9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Решите уравнение: $x(x + 1) = 2014\cdot2015$.

Ответ: 2014; –2015.

Решение. Так как каждая часть уравнения представляет собой произведение двух последовательных чисел, то оба корня подбираются исходя из предположения, что они целые, а их модули могут быть равны 2014 или 2015. Данное уравнение – квадратное, поэтому имеет не более двух корней.

Если один корень уже подобран, то второй может быть найден по теореме Виета.

1.2. Из четырех палочек сложен контур параллелограмма. Обязательно ли из них можно сложить контур треугольника (одна из сторон треугольника складывается из двух палочек)?

Ответ: нет, не обязательно.

Решение. Пусть из четырех одинаковых палочек длины a сложен контур ромба. Тогда треугольник из них сложить нельзя, так как треугольника со сторонами a, a и $2a$ не существует.

1.3. Три пирата нашли клад, состоящий из 240 золотых слитков общей стоимостью 360 долларов. Стоимость каждого слитка известна и выражается целым числом долларов. Может ли оказаться так, что добычу нельзя разделить между пиратами поровну, не переплавляя слитки?

Ответ: да, может.

Решение. Пусть один из слитков стоит 121 доллар, а каждый из остальных слитков стоит 1 доллар (таких слитков будет 239). Так как каждому пирату должно достаться слитков ровно на 120 долларов, то в этом случае разделить добычу поровну будет невозможно.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Марья Петровна идет по дороге со скоростью 4 км/ч. Увидев пенек, она садится на него и отдыхает одно и то же целое число минут. Михаил Потапович идет по той же дороге со скоростью 5 км/ч, зато сидит на каждом пеньке в два раза дольше, чем Марья Петровна. Вышли и пришли они одновременно. Длина дороги – 11 км. Сколько на ней могло быть пеньков?

Ответ: 1, 3, 11 или 33 пенька.

Решение. Марья Петровна преодолевает указанную дистанцию за $\frac{11}{4}$ часа, а Михаил Потапович – за $\frac{11}{5}$ часа. Следовательно, Марья Петровна отдыхает на $\frac{11}{4}-\frac{11}{5}=\frac{11}{20}$ (ч) больше, что составляет 33 минуты.

Так как на каждом пеньке Марья Петровна сидит целое число минут и количество пеньков – целое, то на каждом пеньке она могла сидеть 33, 11, 3 или 1 минуту, что соответствует 1, 3, 11 или 33 пенькам.

2.2. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, $\angle BAC = 35°$. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CD. Найдите угол AB_1C.

Ответ: 125°.

Решение. Из условия задачи следует, что точка D – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Кроме того, из симметрии $DB_1 = DB$, поэтому точка B_1 лежит на этой окружности (см. рис. 1). Тогда $\angle AB_1C = 180° - \angle ABC = 90° + \angle BAC = 125°$.

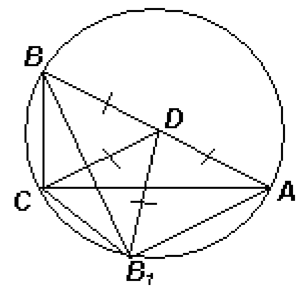


Рис. 1

2.3. Остаток от деления натурального числа X на 26 равен неполному частному, остаток от деления X на 29 также равен неполному частному. Найдите все такие X.

Ответ: 270; 540.

Решение. Из условия задачи следует, что $\begin{cases} X = 26m + m, \\ X = 29n + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 27m, \\ X = 30n \end{cases}$. Следовательно, $27m = 30n \Leftrightarrow 9m = 10n$, значит, m кратно 10. Так как остаток при делении на 26 не больше, чем 25, то $m = 10$ или $m = 20$. Таким образом, $X = 270$ или $X = 540$.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Известно, что $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{a+c-b} = \frac{c}{a+b-c}$. Какие значения может принимать выражение $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$?

Ответ: –1 или 8.

Решение. Перепишем условие в виде: $\frac{b+c-a}{a} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{a+b-c}{c} = x$, тогда $b+c-a = ax$, $a+c-b = bx$, $a+b-c = cx$. Сложим полученные равенства почленно: $a+b+c = (a+b+c)x \Leftrightarrow (a+b+c)(x-1) = 0$. Возможны два случая:

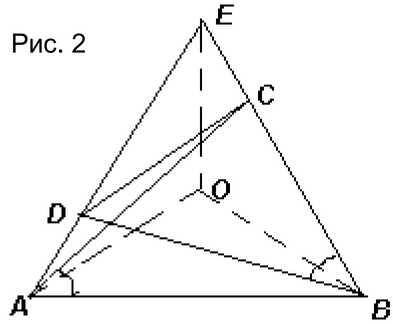
1) $a+b+c=0$, тогда $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{(-c)(-a)(-b)}{abc}$ = –1;

2) $x=1$, тогда $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{2c \cdot 2a \cdot 2b}{abc}$ = 8.

