11 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Решите в целых числах неравенство: $x^2 < 3 - 2\cos \pi x$.

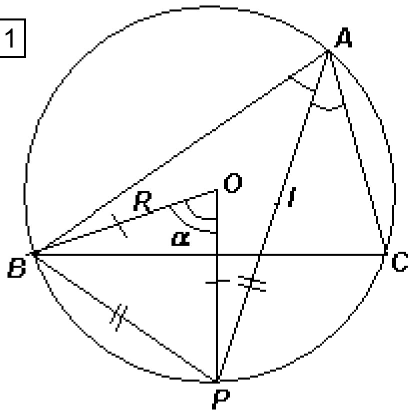
Ответ: 0, ±1.

Решение. Так как $3 - 2\cos \pi x \le 5$, то $x^2 < 5$. Следовательно, целые решения неравенства могут содержаться только среди чисел 0, ±1; ±2. Учитывая, что в обеих частях неравенства – четные функции, достаточно проверить числа 0, 1 и 2 путем непосредственной подстановки. Проверкой убеждаемся, что числа 0 и 1 являются решениями данного неравенства, а число 2 – не является.

1.2. В остроугольном треугольнике *ABC* через центр *I* вписанной окружности и вершину *A* провели прямую, пересекающую описанную окружность в точке *P*. Найдите *IP*, если $\angle BAC = \alpha$, а радиус окружности, описанной около *ABC*, равен *R*.

Ответ: $2R\sin\frac{\alpha}{2}$

Рис. 1



Решение. Пусть *O* – центр описанной окружности. Из условия задачи следует, что *AP* – биссектриса угла *BAC*, значит $\angle BOP = \angle BAC = \alpha$ (см. рис. 1). Из равнобедренного треугольника *BOP*: $PB = 2OB\cdot\sin\frac{1}{2}\angle BOP = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$. По теореме «трилистника» $IP = PB$.

1.3. Существует ли натуральное число, меньшее ста, которое можно представить в виде суммы двух квадратов различных натуральных чисел двумя различными способами?

Ответ: существует.

Решение. Например, $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ или $85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$.

Других примеров нет.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Могут ли три различных числа вида $2^n + 1$, где *n* – натуральное, быть последовательными членами геометрической прогрессии?

Ответ: не могут.

Решение. Пусть существуют такие натуральные числа *x*, *y* и *z*, что $2^x + 1$, $2^y + 1$ и $2^z + 1$ – последовательные члены некоторой геометрической прогрессии. Без ограничения общности можно считать, что эта прогрессия – возрастающая, то есть $x < y < z$.

Тогда $(2^y + 1)^2 = (2^x + 1)(2^z + 1) \Leftrightarrow 2^{2y} + 2^{y+1} = 2^{x+z} + 2^x + 2^z \Leftrightarrow 2^{2y-x} + 2^{y-x+1} = 2^z + 1 + 2^{z-x}$, где числа $2y - x$, $y - x + 1$ и $z - x$ также являются натуральными. Но полученное равенство выполняться не может, так как в его левой части – четное число, а в правой – нечетное. Противоречие.

Отметим, что противоречие можно получить и сразу после раскрытия скобок, так как любое натуральное число единственным образом представляется в виде суммы степеней двоек (это следует из перехода к двоичной системе счисления).

2.2. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AL*. *O*, O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников *ABC*, *ABL* и *ACL* соответственно. Докажите, что $OO_1 = OO_2$.

Решение. Проведем серединные перпендикуляры к отрезкам *AB*, *AC* и *AL*, тогда вершинами треугольника OO_1O_2 являются точки их попарного пересечения (см. рис. 2). Докажем, что этот треугольник – равнобедренный.

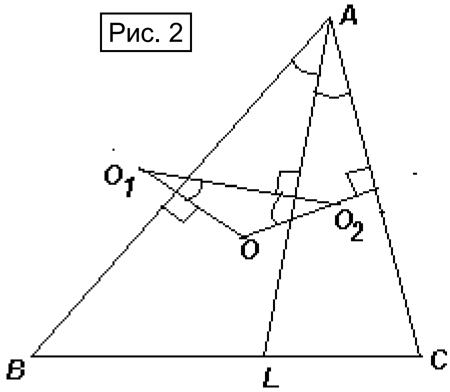


Рис. 2

Действительно, $\angle OO_1O_2 = \angle BAL$ (острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Аналогично, $\angle OO_2O_1 = \angle$*ÑAL*. Так как $\angle BAL = \angle$*ÑAL*, то $\angle OO_1O_2 = \angle OO_2O_1$, значит, $OO_1 = OO_2$.

