10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Известно, что $b - c > a$ и $a \neq 0$. Обязательно ли уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?

Ответ: нет, не обязательно.

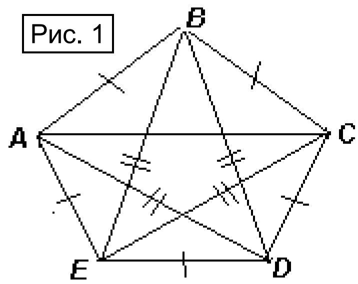
Решение. Например, $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$ удовлетворяют условию задачи, так как $1 - (-1) > 1$, но уравнение $-x^2 + x - 1 = 0$ корней не имеет.

Отметим, что если добавить условие $a + c \geq 0$, то данное уравнение будет иметь два корня. Действительно, тогда $b > a + c \geq 0$, поэтому $b^2 > (a + c)^2 \geq 4ac$, то есть дискриминант данного уравнения $D = b^2 - 4ac > 0$.

1.2. В выпуклом пятиугольнике равны все стороны, а также равны четыре из пяти диагоналей. Следует ли из этого условия, что пятиугольник – правильный?

Ответ: да, следует.

Рис. 1



Решение. Пусть пятиугольник $ABCDE$ удовлетворяет условию задачи (равны между собой все диагонали, кроме AC, см. рис. 1). Тогда треугольники AED и BCD равны (по трем сторонам), значит, $\angle AED = \angle BCD$. Кроме того, треугольник CDE – равнобедренный, поэтому $\angle CED = \angle ECD$. Тогда $\angle AEC = \angle BCE$.

Следовательно, равны треугольники ACE и BEA (по двум сторонам и углу между ними), значит, $AC = BE$. Таким образом, в пятиугольнике равны все диагонали и все стороны, поэтому равны и все углы, то есть пятиугольник – правильный.

Отметим, что условие равенства всех сторон – избыточное, достаточно равенства четырех (в данном случае, можно было исключить AB). Тот факт, что AB имеет ту же длину, что и остальные стороны, можно получить из равенства треугольников BAE и ABC.

1.3. Найдите все натуральные n и k, удовлетворяющие равенству: $k^5 + 5n^4 = 81k$.

Ответ: $n = 2$; $k = 1$.

Решение. Запишем данное равенство в другом виде: $5n^4 = k(9 + k^2)(3 + k)(3 - k)$. Левая часть этого равенства положительна при любом натуральном значении n, значит, положительной должна быть и правая часть. Следовательно, достаточно проверить два натуральных значения k: $k = 1$ и $k = 2$.

1) Если $k = 1$, то $5n^4 = 80$, то есть $n = 2$.

2) Если $k = 2$, то $5n^4 = 130$. Таких натуральных n не существует.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Существует ли такое натуральное n, что $\sqrt[n]{17\sqrt{5}+38} + \sqrt[n]{17\sqrt{5}-38} = 2\sqrt{5}$?

Ответ: да, существует.

Решение. Докажем, что данное равенство верно при $n = 3$.

<u>Первый способ</u>. Пусть $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} + \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} = x$. Возведем обе части равенства в куб, воспользовавшись формулой $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ и заменив получающуюся сумму кубических корней на x.

Получим: $x^3 = 34\sqrt{5} + 3x \cdot \sqrt[3]{\left(17\sqrt{5}\right)^2 - 38^2} \Leftrightarrow x^3 = 34\sqrt{5} - 3x \cdot \sqrt[3]{1445 - 1444} \Leftrightarrow x^3 = 34\sqrt{5} + 3x$. Проверкой убеждаемся, что $x = 2\sqrt{5}$ является корнем полученного уравнения.

При замене суммы корней на x было получено следствие составленного уравнения, поэтому надо доказать, что полученный корень – единственный (тогда он не может оказаться «посторонним»). Так как $x^3 - 3x - 34\sqrt{5} = \left(x - 2\sqrt{5}\right)\left(x^2 + 2x\sqrt{5} + 17\right)$, а второй множитель – квадратный трехчлен, не имеющий корней, то это действительно так.

Следовательно, исходное равенство верно при $n = 3$.

