11 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Найдите ближайшее целое число к числу *x*, если $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}+1}-\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}-1}}$.

Ответ: 2.

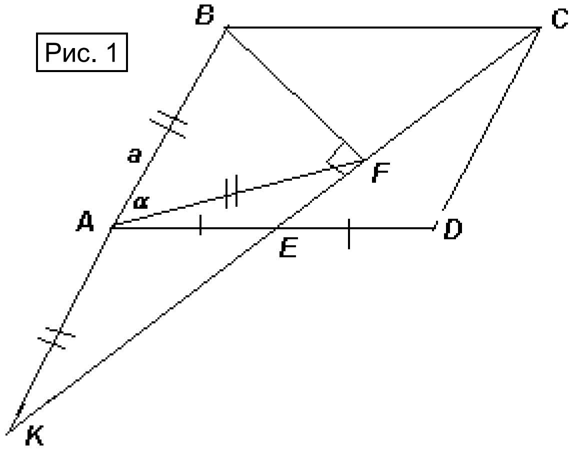
Решение. Преобразуем: $x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}+1}-\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}-1}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{\dfrac{9}{4}}-\sqrt[4]{\dfrac{1}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Так как 2,4 < $\sqrt{6}$ < 2,5, а 1,4 < $\sqrt{2}$ < 1,5 (*оба неравенства проверяются возведением в квадрат*), то 1,9 < $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ < 2. Следовательно, искомое число – это 2.

1.2. В параллелограмме *ABCD* точка *E* – середина стороны *AD*, точка *F* – основание перпендикуляра, опущенного из вершины *B* на прямую *CE*. Найдите площадь треугольника *ABF*, если *AB* = *a*, $\angle BAF = \alpha$.

Ответ: $\dfrac{a^2 \sin\alpha}{2}$.

Рис. 1



Решение. Продлим *CE* до пересечения с прямой *AB* в точке *K* (см. рис. 1). Из равенства треугольников *AKE* и *DCE* следует, что *AK* = *CD* = *AB*. Значит, *FA* – медиана прямоугольного треугольника *KFB*, проведенная к гипотенузе, поэтому *FA* = *a*.

Тогда $S_{\Delta ABF} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AF \cdot \sin\angle BAF = \dfrac{a^2\sin\alpha}{2}$.

1.3. Натуральные числа *A* и *B* делятся на все натуральные числа от 1 до 65. На какое наименьшее натуральное число может не делиться число *A* + *B*?

Ответ: 67.

Решение. Из условия задачи следует, что *A* + *B* делится на все числа от 1 до 65. Эта сумма также делится на 66, так 66 = 2·3·11, а на каждый из этих множителей делится и *A*, и *B*. Так как 67 – простое число, то на 67 *A* + *B* делиться не обязано. Например, если *A* = 65!; *B* = 2·65!, то условие задачи выполняется, но *A* + *B* = 3·65!, что не кратно 67.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. У многочленов *P*(*x*) и *Q*(*x*) – один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок – различен). Докажите, что разность *P*(2015) – *Q*(2015) кратна 1007.

Решение. У данных многочленов равны суммы коэффициентов, значит, *P*(1) = *Q*(1). Тогда *P*(2015) – *Q*(2015) = (*P*(2015) – *P*(1)) – (*Q*(2015) – *Q*(1)).

Воспользуемся известным фактом: **если коэффициенты многочлена *T*(*x*), а также числа *m* и *n* – целые, то *T*(*m*) – *T*(*n*) делится на (*m* – *n*)** (*его можно получить, либо как следствие из теоремы Безу, либо перегруппировкой слагаемых в разности* *T*(*m*) – *T*(*n*)).

Получим, что каждая из разностей *P*(2015) – *P*(1) и *Q*(2015) – *Q*(1) кратна 2014, поэтому разность *P*(2015) – *Q*(2015) также кратна 2014. Так как 2014 делится на 1007, то и разность *P*(2015) – *Q*(2015) кратна 1007.

