7 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Телёнок весит столько же, сколько козлёнок вместе с поросёнком. А поросёнок вместе с телёнком – столько же, сколько ягнёнок вместе с козлёнком. Сколько весит поросёнок, если ягнёнок весит 30 кг?

Ответ: 15 кг.

Решение. Пусть телёнок весит $Т$ кг, козлёнок – $К$ кг, поросёнок – $П$ кг, ягнёнок – $Я$ кг. По условию: $Т = К + П$ и $П + Т = Я + К$. Подставив $Т = К + П$ и $Я = 30$ во второе равенство, получим: $2П + К = 30 + К$, значит, $П = 15$.

1.2. Сумма двух сторон прямоугольника равна 7 см, а сумма трёх его сторон равна 9,5 см. Найдите периметр прямоугольника.

Ответ: 12 см или 13 см или 14 см.

Решение. Пусть a и b – длины сторон прямоугольника, тогда $P = 2(a + b)$ – его периметр. По условию: $2a + b = 9{,}5$. Далее возможны три случая:

1) $2a = 7$, тогда $a = 3{,}5$; $b = 2{,}5$; $P = 12$ (см).

2)$2b = 7$, тогда $b = 3{,}5$; $a = 3$; $P = 13$ (см).

3) $a + b = 7$, тогда $a = 2{,}5$; $b = 4{,}5$; $P = 14$ (см).

1.3. Простым или составным является число $100^2 + 201$?

Ответ: составным.

Решение. $100^2 + 201 = 100^2 + 2\cdot 100 + 1 = (100 + 1)^2 = 101^2$. Следовательно, данное число делится на 101, то есть оно составное.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Существуют ли 11 последовательных натуральных чисел, сумма которых равна точному кубу?

Ответ: существуют.

Решение. Рассмотрим, например, последовательные натуральные числа от $11^2 – 5 = 116$ до $11^2 + 5 = 126$. Таких чисел ровно 11, а их сумма равна $11^2\cdot 11 = 11^3$, что и требовалось.

Этот пример можно было найти, исходя из таких рассуждений. Рассмотрим сумму одиннадцати последовательных натуральных чисел: $(n – 5) + (n – 4) + ... + n + ... + (n + 4) + (n + 5) = 11n$. *Тогда условию задачи заведомо удовлетворяют все суммы вида* 11^{3k}, *где* k *– натуральное число, то есть* $n = 11^{3k – 1}$.

Следовательно, в качестве примера можно указать любую последовательность вида: $11^{3k – 1} – 5$; $11^{3k – 1} – 4$, ..., $11^{3k – 1} + 5$. *В приведенном примере* $k = 1$, *то есть выбрано наименьшее значение* $n = 11^2$. *Существуют и другие примеры.*

2.2. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка D. Точка E такова, что треугольник BDE – также равносторонний. Докажите, что $CE = AD$.

Решение. Возможны два случая расположения точки E (см. рис 1 а, б). В обоих случаях треугольники CBE и ABD равны, так как $CB = AB$, $BE = BD$, $\angle CBE = \angle ABD$ (на рис. 1а этот угол – общий). Следовательно, $CE = AD$.

Рис. 1а

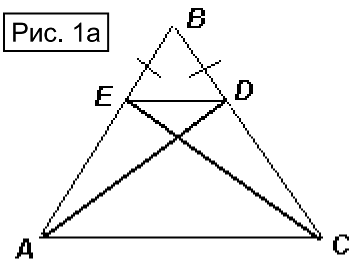
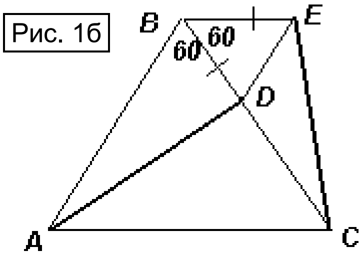


Рис. 1б



Требуемое равенство также следует из того, что в трапеции AEDC: AE = DC (см. рис. 1а), а при повороте с центром B на 60° *образами точек A и D являются точки C и E соответственно (см. рис. 1б).*

2.3. В ряд стоят 33 девочки и каждая держит по ромашке. Одновременно каждая из девочек передает свою ромашку девочке, стоящей от неё через одну. Может ли оказаться так, что у каждой девочки будет опять по одной ромашке?

Ответ: не может.

Решение. Предположим, что девочки смогу обменяться ромашками указанным образом. Пронумеруем стоящих девочек, например, слева направо. Для того, чтобы у первой девочки оказалась ромашка, она должна поменяться ромашками с третьей девочкой. Тогда у пятой девочки останется ромашка, только тогда, когда она поменяется ромашками с седьмой девочкой, девятая должна поменяться с одиннадцатой, тринадцатая с пятнадцатой, и так далее. Таким образом, все девочки, стоящие на нечетных местах, должны разбиться на пары. Но это невозможно, так как на нечетных местах – 17 девочек.

Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

3.1. Даны 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число ещё раз увеличили на 1. На сколько изменилась сумма квадратов на этот раз?

Ответ: увеличилась на 200.

