, состоящую из двух частей: фиксированной оплаты за проведение операции и еще оплаты, пропорциональной снятой сумме. Например, при снятии со счета 5000 рублей вкладчик заплатит 110 рублей, а при снятии 11000 рублей заплатит 230 рублей. Какую комиссию заплатит вкладчик, если он захочет снять со счета 8000 рублей?

**Ответ**: 170 рублей.

**Решение**. Пусть $x$ рублей – фиксированная оплата, а $k$ – коэффициент пропорциональности. Тогда в первом случае вкладчик заплатит $x + 5000k$ рублей, а во втором случае – $(x + 11000k)$ рублей. Следовательно, $\begin{cases} x + 5000k = 110, \\ x + 11000k = 230 \end{cases}$.

Решение этой системы: $k = 0{,}02$; $x = 10$. Значит, при снятии 8000 рублей вкладчик заплатит $10 + 8000 \cdot 0{,}02 = 170$ (р).

**2.2.** В некоторый момент угол между часовой и минутной стрелками равен $\alpha$. Через час он опять равен $\alpha$. Найдите все возможные значения $\alpha$.

**Ответ**: 15° или 165°.

**Решение**. По прошествии часа минутная стрелка вернется в исходное положение, а часовая пройдет $\frac{1}{12}$ часть окружности, то есть повернется на угол, равный 30°. Равенство углов, указанное в условии, означает, что минутная стрелка является либо биссектрисой угла между двумя положениями часовой стрелки (см., например, рис. 4а), либо лучом, дополнительным к этой биссектрисе (см., например, рис. 4б). В первом случае $\alpha$ = 30° : 2 = 15°, а во втором случае $\alpha$ = (360° – 30°) : 2 = 165°.

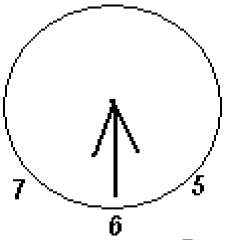


Рис.4а

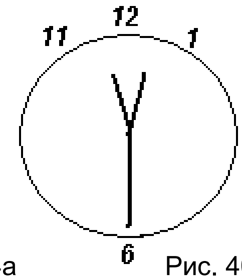


Рис. 4б

**2.3.** Известно, что остаток от деления некоторого простого числа на 60 равен составному числу. Какому?

**Ответ**: 49.

**Решение**. Так как $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, то остаток не может быть кратен числам 2, 3 или 5 (иначе исходное число обладало бы тем же свойством и не могло бы оказаться простым). Так как остаток меньше, чем 60, и является произведением хотя бы двух простых множителей, то он равен $7 \cdot 7 = 49$. Другие варианты невозможны так как уже следующее произведение двух простых чисел: $7 \cdot 11 > 60$.

Ситуация, описанная в условии, возможна. Например, $109 = 60 \cdot 1 + 49$, где 109 – простое число.

**Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).**

**3.1.** Девять чисел таковы, что сумма любых четырех из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительные.

**Решение**. Разобьем данные числа на две группы: пять самых маленьких и четыре самых больших. Обозначим сумму чисел первой группы через $A$, а сумму чисел второй – через $B$, тогда, по условию $A > B$. Пусть какое-то из данных чисел $x \leq 0$, тогда оно из первой группы. Перенеся его во вторую группу, заметим, что от этого сумма $A$ не уменьшилась, а сумма $B$ – не увеличилась. Таким образом, знак неравенства не изменился, а это противоречит условию задачи. Следовательно, все данные числа положительные.

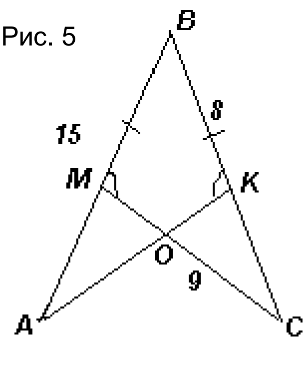
*Похожее рассуждение можно записать алгебраически. Упорядочим данные числа по возрастанию:* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_8 \leq a_9$. *По условию* $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > a_6 + a_7 + a_8 + a_9$. *Пусть* $a_1 \leq 0$, *тогда* $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_1$, *что противоречит условию задачи. А так как остальные числа не меньше, чем* $a_1$, *то они заведомо положительные.*

**3.2.** На сторонах угла $ABC$ отмечены точки $M$ и $K$ так, что углы $BMC$ и $BKA$ равны, $BM = BK$, $AB = 15$, $BK = 8$, $CM = 9$. Найдите периметр треугольника $COK$, где $O$ – точка пересечения прямых $AK$ и $CM$.