Проверку единственности полученного корня можно осуществить иначе: исследовав функцию $y = x^3 - 3x$ на монотонность и экстремумы, показать, что значение $y = 34\sqrt{5}$ достигается только при одном значении аргумента.

Второй способ. Предположим, что $\sqrt[3]{17\sqrt{5} \pm 38} = \sqrt{5} \pm a$, где a – рациональное число. Тогда $17\sqrt{5} \pm 38 = \left(\sqrt{5} \pm a\right)^3 \Leftrightarrow 17\sqrt{5} \pm 38 = 5\sqrt{5} \pm 15a + 3a^2\sqrt{5} \pm a^3$.

Следовательно, $\begin{cases} a^3 + 15a = 38, \\ 3a^2 + 5 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$. Таким образом, $\sqrt[3]{17\sqrt{5} \pm 38} = \sqrt{5} \pm 2$, тогда при $n = 3$ исходное равенство верно.

2.2. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* отмечены середины противоположных сторон *BC* и *AD* – точки *M* и *N*. Диагональ *AC* проходит через середину отрезка *MN*. Найдите площадь *ABCD*, если площадь треугольника *ABC* равна *S*.

Ответ: 2*S*.

Решение. Пусть *AC* и *MN* пересекаются в точке *O* (см. рис. 2 а, б). Докажем, что $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABC}$, тогда $S_{ABCD} = 2S$. Можно рассуждать по разному.

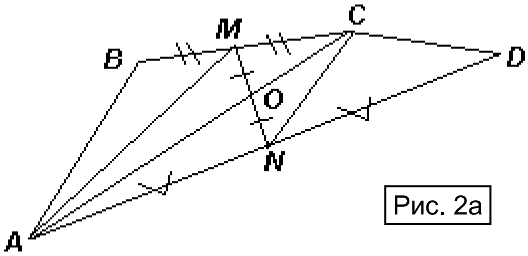


Рис. 2а

Первый способ. Проведем *AM* и *CN* (см. рис. 2а).. Так как *AO* – медиана треугольника *AMN*, то $S_{\Delta AON} = S_{\Delta AOM}$. Аналогично, $S_{\Delta CON} = S_{\Delta COM}$. Следовательно, $S_{\Delta ANC} = S_{\Delta AMC}$. Так как *AM* и *CN* – медианы треугольников *ABC* и *ADC* соответственно, то $S_{\Delta ADC} = 2S_{\Delta ANC} = 2S_{\Delta AMC} = S_{\Delta ABC} = S$.

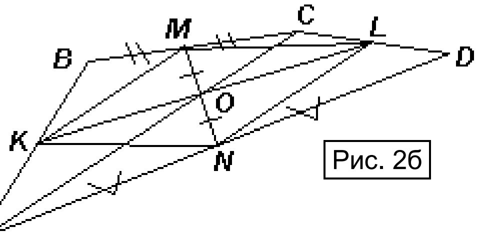
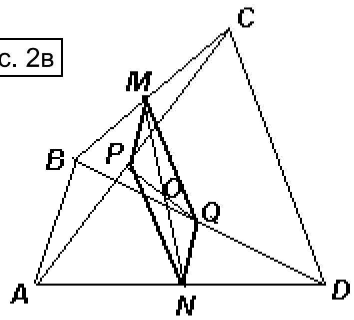


Рис. 2б

Второй способ. Пусть *K* и *L* – середины сторон *AB* и *CD*, тогда *KMLN* – параллелограмм, поэтому отрезок *KL* содержит точку *O* (см. рис. 2б). Так как *KL* – средняя линия треугольника *ABC*, то $S_{\Delta KOM} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}S$. Аналогично, $S_{\Delta NOL} = \frac{1}{4}S_{\Delta ADC}$. Так как $S_{\Delta NOL} = S_{\Delta KOM}$, то $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABC} = S$.

Отметим, что KMLN – это параллелограмм Вариньона, площадь которого равна половине площади ABCD.

Рис. 2в



Третий способ. Воспользуемся тем, что в любом выпуклом четырехугольнике *ABCD* середины *M* и *N* противолежащих сторон и середины *P* и *Q* диагоналей являются вершинами параллелограмма (см. рис. 2в). Следовательно, середина *O* отрезка *MN* является также и серединой отрезка *PQ*.