Решение. Пусть даны числа: $a_1 - 1$; $a_2 - 1$; ...; $a_{100} - 1$. По условию: $(a_1 - 1)^2$ + $(a_2 - 1)^2$ + ... + $(a_{100} - 1)^2$ = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{100}^2. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим: $2(a_1 + a_2 + ... + a_{100})$ = 100. Тогда $(a_1 + 1)^2$ + $(a_2 + 1)^2$ + ... + $(a_{100} + 1)^2$ – (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{100}^2) = $2(a_1 + a_2 + ... + a_{100})$ + 100 = 200.

Условию задачи удовлетворяет любой исходный набор ста чисел, сумма которых равна (–50).

3.2. Внутри квадрата отмечена произвольная точка *M*. Можно ли этот квадрат разрезать не более, чем на три прямоугольника, и сложить из них квадрат так, чтобы точка *M* стала его центром? (*Разрезы не должны проходить через точку M*.)

Ответ: можно.

Решение. Пусть точка *M* расположена внутри квадрата *ABCD* так, что ее расстояния до сторон *AB* и *AD* равны *x* и *y* соответственно. Без ограничения общности можно считать, что сторона квадрата равна 2, $x \le 1$, $y \le 1$.

Если знаки неравенства строгие, то проведем два разреза параллельно сторонам *CD* и *BC*: на расстоянии 1 – *x* от *CD* и на расстоянии 1 – *y* от *BC* (см. рис. 2). Переместим два прямоугольника так, как показано на этом рисунке, и получим квадрат *EFGH*. Расстояние от точки *M* до любой его стороны равно 1, то есть *M* – центр этого квадрата.

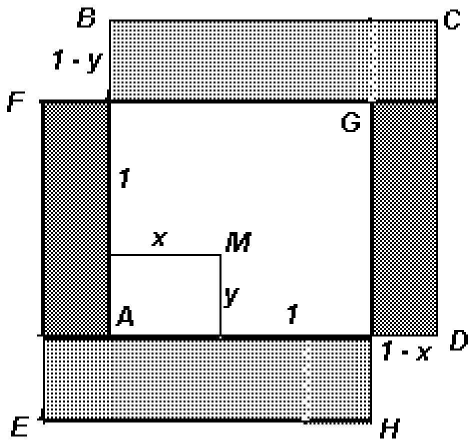


Рис. 2

Если одно из неравенств оказывается равенством, то достаточно отрезать и переместить один прямоугольник, а если в обоих случаях стоит знак равенства, то *M* – уже центр квадрата *ABCD*, поэтому разрезать его не потребуется.

3.3. Зубной врач запретил Соне съедать больше ***десяти*** карамелек в день, причём, если в какой-то день она съедает больше ***семи*** карамелек, то в следующие два дня ей нельзя съедать более ***пяти*** карамелек за день. Какое наибольшее количество карамелек Соня сможет съесть за 25 дней, следуя указаниям зубного врача?

Ответ: 178 карамелек.

Решение. Если Соня будет послушной девочкой и будет съедать по 7 карамелек в день, то за каждые три дня она съест 21 конфету. Если же Соня съест в какой-то день (кроме двух последних) 10 карамелек, то в следующие два дня она съест 5 + 5 = 10 карамелек, поэтому за 3 дня будет съедено 20 конфет. Таким образом, при равномерном съедании конфет их количество за каждые три дня будет больше. Так как 25 = 3·8 + 1, то в последний день можно съесть 10 карамелек (это выгоднее, чем 10 карамелек в предпоследний день, так как 7 + 10 > 10 + 5). Таким образом, искомое количество равно $21 \cdot 8 + 10 = 178$ конфет.

Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

4.1. Бригада из нескольких рабочих за 7 полных дней может выполнить такое же задание, какое может выполнить эта же бригада без двух человек за несколько полных дней, и такое же, как без шести человек за несколько полных дней. Сколько рабочих в бригаде? (*Производительность рабочих одинаковая*).

Ответ: 9 рабочих.

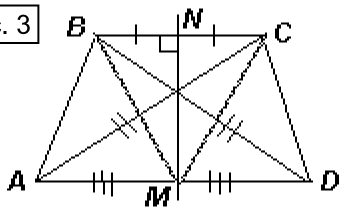
Решение. Пусть в бригаде – x рабочих; время, за которое бригада выполняет задание без двух человек – t_1 дней, а без шести человек – t_2 дней. Дневную производительность одного рабочего примем за единицу.

Из условия задачи следует, что $7x = (x - 2)t_1 = (x - 6)t_2$. Тогда из первого равенства: $t_1 = \frac{7x}{x-2} \Leftrightarrow t_1 = 7 + \frac{14}{x-2}$. Так как t_1 и x – натуральные числа, то $x - 2$ является делителем числа 14. Кроме того, из условия задачи следует, что $x > 6$, значит, $x - 2 > 4$. Следовательно, $x - 2 = 7$ или $x - 2 = 14$, то есть $x = 9$ или $x = 16$.