2.2. Около единичного квадрата *ABCD* описана окружность, на которой выбрана точка *M*. Какое наибольшее значение может принимать произведение *MA*·*MB*·*MC*·*MD*?

Ответ: 0,5.

Решение. Пусть M не совпадает ни с одной из вершин квадрата (иначе, значение произведения равно нулю и не может быть наибольшим) и лежит на дуге BC, O – центр описанной окружности (см. рис. 2). Заметим, что $\angle AMB = \frac{1}{2}\angle AOB = 45°$. Так как $S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB \cdot \sin\angle AMB$, то $MA \cdot MB = \frac{2S_{\Delta AMB}}{\sin 45^\circ}$. Аналогично, $MC \cdot MD = \frac{2S_{\Delta CMD}}{\sin 45^\circ}$, значит, $MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD = 8S_{\Delta AMB} \cdot S_{\Delta CMD}$.

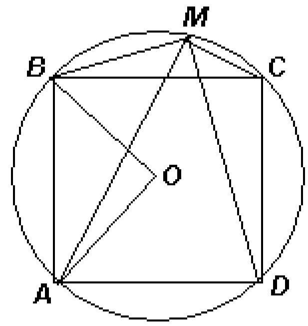


Рис. 2

Обозначим через x расстояние от точки M до прямой AB, тогда расстояние от M до прямой CD равно $1 – x$. Тогда $S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot x = \frac{1}{2}x$, а $S_{\Delta ÑMD} = \frac{1}{2} CD \cdot (1 – x) = \frac{1}{2}(1 – x)$.

Таким образом, $MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD = 2x(1 – x)$. Так как $0 < x < 1$, то полученное выражение принимает наибольшее значение при $x = \frac{1}{2}$ (*экстремум квадратичной функции или неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим*). Это значение равно $\frac{1}{2}$.

Возможно и аналогичное рассуждение, использующее площади треугольников BMC и AMD. В этом случае $\angle BMC = 135°$, а искомое произведение равно $2y(1 + y)$, где y – расстояние от M до BC. Тогда значение $y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$, соответствующее наибольшему значению произведения определяется из геометрических соображений.

Отметим, что искомое наибольшее значение достигается, если M – середина любой из четырех дуг, стягиваемых сторонами квадрата.

2.3. Решите в натуральных числах уравнение: $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$.

Ответ: (1; 1).

Решение. Первый способ. Учитывая, что $x > 0$ и $y > 0$, используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{x^3 + y^3 + 1^3}{3} \ge \sqrt[3]{x^3 \cdot y^3 \cdot 1^3} \Leftrightarrow$ $x^3 + y^3 + 1 \ge 3xy$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = y = 1$.

Второй способ. Если перенести $3xy$ в левую часть и заменить 1 на z, то равенство примет вид так: $x^3 + y^3 + z^3 – 3xyz = 0$. Левая часть полученного равенства раскладывается на множители, например, из следующих соображений. Рассмотрим это выражение как многочлен с переменной x и заметим, что $x = –(y + z)$ является его корнем. Действительно, равенство $– (y + z)^3 + y^3 + z^3 + 3yz(y + z) = 0$ выполняется при любых значениях y и z. Следовательно, этот многочлен делится на $x + y + z$. Выполнив деление, получим: $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 – xy – xz – yz) = 0$.

Так как x, y и z – натуральные числа, то нулю может быть равен только второй множитель: $x^2 + y^2 + z^2 – xy – xz – yz = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 – 2xy – 2xz – 2yz = 0 \Leftrightarrow (x – y)^2 + (y – z)^2 + (z – x)^2 = 0$. Значит, $x = y = z = 1$.