Так как в нашем случае точка *O* лежит на диагонали *AC*, то середина *Q* диагонали *BD* также лежит на *AC* (см. рис. 2г). Тогда $S_{\Delta ADQ} = S_{\Delta ABQ}$ и $S_{\Delta CDQ} = S_{\Delta CBQ}$. Следовательно, $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABC} = S$.

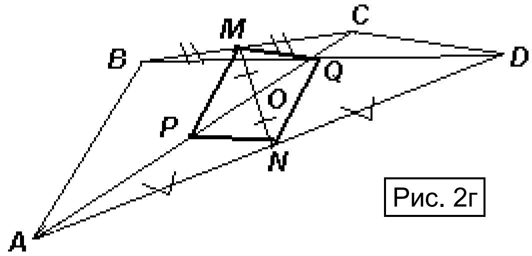


Рис. 2г

2.3. Девять лыжников ушли со старта по очереди и прошли дистанцию – каждый со своей постоянной скоростью и финишировали в разное время. Могло ли оказаться так, что каждый лыжник участвовал ровно в четырёх обгонах? (*В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника – тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют*.)

Ответ: нет, не могло.

Решение. Предположим, что каждый лыжник участвовал ровно в четырех обгонах. Пронумеруем лыжников в том порядке, в котором они стартовали. Так как скорость каждого лыжника постоянна, то любая пара лыжников могла участвовать не более, чем в одном обгоне. Кроме того, если лыжник не участвует в обгоне, то этот обгон не меняет его позиции (остаются неизменными количества лыжников, идущих впереди и позади него).

Рассмотрим первого лыжника: при любом обгоне он ухудшал свою позицию, значит, он финишировал пятым. Рассмотрим девятого лыжника: при любом обгоне он улучшал свою позицию, значит, он также финишировал пятым. Противоречие.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Существует ли такая функция $f(x)$, определенная для всех действительных чисел, что $f(\sin x)+f(\cos x)=\sin x$?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Пусть существует $f(x)$, удовлетворяющая условию. Тогда:

1) $f(\sin 0)+f(\cos 0)=\sin 0$, то есть, $f(0)+f(1)=0$;

2) $f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}$, то есть, $f(0)+f(1)=1$.

Получили противоречие. Следовательно, указанной функции не существует.

3.2. Параллелограмм и квадрат расположены так, что вершины квадрата лежат на сторонах параллелограмма (по одной вершине на каждой стороне). Из каждой вершины параллелограмма проведена прямая перпендикулярная ближайшей стороне квадрата. Докажите, что точки попарного пересечения этих прямых также являются вершинами квадрата.

Решение. Пусть вершины *E*, *F*, *G* и *H* квадрата *EFGH* лежат на сторонах *AB*, *BC*, *CD* и *DA* параллелограмма *ABCD* соответственно (см. рис. 3). Перпендикуляры, проведенные из вершин *A*, *B*, *C* и *D*, обозначены через *a*, *b*, *c* и *d* соответственно.

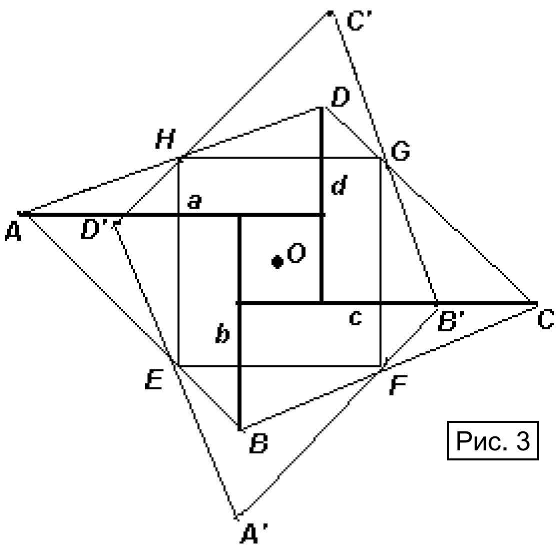


Рис. 3

Пусть *O* – центр квадрата *EFGH*. Для доказательства требуемого утверждения достаточно доказать, что повороте с центром *O* на 90° вершины получившегося четырехугольника переходят друг в друга.