**Ответ**: 16.

**Решение**. У треугольников $ABK$ и $CBM$ – общий угол $B$, поэтому из условия задачи следует, что эти треугольники равны (по стороне и прилежащим углам, см. рис. 5). Тогда $\angle BCM = \angle BAK$ и $CB = AB = 15$, значит, $CK = AM = 7$.

Рис. 5




Учитывая также, что $\angle CKO = \angle AMO$ (они дополняют равные углы до развернутых), получим, что $\Delta COK = \Delta AOM$ (по стороне и прилежащим углам). Следовательно, $OK = OM$. Таким образом, $P_{\Delta COK} = CK + CO + OK = CK + CO + OM = CK + CM = 16$.

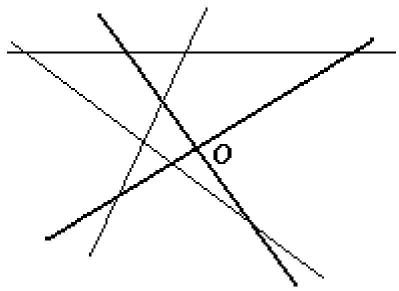
**3.3.** В некоторой школе в каждом из 20 классов выбрали совет из 5 учеников. Петя оказался единственным мальчиком, избранным в совет класса вместе с четырьмя девочками. Он заметил, что еще в 15 классах девочек выбрали больше, чем мальчиков, хотя в целом по школе мальчиков и девочек выбрано поровну. Сколько мальчиков и сколько девочек в советах четырех оставшихся классов (в сумме)?

**Ответ**: 19 мальчиков и одна девочка.

**Решение**. Всего в советы было выбрано $5 \cdot 20 = 100$ человек. Девочек – половина, то есть 50. Если в классе было выбрано больше девочек, чем мальчиков, то девочек выбрано не менее трех. Значит, в 15 классах было выбрано не менее, чем 45 девочек. Еще 4 девочки было выбрано в Петином классе. Так как Петя – единственный мальчик, оказавшийся в совете вместе с четырьмя девочками, то больше ни в одном из классов не могли быть выбраны 4 девочки. Значит, в 16 классах выбрано ровно 49 девочек. Следовательно, в оставшихся четырех классах выбрали 19 мальчиков и одну девочку.

**Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).**

**4.1.** На листе бумаги были построены система координат (выделена жирно) и графики трех функций: $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx + a$. После этого стерли обозначения и направления осей, а сам лист как-то повернули (см. рисунок). Укажите на рисунке ось абсцисс и ее направление. *Ответ обоснуйте*.




**Ответ**: см. рис. 6.

**Решение**. <u>Первый способ</u>. Так как графики попарно пересекаются, то среди чисел $a$, $b$ и $c$ нет одинаковых. Кроме того, коэффициенты в уравнениях переставлены «по циклу», значит, без ограничения общности можно считать, что $a < b < c$.

Найдем абсциссы точек попарного пересечения графиков и определим их знаки: $x_1 = \frac{c-b}{a-b} < 0$, $x_2 = \frac{a-c}{b-c} > 0$, $x_3 = \frac{b-a}{c-a} > 0$. Выберем полуплоскость, ограниченную одной из осей, в которой располагаются ровно две точки пересечения графиков с положительными абсциссами. Из четырех полуплоскостей она определяется однозначно. Эта полуплоскость ограничена осью ординат и именно в ней лежит положительная полуось абсцисс.

<u>Второй способ</u>. Пронумеруем графики функций, например, так: (1) $y = ax + b$, (2) $y = bx + c$, (3) $y = cx + a$ (см. рис. 6). Допустим, что направление на северо-запад является положительным направлением оси ординат. Тогда точки пересечения графиков с этой осью имеют координаты $(0; b)$, $(0; c)$ и $(0; a)$ соответственно, причем $a > b > 0 > c$. Точки пересечения графиков с другой осью имеют координаты $(-\frac{b}{a}; 0)$, $(-\frac{c}{b}; 0)$, $(-\frac{a}{c}; 0)$, где $-\frac{b}{a} < 0$, $-\frac{c}{b} > 0$, $-\frac{a}{c} > 0$. Отсюда следует, что направление на юго-запад – это положительное направление оси абсцисс, но это противоречит тому, что положительное направление оси абсцисс должно совмещаться с положительным направлением оси ординат поворотом вокруг начала координат против часовой стрелки.