Можно также использовать, что центры трех окружностей и точка A лежат на одной окружности.

2.3. В футбольном турнире в один круг приняли участие 5 команд. В силу погодных условий турнир не был завершен. По результатам проведенных матчей все команды набрали различное количество очков, при этом каждая команда набрала хотя бы очко. Какое наименьшее количество игр могло состояться? (*Победа – 3 очка, ничья– 1, поражение – 0.*)

Ответ: 6 игр.

Решение. Наименьшее суммарное количество очков, набранных командами, равно 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, то есть игр – не менее пяти. Но пяти игр также не хватит, так как в этом случае каждая игра должна была закончиться победой одной из команд, а тогда количество очков у каждой команды было бы кратно трем.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**О**
A		1	3	1		**5**
B	1				3	**4**
C	0			3		**3**
D	1		0		1	**2**
E		0		1		**1**

Шесть игр состояться могло. Один из возможных примеров – см. таблицу.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Сумма положительных чисел *x*, *y* и *z* равна $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что $\cos x + \cos y + \cos z > \sin x + \sin y + \sin z$.

Решение. <u>Первый способ</u>. Из условия задачи следует, что $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (y+z)\right) = \sin(y+z)$. Аналогично, $\cos y = \sin(x+z)$ и $\cos z = \sin(x+y)$

Так как $0 < y + z < \frac{\pi}{2}$, то $\cos x = \sin(y+z) > \sin y$. Аналогично, $\cos y = \sin(x+z) > \sin z$ и $\cos z = \sin(x+y) > \sin x$. Складывая эти три неравенства, получаем требуемое.

<u>Второй способ</u>. Докажем, что $\cos t - \sin t > 1 - t\sqrt{2}$, если $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Для этого найдем наименьшее значение функции $f(t) = \cos t - \sin t + t\sqrt{2} - 1$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Так как $f'(t) = -\sin t - \cos t + \sqrt{2}$, то $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t + \cos t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Учитывая, что $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, получим, что $f'(t) = 0$ при $t = \frac{\pi}{4}$. Так как функция $f(t)$ непрерывна на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то ее экстремальные значения на этом отрезке могут достигаться либо в этой точке, либо на концах отрезка. Найдем значения функции в этих трех точках: $f(0)=0$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-1 > 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}-2 > 0$. Следовательно, $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(t)=0$. Это означает, что $\cos t-\sin t+t\sqrt{2}-1\geq 0 \Leftrightarrow \cos t-\sin t\geq 1-t\sqrt{2}$, если $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Тогда $\cos x-\sin x+\cos y-\sin y+\cos z-\sin z \geq 3-(x+y+z)\sqrt{2}=3-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}>0$. Значит, $\cos x+\cos y+\cos z>\sin x+\sin y+\sin z$, что и требовалось.

3.2. Дан куб *ABCDA'B'C'D'* с ребром 1. На его ребрах *AB*, *BC*, *C'D'* и *D'A'* отмечены точки *K*, *L*, *M* и *N* соответственно так, что *KLMN* – квадрат. Найдите его площадь.

Ответ: 1,125.

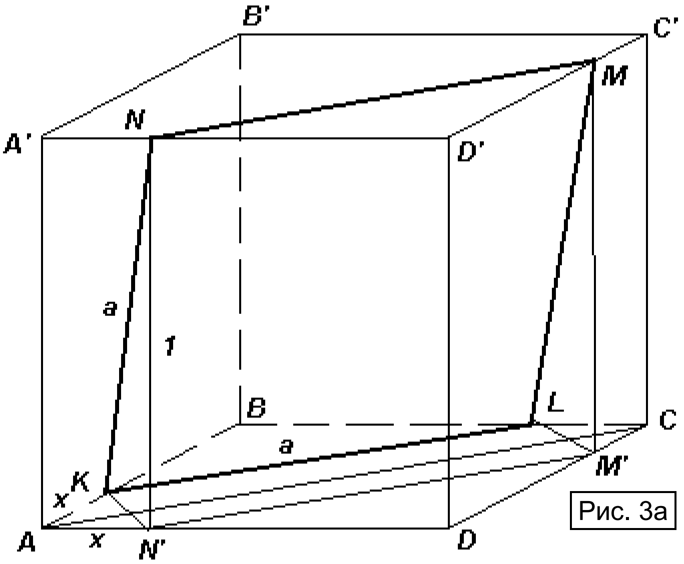


Рис. 3а

Решение. Рассмотрим проекцию данного квадрата на плоскость грани *ABCD*. Исходя из свойств параллельного проектирования, это параллелограмм, а учитывая теорему о трех перпендикулярах, – это прямоугольник *KLM'N'* (см. рис. 3а). Так как этот прямоугольник отличен от квадрата, то его стороны соответственно параллельны диагоналям квадрата *ABCD*. Докажем это.