Разложить на множители выражение $x^3 + y^3 + z^3 – 3xyz$ можно и способом группировки, причем действуя по-разному:

1) $x^3 + y^3 + z^3 – 3xyz = x(x^2 – yz) + y(y^2 – xz) + z(z^2 – xy) = x((x^2 – y^2) + (y^2 – yz) + y((y^2 – z^2) + (z^2 – xz)) + z((z^2 – x^2) + (x^2 – xy)) = x(x – y)(x + y) + xy(y – z) + y(y – z)(y + z) + yz(z – x) + z(z – x)(z + x) + xz(x – y) = x(x – y)(x + y + z) + y(y – z)(x + y + z) + z(z – x)(x + y + z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 – xy – xz – yz)$.

2) $x^3 + y^3 + z^3 – 3xyz = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + z^3 – 3xyz – 3xy(x + y) = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + z^3 – 3xy(x + y + z) = (x + y)^3 + z^3 – 3xy(x + y + z) = (x + y + z)((x + y)^2 – (x + y)z + z^2) – 3xy(x + y + z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 – xy – xz – yz)$.

Аналогичные выкладки можно использовать при другом способе решения.

Третий способ. Воспользуемся тем, что $x^3 + y^3 = (x + y)((x + y)^2 - 3xy)$, тогда исходное уравнение можно записать так: $(x + y)((x + y)^2 - 3xy) + 1 = 3xy \Leftrightarrow ((x + y)^3 + 1) - 3xy(x + y) - 3xy = 0 \Leftrightarrow (x + y + 1)((x + y)^2 - (x + y) + 1) - 3xy(x + y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + y + 1)((x + y)^2 - (x + y) + 1 - 3xy) = 0$.

Так как x и y – натуральные числа, то $x + y + 1 > 0$, следовательно, $(x + y)^2 - (x + y) + 1 - 3xy = 0$.

Заметим, что $(x + y)^2 \geq 4xy$, поэтому $4xy - (x + y) + 1 - 3xy \leq 0 \Leftrightarrow xy - x - y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) \leq 0$. Для натуральных x и y полученное неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $x = 1$ или $y = 1$.

Подставив $y = 1$ в исходное уравнение, получим: $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0$. Последнее уравнение имеет единственный натуральный корень: $x = 1$.

Так как исходное уравнение симметрично относительно x и y, то при подстановке в него $x = 1$ получим, что $y = 1$.

Четвертый способ. Так как исходное уравнение симметрично относительно x и y, то достаточно рассмотреть случай, когда $x \geq y$.

Запишем данное уравнение в другом виде: $(x^3 - 3xy) + (y^3 + 1) = 0$. Так как y – натуральное число, то $y^3 + 1 > 0$. Тогда $x^3 - 3xy = x(x^2 - 3y) < 0$. Следовательно, $x^2 - 3y < 0$ (x – натуральное). Учитывая, что $x \geq y$, то есть $-3x \leq -3y$, получим: $x^2 - 3x < 0$. Таким образом, $x < 3$.

Это означает, что достаточно проверить три случая:

1) $x = 2$, $y = 2$ – не является решением;
2) $x = 2$, $y = 1$ – не является решением;
3) $x = 1$, $y = 1$ – является решением, причем симметричный случай не дает новых решений.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Решите уравнение: $2\sin\frac{\pi x}{2} - 2\cos \pi x = x^5 + 10x - 54$.

Ответ: 2.

Решение. Перенеся все слагаемые в одну часть, получим уравнение: $x^5 + 10x - 54 - 2\sin\frac{\pi x}{2} + 2\cos \pi x = 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^5 + 10x - 54 - 2\sin\frac{\pi x}{2} + 2\cos\pi x$. Найдем и оценим ее производную: для всех $x \in R$ $f'(x) = 5x^4 + 10 - \pi\cos\frac{\pi x}{2} - 2\pi\sin\pi x > 5x^4 + 10 - 3\pi > 0$.