Аналогично, из второго равенства: $t_2 = \frac{7x}{x-6} \Leftrightarrow t_2 = 7 + \frac{42}{x-6}$, то есть $x - 6$ является делителем числа 42. Проверим на эту делимость полученные значения x. Так как 42 делится на $9 - 6 = 3$, но не делится на $16 - 6 = 10$, то $x = 9$.

4.2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны, а серединный перпендикуляр к стороне BC проходит через середину стороны AD. Могут ли длины всех сторон четырёхугольника быть различными?

Рис. 3



Ответ: не могут.

Решение. Докажем, что стороны AB и CD данного четырёхугольника равны.

Пусть M и N – середины сторон AD и BC соответственно. Тогда серединный перпендикуляр MN к отрезку BC содержит медиану и высоту треугольника BMC, значит, $MB = MC$ (см. рис. 3). Следовательно, равны треугольники AMC и DMB (по трём сторонам). Тогда $\angle AMC = \angle DMB$, поэтому $\angle DMC = \angle AMB$ (углы, смежные с равными). Значит, равны треугольники DMC и AMB (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $DC = AB$.

Из приведенного рассуждения также следует, что MN – ось симметрии четырёхугольника ABCD, значит, ABCD – равнобокая трапеция или прямоугольник.

4.3. Взяли две одинаковые колоды из 36 карт, каждую перетасовали и положили одну колоду на другую. Затем подсчитали количество карт, лежащих между каждой парой одинаковых карт: между дамами пик, между тузами червей, и так далее. Чему равна сумма всех 36 найденных чисел?

Ответ: 1260.

Решение. <u>Первый способ</u>. Рассмотрим самую нижнюю карту нижней колоды и такую же карту верхней колоды, пусть, например, это короли треф. Предположим, что в верхней колоде король треф лежит на семерке бубен. Заметим, что если мы в верхней колоде поменяем местами короля треф и семерку бубен, то количество карт, лежащих между королями треф, на одну уменьшится, а количество карт, лежащих между семерками бубен, на одну увеличится. Значит, искомая сумма от такой перестановки не изменится.

Рассуждая аналогично, можно постепенно менять местами короля треф из верхней колоды с картами, на которых он лежит, до тех пор, пока король треф не станет самой нижней картой в верхней колоде. Далее рассмотрим вторую снизу карту нижней колоды и повторим описанную процедуру с такой же картой из верхней колоды, и так далее.

Следовательно, постепенно меняя местами соседние карты верхней колоды, можно, не изменяя искомой суммы, расположить карты верхней колоды в том же порядке, что и в нижней. Тогда между любыми двумя одинаковыми картами будет лежать ровно 35 карт, поэтому искомая сумма равна $35 \cdot 36 = 1260$.

Второй способ. Пронумеруем числами от 1 до 36 карты верхней колоды сверху вниз и карты нижней колоды также сверху вниз. Пусть для карты номер 1 верхней колоды соответствующая ей карта нижней колоды имеет номер k_1. Тогда между ними находится $(36 - 1)$ карт верхней колоды и $(k_1 - 1)$ карт нижней колоды, то есть $(36 + k_1 - 2)$ карт. В общем виде: если для карты с номером i верхней колоды соответствующая карта нижней имеет номер k_i, то между ними $(i - 1)$ карта верхней колоды и $(k_i - 1)$ карт нижней колоды, то есть $(i + k_i - 2)$ карт.

Таким образом, искомая сумма $S = (36 + k_1 - 2) + (35 + k_2 - 2) + (34 + k_3 - 2) + \ldots + (i + k_i - 2) + \ldots + (1 + k - 2) = (36 + 35 + 34 + \ldots + 1) + (k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{36}) - 2 \cdot 36$. Заметим, что $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{36} = 36 + 35 + 34 + \ldots + 1 = (36 + 1) \cdot 18$, так как $(k_1; k_2; k_3; \ldots; k_{36})$ – это некоторая перестановка чисел 1, 2, 3, … , 36. Значит, $S = 2 \cdot 37 \cdot 18 - 2 \cdot 36 = 1260$.

Третий способ. Рассмотрим по отдельности сколько раз была подсчитана каждая карта в верней и в нижней колоде. В верхней колоде самая верхняя карта не была подсчитана ни разу, так как она не находится между какими-либо картами. Вторая сверху карта была подсчитана один раз, так находится между одной парой одинаковых карт: верхней картой верхней колоды и такой же картой нижней колоды. Аналогично, следующая карта сверху подсчитана два раза, и так далее, то есть n-ая сверху карта верхней колоды была подсчитана $(n - 1)$ раз, так как находится между $(n - 1)$ парой одинаковых карт.

Аналогичные рассуждения справедливы и для карт нижней колоды, если «двигаться» снизу вверх: самая нижняя карта не подсчитана ни разу, лежащая на ней – один раз, и так далее, k-ая карта снизу подсчитана $k - 1$ раз.

Таким образом, искомая сумма равна $(0 + 1 + 2 + .. + 35) \cdot 2 = (0 + 35) \cdot 18 \cdot 2 = 1260$.