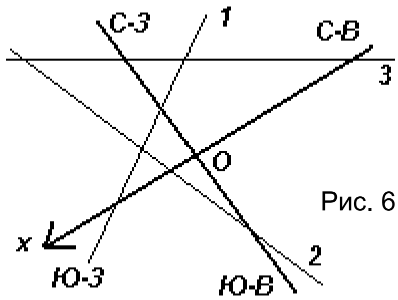



Рис. 6

Если же предположить, что положительное направление оси ординат – на юго-восток, то $a < b < 0 < c$, поэтому знаки рассмотренных абсцисс не изменятся и противоречия не будет. Тем самым ось абсцисс будет направлена на юго-запад.

Два остальных случая возможного направления оси ординат (северо-восток и юго-запад) рассматриваются аналогично и приводят к противоречиям.

**4.2.** На гипотенузе $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ выбрана такая точка $D$, что $BD = BC$, а на катете $BC$ – такая точка $E$, что $DE = BE$. Докажите, что $AD + CE = DE$.

**Решение**. На продолжении катета $BC$ за точку $C$ отложим отрезок $CF$, равный $DA$ (см. рис. 7). Тогда $BA = BF$, значит, $\angle BAF = \angle BFA$. Следовательно, равны треугольники $DAF$ и $CFA$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $DF = CA$. Тогда равны и треугольники $BDF$ и $ACB$ (по трем сторонам), значит, $\angle BDF = \angle ACB = 90°$. Тогда, из равенства $DE = BE$ следует, что $DE$ – медиана прямоугольного треугольника $BDF$, проведенная к гипотенузе, то есть $DE = BE = FE = CF + CE = AD + CE$, что и требовалось.

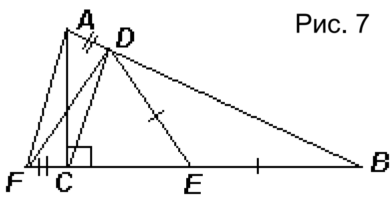


Рис. 7

**4.3.** Верно ли, что изменив одну цифру в десятичной записи любого натурального числа, можно получить простое число?

**Ответ**: нет, неверно.

*Существует много различных контрпримеров. Проще всего рассматривать числа, оканчивающиеся на ноль, для чего удобно использовать понятие факториала натурального числа. (Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.) Приведем три различных контрпримера с соответствующими пояснениями.*

**Решение**. 1) Рассмотрим число 10!. Оно делится на 10, поэтому если изменить любую цифру, кроме последней, то делимость на 10 сохранится. Если последнюю цифру заменить на любую из цифр от 2 до 9, то полученное число будет равно $10! + k$ ($k$ – последняя цифра). Тогда оно будет делиться на $k$, так как в рассматриваемое произведение входят все цифры. А если последнюю цифру заменить на 1, то получится число $10! + 1 = 3628801$, которое делится на 11 (сумма его цифр, стоящих на нечетных местах, равна сумме цифр, стоящих на четных местах). Таким образом, и в этом случае число не будет простым.

2) Рассмотрим число $(10!)^3$. Изменение любой цифры, кроме последней, а также замена последней цифры на любую цифру от 2 до 9 не дает простого числа по соображениям, изложенным выше. А если последнюю цифру заменить на 1, то получится число $(10!)^3 + 1$, которое можно разложить на множители по формуле суммы кубов: $(10!)^3 + 1 = (10! + 1)((10!)^2 - 10! + 1)$. Значит, и в этом случае число не будет простым.

3) Рассмотрим число $19! + 10$. Бесполезность изменения любой его цифры, кроме последней, уже объяснена выше, а замена последней цифры на 1, 2, ..., 9 приведет к тому, что полученные числа будут делиться на 11, 12, ..., 19 соответственно, то есть не будут простыми.