Пусть вершины прямоугольника лежат на сторонах квадрата (по одной на каждой стороне). Тогда центр *O* квадрата *ABCD* является также и центром прямоугольника, а вершины прямоугольника равноудалены от точки *O*.

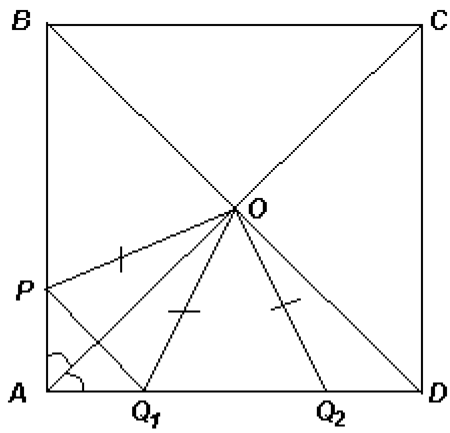


Рис. 3б

Окружность с центром O и диаметром, равным диагонали прямоугольника, пересекает каждую сторону квадрата не более, чем в двух точках. Следовательно, с учетом симметрии, достаточно рассмотреть любую вершину *P* прямоугольника и два возможных положения Q_1 и Q_2 соседней с ней вершины (см. рис. 3б).

В треугольниках *OAP* и *OAQ*: *OA* – общая сторона; *OP* = *OQ*; $\angle OAP=\angle OAQ$. Согласно «четвертому признаку равенства треугольников», возможны два случая: 1) эти треугольники равны (точка Q_1); 2) четырехугольник *OPAQ* – вписанный (точка Q_2).

В первом случае, $PQ_1\perp OA$, то есть $PQ_1 \parallel BD$, что и требовалось.

Во втором случае, $OP\perp OQ_2$, то есть диагонали прямоугольника перпендикулярны, откуда следует, что этот прямоугольник – квадрат.

Вычислим теперь площадь *KLMN*. Пусть *KL* = *KN* = *a*, *AK* = *AN'* = *x*, тогда *BK* = 1 – *x*, $KN'=x\sqrt{2}$ (см. рис. 3а). Из прямоугольного треугольника *KNN'*: $a^2=2x^2+1$, а из подобия треугольников *KBL* и *ABC*: $\frac{1-x}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Решение полученной системы уравнений: $x=\frac{1}{4}$; $a=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Значит, $S_{KLMN}=a^2=\frac{9}{8}$.

Укажем другой, «вычислительный» способ доказательства того, что стороны прямоугольника KLM'N' соответственно параллельны диагоналям квадрата ABCD.

Так как KLM’N’ – не квадрат, то прямоугольные треугольники KAN’ и N’DM’ не равны (см. рис. 3в). Но $\angle AKN'$ = $\angle DN'M'$ (углы с соответственно перпендикулярными сторонами), значит, эти треугольники подобны. Следовательно, $\frac{AK}{DN'} = \frac{AN'}{DM'}$.

Пусть AN’ = x, DM’ = y, тогда DN’ = 1 – x, AK = CM’ = 1 – y. Тогда $\frac{1-y}{1-x} = \frac{x}{y}$ *⇔ (x – y)(x + y – 1) = 0 Так как треугольники KAN’ и N’DM’ не равны, то x ≠ y, значит, y = 1 – x Следовательно, рассматриваемые треугольники – равнобедренные, откуда и следует требуемая параллельность.*

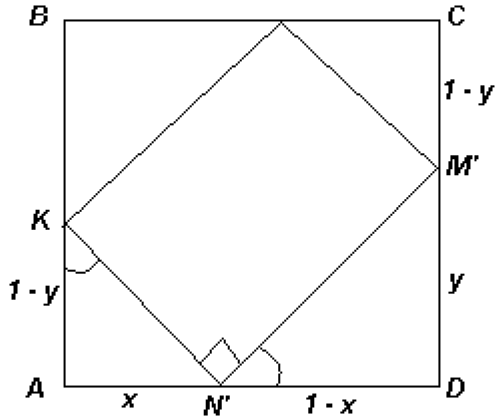


Рис. 3в

3.3. Жили-были двадцать шпионов. Каждый из них написал донос на десять своих коллег. Докажите, что не менее, чем десять пар шпионов донесли друг на друга.