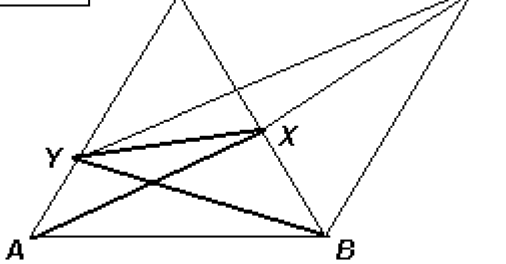
Следовательно, $f(x)$ – возрастающая функция, поэтому уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного корня.

Так как $f(2) = 32 + 20 - 54 - 2\sin\pi + 2\cos 2\pi = 0$, то 2 – корень исходного уравнения.

3.2. На сторонах BC и AC правильного треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Докажите, что из отрезков AX, BY и XY можно составить треугольник.

Решение. Первый способ. Заметим, что хотя бы один из углов XYA или YXB будет тупым, значит, $XY < AX$ или $XY < BX$, то есть XY – не наибольший среди трех данных отрезков (см. рис. 3а).

Рис. 3а



Если $BY \geq AX$, то достроим данный треугольник до ромба $ABDC$, отразив его относительно стороны BC. Тогда $AX + XY = DX + XY > DY > BY$, так как в треугольнике BYD $\angle DBY > 60° > \angle BDY$.

Если $BY < AX$, то проводим аналогичное рассуждение, используя симметрию относительно AC.

Таким образом, в любом случае из трех данных отрезков можно составить треугольник.

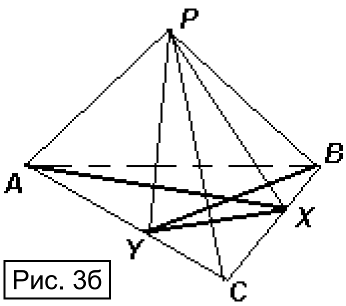


Рис. 3б

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим правильный тетраэдр $PABC$, основанием которого является данный треугольник (см. рис. 3б). Тогда $PX = AX$, $PY = BY$, значит, треугольник PXY – искомый.

3.3. На плоскости проведены n прямых так, что любые две пересекаются, но никакие 4 через одну точку не проходят. Всего имеются 16 точек пересечения, причем через 6 из них проходят по 3 прямые. Найдите n.

Ответ: $n = 8$.

Решение. «Пошевелим» данную конструкцию таким образом, чтобы по-прежнему любые две прямые пересекались, но никакие три не проходили через одну точку. Тогда, если какие-то три прямые a, b и c пересекались в некоторой точке O, то теперь вместо одной точки O появятся три точки попарного пересечения этих прямых. Значит, в результате «шевеления» исходное количество прямых не изменится, а количество точек пересечения увеличится на $2 \cdot 6 = 12$. В итоге, все прямые будут пересекаться попарно, а точек пересечения станет $16 + 12 = 28$. Таким образом, $\frac{n(n-1)}{2} = 28$, откуда $n = 8$.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Алгебраисты придумали новую операцию ॐ, которая удовлетворяет условиям: a ॐ $a = 0$ и a ॐ (b ॐ c) = (a ॐ b) + c. Вычислите 2015 ॐ 2014. (*Знак «+» определяет сложение в обычном смысле, скобки показывают порядок действий*.)

Ответ: 1.

Решение. (2015 ॐ 2014) + 2014 = 2015 ॐ (2014 ॐ 2014) = 2015 ॐ 0 = 2015 ॐ (2015 ॐ 2015) = (2015 ॐ 2015) + 2015 = 0 + 2015 = 2015, откуда (2015 ॐ 2014) = 2015 – 2014 = 1.

Аналогичным образом можно доказать, что для любых a и b выполняется равенство a ॐ *b = a – b. Из этого, в частности, следует, что операция* ॐ *не подчиняется ни переместительному, ни сочетательному законам.*

4.2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, I – центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Найдите наименьшее значение BD, если $AI = BC = CD = 2$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Решение. Из условия задачи следует равенство дуг BC è CD, значит, биссектриса AI угла BAD пересекает окружность в точке C (см. рис. 4 а, б). По теореме о «трезубце» $CI = CB = CD = 2$. Далее можно рассуждать по-разному.