Рассмотрим такой поворот, например, против часовой стрелки. Данный квадрат перейдет в себя, а образом данного параллелограмма будет параллелограмм *A*'*B*'*C*'*D*'. При этом, *A*'*D*'$\perp$*AD* è *C*'*D*'$\perp$*AB* (так как *C*'*D*'$\perp$*CD* и *CD* || *AB*). Значит, точка *D*' – ортоцентр треугольника *AEH*. Следовательно, эта точка лежит на прямой *a*. Это означает, что при рассматриваемом повороте образом прямой *d* служит прямая *a*.

Аналогично доказывается, что образами прямых *a*, *b* è *c* являются прямые *b*, *c* и *d* соответственно. Следовательно, точки их попарного пересечения переходят друг в друга, что и требовалось.

3.3. Изначально на экране компьютера – какое-то простое число. Каждую секунду число на экране заменяется на число, полученное из предыдущего прибавлением его последней цифры, увеличенной на 1. Через какое наибольшее время на экране возникнет составное число?

Ответ: через 5 секунд.

Решение. Пусть изначально на экране – число 2, тогда получим следующую цепочку: 2 – 5 – 11 – 13 – 17 – 25. Шестое число – составное, значит, в этом случае пройдет 5 секунд. Докажем, что в остальных случаях потребуется не больше, чем 5 секунд.

Действительно, если на экране было нечетное простое число, не оканчивающееся на 9, то его последняя цифра будет изменяться по циклу: 1 – 3 – 7 – 5 – 1, то есть каждое четвертое число будет оканчиваться на 5. Так как оно не равно пяти, то является составным, поэтому потребуется не более четырех секунд.

Если же на экране было простое число, оканчивающееся на 9, то каждую секунду будет прибавляться по 10. Так как 10 при делении на 3 дает остаток 1, то прибавив 10 один или два раза, мы обязательно получим число, кратное трем. В этом случае, для появления составного числа на экране потребуется не более двух секунд.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Числа a, b и c лежат в интервале (0; 1). Докажите, что $a + b + c + 2abc > ab + bc + ca + 2\sqrt{abc}$.

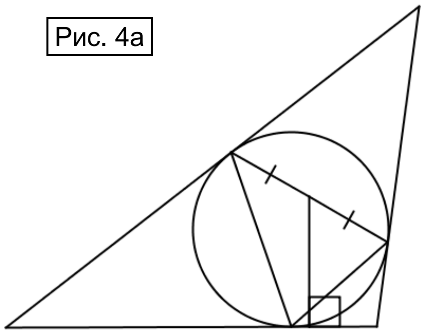
Решение. Воспользуемся неравенством $a + bc \geq 2\sqrt{abc}$, которое следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Тогда: $ab + bc + ca + 2\sqrt{abc} \leq ab + bc + ca + a + bc$. Поэтому достаточно доказать, что $a + b + c + 2abc > ab + bc + ca + a + bc \Leftrightarrow b + c + 2abc > ab + 2bc + ca \Leftrightarrow b(1-a) + c(1-a) - 2bc(1-a) > 0 \Leftrightarrow (1-a)(b + c - 2bc) > 0$.

Из условия задачи следует, что $1 - a > 0$, значит, осталось доказать, что $b + c - 2bc > 0$. Действительно, $b + c - 2bc = b - bc + c - bc = b(1-c) + c(1-b) > 0$, так $b < 1$ и $c < 1$.

4.2. В треугольник *ABC* вписана окружность. Из середины каждого отрезка, соединяющего две точки касания, проводится перпендикуляр к противолежащей стороне. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

Решение. Часть конструкции, описанной в условии задачи, показана на рис. 4а. Так как стороны исходного треугольника являются касательными к описанной окружности треугольника, образованного точками касания, то задачу удобно переформулировать.

Рис. 4а



Рассмотрим треугольник *ABC* и его описанную окружность. Проведем к ней касательную *l* в точке *A*, а из середины *M* стороны *BC* проведем прямую *a*, перпендукулярную *l* (см. рис. 4б). Аналогично определим прямые *b* и *c*. Требуется доказать, что прямые *a*, *b* и *c* пересекаются в одной точке.