Решение. Рассмотрим граф, вершины которого – шпионы. Если один шпион написал донос на другого, то соединим эти две вершины ориентированным ребром от первого ко второму. После этой процедуры образуется 20·10 = 200 таких ребер. Но полный граф на 20 вершинах содержит всего $\frac{20 \cdot 19}{2}$ = 190 ребер, следовательно, найдутся 10 ребер, ориентированных в обе стороны. Таким образом, хотя бы десять пар шпионов донесли друг на друга.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Дан многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$. Известно, что каждое из уравнений *f(x)* = 1 и *f(x)* = 2 имеет четыре корня. Докажите, что если для корней первого уравнения выполняется равенство $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, то и для корней второго уравнения выполняется аналогичное равенство.

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = m$. Тогда $f(x) - 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = (x^2 - mx + x_1x_2)(x^2 - mx + x_3x_4)$. Так как уравнение $f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 1$, то его можно записать в виде: $(x^2 - mx + x_1x_2)(x^2 - mx + x_3x_4) = 1$.

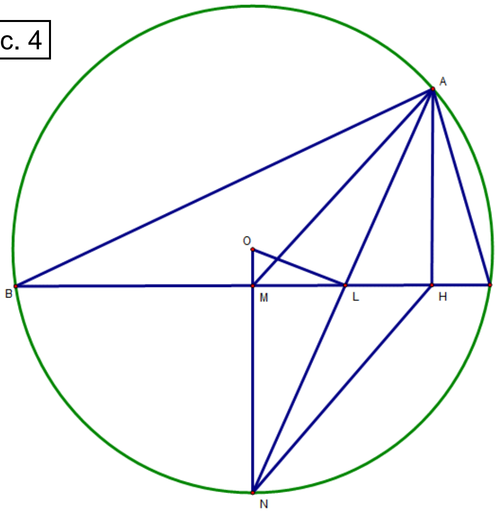
Сделав замену переменной $x^2 - mx = y$, получим уравнение $(y + x_1x_2)(y + x_3x_4) = 1$. Так как уравнение *f(x)* = 2 имеет четыре корня, то это уравнение должно иметь два корня y_1 и y_2. При этом, два корня уравнения *f(x)* = 2 будут являться решениями уравнения $x^2 - mx = y_1$, а еще два – решениями уравнения $x^2 - mx = y_2$. Но в каждом из этих уравнений сумма корней равна *m*, поэтому для четырех корней уравнения *f(x)* = 2 выполняется требуемое равенство.

<u>Второй способ</u>. Пусть $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2} = n$. Рассмотрим многочлен $g(x) = f(x + n)$, тогда корнями уравнения $g(x) = 1$ будут являться числа $\alpha_i = x_i - n$, где *n* = 1; 2; 3; 4. При этом, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ = 0, то есть эти числа попарно противоположны. Тогда функция $g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) = (x - \alpha_1)(x + \alpha_1)(x - \alpha_3)(x + \alpha_3) = \left(x^2 - \alpha_1^2\right)\left(x^2 - \alpha_3^2\right)$ является четной. Следовательно, корни уравнения $g(x) = 2$ также попарно противоположны.

Так как $f(x) = g(x - n)$, то корни уравнения $f(x) = 2$ получатся из соответствующих корней уравнения $g(x) = 2$ прибавлением числа *n*, поэтому они будут обладать требуемым свойством.

4.2. В треугольнике *ABC* проведены медиана *AM*, биссектриса *AL* и высота *AH*. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, если *AL* = *t*, *AH* = *h* и *L* – середина отрезка *MH*.

Рис. 4



Ответ: $\frac{t^2}{h}$.

Решение. Продолжим биссектрису *AL* до её пересечения в точке *N* с описанной окружностью треугольника *ABC* (см. рис. 4). Пусть *O* – центр этой окружности. Из равенства дуг *BN* и *CN* следует, что серединный перпендикуляр *OM* к стороне *BC* проходит через точку *N*.

Так как *ML* = *HL*, то прямоугольные треугольники *NML* и *AHL* равны. Следовательно, *NM* = *AH* = *h*, *NL* = *AL* = *t* (*AHNM – параллелограмм*). Кроме того, так как *L* – середина *AN,* то *OL*⊥*AN*.

Из прямоугольного треугольника *OLN*: $ON \cdot MN = LN^2$, откуда *R* = *ON* = $\frac{t^2}{h}$.

4.3. Назовем натуральное число убывающим, если каждая цифра в его десятичной записи, кроме первой, меньше или равна предыдущей. Существует ли такое натуральное *n*, что число 16^n – убывающее?

Ответ: не существует.