Можно также провести аналогичное рассуждение, не «переворачивая» дроби, заданные в условии.

3.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle DAB = \angle ABC = 60^\circ$ и $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что $AD + CB = AB$.

Рис. 2



Решение. Продлим стороны AD и BC до их пересечения в некоторой точке E, тогда треугольник ABE – равносторонний (см. рис. 2). Докажем, что $BC = ED$. Это можно сделать различными способами.

<u>Первый способ</u>. В треугольниках ABC и BED: $AB = BE$; $\angle CAB = \angle DBE$, $\angle ABC = 60^\circ = \angle BED$. Таким образом, $\Delta ABC = \Delta BED$ (по второму признаку). Следовательно, $BC = ED$.

<u>Второй способ</u>. Пусть O – центр треугольника ABE. При повороте с центром O на угол 120° против часовой стрелки образами вершин A и B являются вершины B и E соответственно, тогда образом луча AC – луч BD (из равенства $\angle CAB = \angle CBD$). Так как образом стороны BE при этом повороте является сторона EA, то образом точки C является точка D. Следовательно, $BC = ED$.

Таким образом, $AD + CB = AD + ED = AE = AB$.

Отметим, что при рассуждениях во втором способе было использовано основное свойство взаимно однозначных отображений (в частности, движений): образ пересечения равен пересечению образов.

3.3. Петя нашел сумму всех нечетных делителей некоторого четного числа (включая 1), а Вася – сумму всех четных делителей этого же числа (включая само число). Может ли произведение двух найденных чисел быть точным квадратом?

Ответ: нет, не может.

Решение. Пусть 2^n – наибольшая степень двойки, на которую делится данное число. Если Петя получил набор его нечетных делителей a_1, a_2, … , a_m, то в Васином наборе четных делителей должны быть все числа, которые получаются из всех нечетных делителей умножением на каждую степень двойки от 2^1 до 2^n. Таким образом, все числа из Васиного набора имеют вид: $2^k \cdot a_i$, где $1 \le k \le n$, $1 \le i \le m$.

Обозначим сумму Петиных чисел через A. Тогда сумма Васиных чисел равна $A\cdot(2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n)$. Следовательно, произведение Петиной и Васиной сумм равно $A^2\cdot(2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n)$. Для того, чтобы это число являлось точным квадратом, необходимо, чтобы выражение в скобках являлось точным квадратом. Но записанная сумма степеней двойки при делении на 4 дает остаток 2, то есть она делится на 2, но не делится на 4, поэтому точным квадратом являться не может.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Докажите, что для положительных значений a, b и c выполняется неравенство $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Решение. Докажем, что при $x > 0$ и $y > 0$ справедливо неравенство $\frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}$.

Действительно, $\frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{x+y}{2xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2xy} \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$.

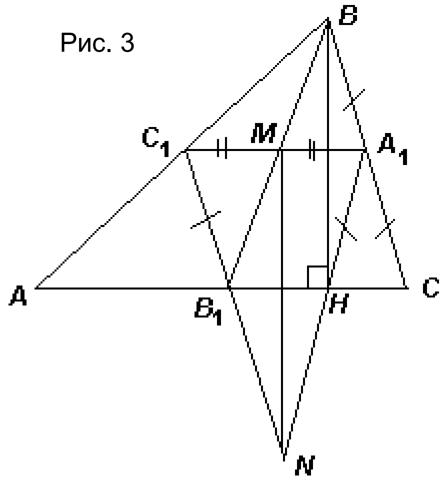
Теперь запишем три однотипных верных неравенства: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \le \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$, $\frac{b+c}{b^2+c^2} \le \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}$, $\frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2}$ и сложим их почленно. Получим доказываемое неравенство.

4.2. В треугольнике ABC проведены высота BH, медиана BB_1 и средняя линия A_1C_1 (A_1 лежит на стороне BC, C_1 – на стороне AB). Прямые A_1C_1 и BB_1 пересекаются в точке M, а прямые C_1B_1 и A_1H – в точке N. Докажите, что прямые MN и BH параллельны.