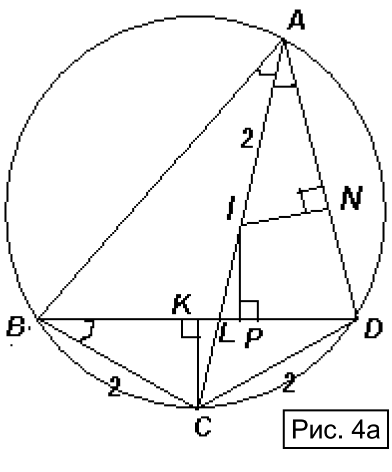


Рис. 4а

<u>Первый способ</u>. Пусть K и N – основания перпендикуляров, опущенных из точек C и I на BD и AD соответственно (см. рис. 4а), тогда из равенства прямоугольных треугольников BKC и ANI следует, что $CK = IN$. Перпендикуляр IP к диагонали BD также равен IN (это радиусы вписанной окружности треугольника ABD), поэтому BD пересекает отрезок CI в его середине L. Таким образом, $CL = IL = 1$.

По теореме о произведении отрезков хорд: $BL \cdot DL = AL \cdot CL$. Пусть $BL = x$, $DL = y$, тогда $xy = 3$. Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим следует, что наименьшее значения суммы $x + y$ достигается, если $x = y = \sqrt{3}$. Следовательно, значение $BD = 2\sqrt{3}$ – наименьшее из возможных.

Второй способ. По теореме Птолемея: $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$, то есть, $2AD + 2AB = 4BD$. Следовательно, $BD = \frac{AB + AD}{2}$ (*треугольник ABD, обладающий таким свойством называется разностным*).

Без ограничения общности можно считать, что $AB \geq AD$. Проведем окружность с центром C и радиусом 2, которая пересечет сторону AB в точке E (см. рис. 4б).. Биссектриса AC угла BAD является ее осью симметрии и осью симметрии угла, значит, точки E и D симметричны относительно AC. Следовательно, $AE = AD$.

По теореме о произведении отрезков секущих $AE \cdot AB = AI \cdot AF$ (IF – диаметр построенной окружности). Следовательно, $AD \cdot AB = 2 \cdot 6 = 12$.

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $BD = \frac{AB + AD}{2} \geq \sqrt{AB \cdot AD} = 2\sqrt{3}$.

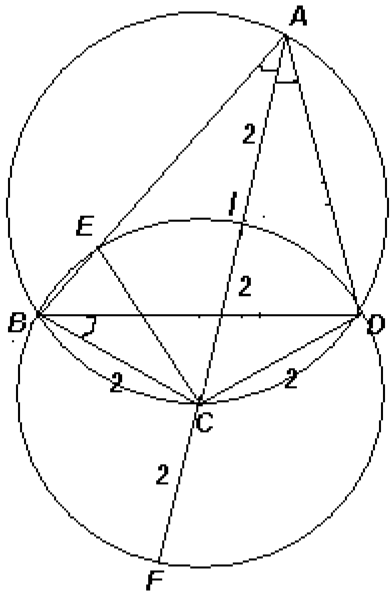


Рис. 4б

Равенство достигается, если $AB = AD$.

Отметим, что условие $AI = IC$ (в обозначениях этой задачи), доказанное в первом способе решения, является характеристическим свойством разностных треугольников. Полученный результат показывает, что в таких треугольниках наименьшее значение длины стороны BD при заданном значении длины AI достигается, если треугольник ABD – равносторонний, а точка I совпадает с центром его описанной окружности.

4.3. У натурального числа n есть такие два различных делителя a и b, что $(a – 1)(b + 2) = n – 2$. Докажите, что число $2n$ является квадратом натурального числа.