Решение. Заметим, что десятичная запись числа 16^n оканчивается на 6. Кроме того, это число делится на степени двойки с показателем, не меньшим четырех. Следовательно, число составленное из *k* последних цифр в записи 16^n должно делиться на 2^k.

Рассмотрим число, составленное из двух последних цифр в десятичной записи числа 16^n. Тогда 16^n может оказаться убывающим, если это 66, 76, 86 или 96. Но числа вида …66 или …86 не делятся на 4, а число вида 99...96 (других цифр впереди быть не может) делится на 3, а 16^n на 3 не делится. Следовательно, число составленное из двух последних цифр, может быть только 76.

Рассуждая аналогично для чисел, составленных из трех, четырех, пяти и шести последних цифр, получим, что число 16^n должно оканчивается на 987776. Это число не делится на 16^2 = 256, что проверяется непосредственно делением, поэтому не может быть степенью шестнадцати, а число 9987776 не делится на 2^7 = 128. Эти противоречия показывают, что чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Решите уравнение $f(f(x)) = f(x)$, если $f(x) = \sqrt[5]{3 - x^3 - x}$.

Ответ: 1.

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть $y = f(x)$, тогда заданное уравнение примет вид: $f(y) = f(x)$. Так как функция $f(x) = \sqrt[5]{3 - x^3 - x}$ – убывающая, то каждое значение она принимает только при одном значении аргумента, поэтому $f(y) = f(x) \Leftrightarrow y = x$.

Таким образом, $\sqrt[5]{3 - x^3 - x} = x \Leftrightarrow x^5 = 3 - x^3 - x \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x = 3$. Заметим, что *x* = 1 – корень полученного уравнения. Так как функция $g(x) = x^5 + x^3 + x$ – возрастающая, то это уравнение имеет не более одного корня, то есть других корней нет.

Вывод о том, что уравнение имеет не более одного корня, можно сделать непосредственно из уравнения $\sqrt[5]{3-x^3-x}=x$*, заметив, что в его левой части – убывающая функция, а в правой – возрастающая.*

Второй способ. Заметим, что $f(1)$ = 1 и $f\big(f(1)\big)$ = 1, то есть x = 1 – корень заданного уравнения. Кроме того, функция $f(x)=\sqrt[5]{3-x^3-x}$ – убывающая, значит, функция $f\big(f(x)\big)$ – возрастающая. Следовательно, уравнение $f\big(f(x)\big)=f(x)$ имеет не более одного корня, то есть других корней, кроме x = 1, нет.

5.2. Прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой $H = 3R\sqrt{7}$ положили боком на плоскость и покатили так, что его вершина осталась неподвижна. Сколько оборотов сделает его основание до момента, когда конус вернется в исходное положение?

Ответ: 8.

Решение. Окружность основания катится по окружности радиуса L, где L – длина образующей конуса. Значит, искомое количество оборотов равно $\dfrac{2\pi L}{2\pi R}=\dfrac{\sqrt{H^2+R^2}}{R}$ = 8.

5.3. Существует ли такое натуральное n, что $3^n + 2\cdot17^n$ является квадратом некоторого натурального числа?

Ответ: не существует.

Решение. Первый способ. Рассмотрим последние цифры слагаемых в зависимости от вида числа n. Заметим, что при всех натуральных значениях k: $3^{4k} = (3^4)^k = 81^k$ и $17^{4k} = (17^2)^{2k} = (289^2)^k$, значит в этом случае оба числа оканчиваются на 1. Дальнейшие результаты удобно записать в виде таблицы (где k – натуральное или ноль).

	Последняя цифра числа		
Вид *n*	3^n	$2\cdot17^n$	$3^n + 2\cdot17^n$
4*k*	1	2	3
4*k* + 1	3	4	7
4*k* + 2	9	8	7
4*k* + 3	7	6	3

Следовательно, заданная сумма оканчивается на 3 или на 7. Так как квадраты натуральных чисел могут оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6 и 9, то натуральных n, удовлетворяющих условию, не существует.

Второй способ. Заметим, что $2\cdot17^n \equiv 2 \pmod 8$. Кроме того, при четных значениях n $3^n = 3^{2k} = 9^k \equiv 1 \pmod 8$, а при нечетных значениях n $3^n = 3^{2k+1} = 3\cdot9^k \equiv 3 \pmod 8$. Значит, $3^n + 2\cdot17^n \equiv 3 \pmod 8$ или $3^n + 2\cdot17^n \equiv 5 \pmod 8$, но квадраты натуральных чисел при делении на 8 могут иметь только остатки 0, 1 или 4. Таким образом, натуральных n, удовлетворяющих условию, не существует.