Заметим, что *OA* || *a*, так как они обе перпендикулярны к *l*. Пусть *H* – ортоцентр треугольника ABC, *E* – середина *AH*. Из того, что *OM* || *AH* и известного соотношения *AH* = 2*OM* следует, что *OAEM* и *ÎEHM* – параллелограммы (их противолежащие стороны равны и параллельны). Тогда $ME \perp l$., то есть прямые *ME* и *a* совпадают. Из параллелограмма *ÎEHM* получим, что *ME* содержит точку *P* – середину отрезка *OH.*

Проведя аналогичные рассуждения, получим, что прямые *b* и *c* также проходят через точку *P*. Таким образом, прямые *a*, *b* и *c* пересекаются в одной точке.

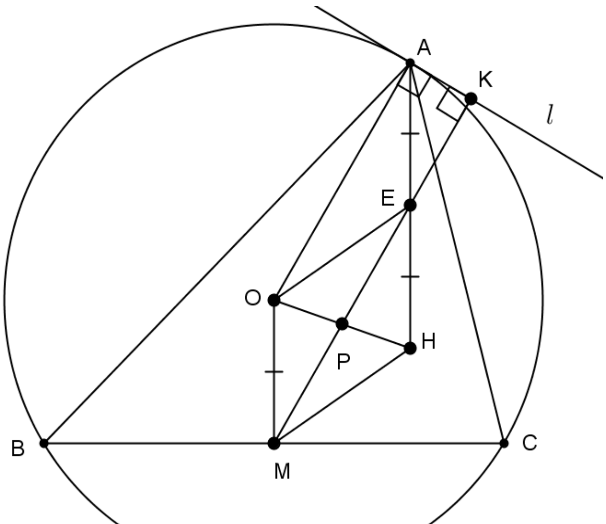


Рис. 4б

Отметим, что P является центром окружности девяти точек треугольника ABC, а ME – один из ее диаметров. Эти факты можно также использовать в заключительной части рассуждения.

4.3. Какое наименьшее количество цветов необходимо, чтобы покрасить все вершины, стороны и диагонали выпуклого n-угольника, если должны выполняться два условия:
1) любые два отрезка, выходящие из одной вершины должны быть разного цвета;
2) цвет любой вершины должен отличаться от цвета любого отрезка, выходящего из нее?

Ответ: n цветов.

Решение. Так как из каждой вершины выходит (n – 1) отрезок и они все должны быть покрашены различными цветами, отличными от цвета этой вершины, то количество цветов должно быть не меньше, чем n.

Докажем, что n цветов достаточно, приведя схему раскраски. Обозначим вершины через V_0, V_1, ..., V_{n-1}, цвета – числами 0, 1, ..., (n – 1). Произведем раскраску следующим образом: отрезок V_iV_j окрашивается цветом с номером $k = i + j \pmod{n}$, а вершина V_i красится в цвет с номером $m = i + i \pmod{n}$.

Несложно проверить, что данная окраска удовлетворяет условиям задачи.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. У чисел 1000^2, 1001^2, 1002^2, ... отбрасывают по две последние цифры. Сколько первых членов полученной последовательности образуют арифметическую прогрессию?

Ответ: 10.

Решение. Общий член исходной последовательности имеет вид: $a_n = \left(10^3 + n\right)^2 = 10^6 + 2\cdot n\cdot 10^3 + n^2$ (где a_0 – первый член).

Обозначим общий член полученной последовательности через b_n, тогда $b_n = \left[\frac{a_n}{100}\right] = \left[\frac{10^6 + 2\cdot n\cdot 10^3 + n^2}{100}\right] = 10^4 + 20n + \left[\frac{n^2}{100}\right]$.

Следовательно, разность между соседними членами новой последовательности будет равна 20 до тех пор, пока $\left[\frac{n^2}{100}\right] = 0$, то есть, если $n^2 < 100$. Учитывая, что n – натуральное или ноль, получим: $0 \le n \le 9$. Значит, арифметическую прогрессию образуют 10 первых членов новой последовательности.