Решение. Так как $A_1C_1 \parallel AC$, то M – середина отрезка A_1C_1 (см. рис. 3). Кроме того, $C_1B_1 = \frac{1}{2}BC = A_1C = A_1H$, поскольку HA_1 – медиана прямоугольного треугольника BHC. Таким образом, $C_1B_1HA_1$ – равнобокая трапеция, откуда следует, что треугольник A_1NC_1 – равнобедренный. Поэтому его медиана NM является и высотой. Значит, $MN \perp AC$, то есть $MN \parallel BH$.

Доказать, что трапеция $C_1B_1HA_1$ – равнобокая, можно и по-другому. Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности (окружности девяти точек треугольника ABC), а любая вписанная трапеция – равнобокая.

Рис. 3



4.3. В строку выписаны 40 знаков: 20 крестиков и 20 ноликов. За один ход можно поменять местами любые два соседних знака. За какое наименьшее количество ходов можно гарантированно добиться того, чтобы какие-то 20 стоящих подряд знаков оказались крестиками?

Ответ: за 200 ходов.

Решение. Для того, чтобы 20 крестиков стояли подряд, требуется, чтобы все нолики стояли с краев (возможно, все с одного края). Пусть есть строка с произвольной расстановкой крестиков и ноликов. Будем делать разрешенные ходы, перемещая нолики к правому или к левому краю так, чтобы правее или левее них уже не было крестиков.

Для этого, сначала выберем самый правый и самый левый нолики. Для того, чтобы один из них оказался с краю, требуется не более, чем 10 ходов, так как либо слева от самого левого, либо справа от самого правого нолика стоит не более, чем 10 крестиков.

Далее, возьмем самый правый и самый левый нолик из оставшихся 19. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более, чем 10 ходов, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более, чем $20 \cdot 10 = 200$ ходов.

Приведем пример изначальной расстановки для случая, когда меньшего количества ходов не хватит. Пусть в ряд стоят 10 крестиков, затем 20 ноликов, а затем еще 10 крестиков. В этом случае для перемещения каждого нолика к краю потребуется ровно 10 ходов.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Существует ли такое *x*, что $\sqrt{x+9}+\sqrt{x}+\sqrt{x-9} = 7$?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Левая часть равенства имеет смысл при $x \ge 9$. Поэтому $\sqrt{x} \ge \sqrt{9} = 3$; $\sqrt{x+9} \ge \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. Тогда $\sqrt{x+9}+\sqrt{x}+\sqrt{x-9} \ge 3 + 3\sqrt{2} + 0 > 3 + 3 \cdot 1{,}4 = 7{,}2 > 7$..

5.2. На доске был изображен пятиугольник, вписанный в окружность. Маша измерила его углы и у нее получилось, что они равны 80°, 90°, 100°, 130° и 140° (именно в таком порядке). Не ошиблась ли Маша?

Ответ: Маша, конечно, ошиблась.

Решение. Пусть *ABCDE* – данный четырехугольник, в котором углы *A*, *B*. *C*, *D* и *E* соответственно равны 80°, 90°, 100°, 130° и 140° (см. рис. 4). Далее можно рассуждать по-разному.

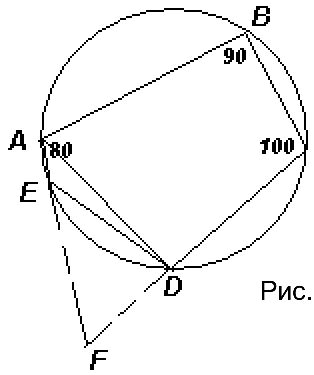


Рис. 4

Первый способ. Проведем диагональ *AD*, тогда четырехугольник *ABCD* также вписанный, поэтому $\angle BAD = 180° - \angle BCD = 80°$. Таким образом, $\angle BAD = \angle BAE$, что невозможно.

Второй способ. Продлим отрезок *AE* до пересечения с прямой *CD* в точке *F*. В четырехугольнике *ABCF*: $\angle BAF + \angle BCD = 180°$, значит, этот четырехугольник – вписанный, то есть точка *F* лежит на той же окружности, что невозможно.

Существуют и другие решения.

5.3. Трое играют в настольный теннис на «вылет», то есть игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге Никанор сыграл 10 партий, Филимон – 15, а Агафон – 17. Кто из них проиграл во второй партии?

Ответ: Никанор.

Решение. Всего было сыграно (10 + 15 + 17) : 2 = 21 партий. Заметим, что любой из мальчиков не мог пропускать две или более партий подряд. Значит, Никанор играл все партии с четным номером. Так как он не играл в третьей партии, то вторую партию он проиграл.