Решение. Заметим, что $(a – 1)(b + 2) = n – 2 \Leftrightarrow ab – b + 2a = n$. Так как n делится на a и делится на b, то и левая часть полученного равенства делится и на a, и на b. Следовательно, b делится на a, а $2a$ делится на b. Второе условие означает, что $b \leq 2a$. Тогда, учитывая, что $b \neq a$, из условия b кратно a получим: $b = 2a$

Подставив этот результат в исходное равенство, получим: $2a^2 – 2a + 2a = n$, откуда $2n = 4a^2$, что и требовалось.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy - t^2 = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \end{cases}$.

Ответ: (3; 3; 0; 0), (–3; –3; 0; 0).

Решение. Первый способ. $\begin{cases} xy - t^2 = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 9 + t^2, \\ x^2 + y^2 = 18 - z^2 \end{cases}$. Тогда $xy \geq 9$ и $x^2 + y^2 \leq 18$. Следовательно, $18 \geq x^2 + y^2 \geq 2xy \geq 18$, значит, все знаки неравенства должны обратиться в знаки равенства, то есть $x^2 + y^2 = 2xy = 18$, поэтому $x = y = \pm 3$.

Тогда, из первого уравнения системы и условия $xy = 9$ следует, что $t = 0$, а из второго уравнения и условия $x^2 + y^2 = 18$ следует, что $z = 0$.

Второй способ. $\begin{cases} xy - t^2 = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 18 + 2t^2, \\ x^2 + y^2 = 18 - z^2 \end{cases}$. Вычитая из второго уравнения первое, получим: $x^2 + y^2 – 2xy = –z^2 – 2t^2 \Leftrightarrow (x – y)^2 = – (z^2 + 2t^2)$.

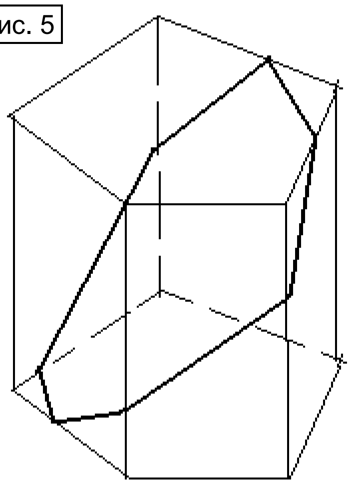
Так как левая часть этого уравнения принимает только неотрицательные значения, а правая – только неположительные, то равенство возможно тогда и только тогда, когда $x = y$ и $t = z = 0$. Подставив этот результат в любое из уравнений системы, получим, что $x =$

$y = \pm 3$. Затем, подстановкой полученных значений в другое уравнение убеждаемся, что они являются и его решением.

5.2. Рассматриваются все призмы, в основании которых лежит выпуклый 2015-угольник. Какое наибольшее количество ребер такой призмы может пересечь плоскость, не проходящая через ее вершины?

Ответ: 2017.

Рис. 5



Решение. Пусть плоскость пересекла N ребер призмы, тогда в ее сечении получился N-угольник. Значит, эта плоскость пересекла и ровно N граней призмы. Сечение выпуклого многогранника не может иметь больше сторон, чем количество граней этого многогранника. Значит, $N \leq 2017$.

Существование сечения, пересекающего все грани призмы, проще показать на примере прямой призмы с меньшим количеством граней, например, для пятиугольной призмы (см. рис. 5). Таким образом, наибольшее значение N равно 2017. .

На самом деле, у любой призмы, основание которой – выпуклый многоугольник, существует сечение, пересекающее все ее грани.

5.3. Сумма девяти различных натуральных чисел равна 200. Всегда ли можно выбрать из них четыре числа так, чтобы их сумма была больше, чем 100?

Ответ: нет, не всегда.

Решение. Рассмотрим девять чисел: 28, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18. Их сумма равна 200, но сумма четырех наибольших из них равна 28 + 25 + 24 + 23 = 100. Значит, сумма любых четырех чисел из этих девяти не больше, чем 100.

Аналогичный пример: 27, 26, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18.