5.2. Существует ли многогранник, проекциями которого на три попарно перпендикулярные плоскости являются: треугольник, четырехугольник и пятиугольник?

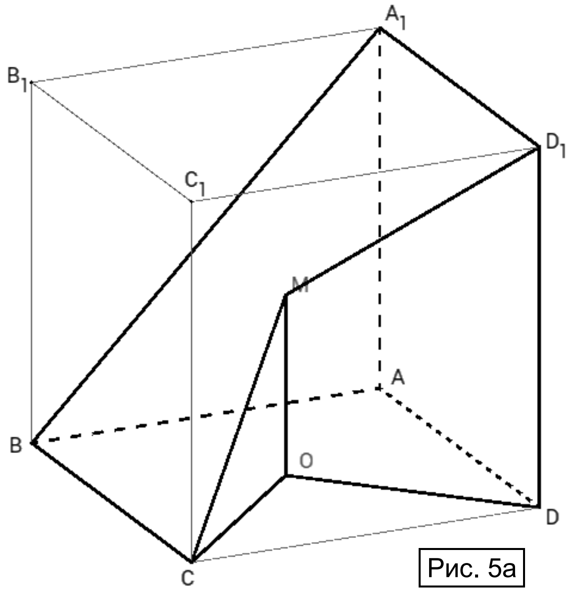


Рис. 5а

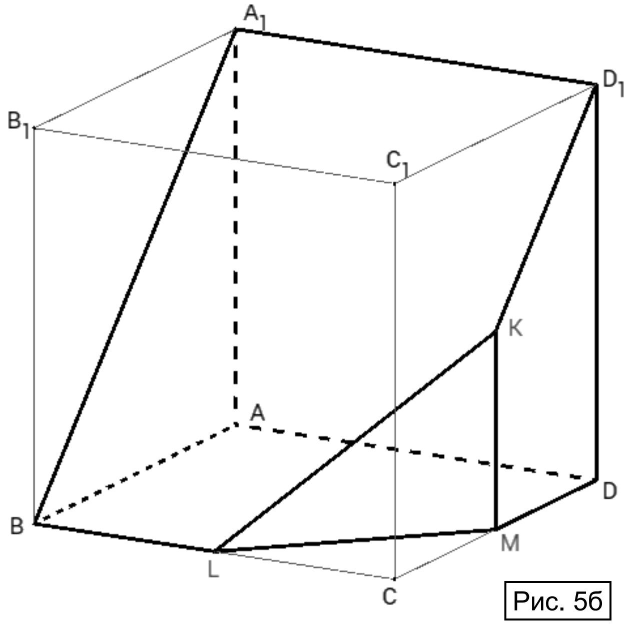


Рис. 5б

Ответ: да, существует.

Решение. Из большого количества возможных примеров приведем два, взяв за основу чертежа прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 5 а, б).

На рис. 5а – невыпуклый многогранник $ABCODA_1DM$. Его проекциями на три попарно перпендикулярные грани являются треугольник ABA_1, четырехугольник ADD_1A_1 и пятиугольник $ABCOD$.

На рис. 5б – выпуклый многогранник $ABLKMDDA_1D_1$. Его проекциями на три попарно перпендикулярные грани являются треугольник ABA_1, четырехугольник ADD_1A_1 и пятиугольник $ABLMD$.

Отметим, что из рисунка 5б видно, что примером, удовлетворяющим условию задачи, является также прямая треугольная призма с «отпиленным» от вершины тетраэдром.

5.3. Квадрат со стороной 9 клеток разрезали по линиям сетки на 14 прямоугольников таким образом, что длина каждой стороны любого прямоугольника не меньше, чем две клетки. Могло ли оказаться так, что среди этих прямоугольников не было ни одного квадрата?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Площадь прямоугольника, отличного от квадрата, со сторонами две или более клеток, не меньше, чем $2 \cdot 3 = 6$ клеток. Так как $6 \cdot 14 > 9^2$, то площадь четырнадцати таких прямоугольников заведомо больше, чем площадь исходного квадрата. Следовательно, при таком разрезании невозможно обойтись без квадратов.