8 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Известно, что $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$. Докажите, что $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{1}{ab}$.

Решение. Первый способ. Преобразуем левую часть доказываемого равенства: $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$ = $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ = $\frac{1}{a+b}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ = $\frac{1}{a+b}\cdot\frac{b+a}{ab}$ = $\frac{1}{ab}$, что и требовалось.

Второй способ. Преобразуем данное равенство, умножив обе его части на *a* + *b*: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{a}-\frac{a+b}{b}=1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{b}{a}\right)-\left(\frac{a}{b}+1\right)$ = 1 $\Leftrightarrow$ $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1 \Rightarrow b^2-a^2=ab$. Разделив обе части последнего равенства на $(ab)^2$, получим: $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{1}{ab}$, что и требовалось.

1.2. Можно ли произвольный ромб разрезать не более, чем на две части так, чтобы из этих частей сложить прямоугольник?

Ответ: можно.

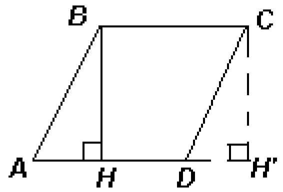


Рис. 1

Решение. Если ромб является квадратом, то разрезать не потребуется. В ромбе *ABCD*, отличном от квадрата, проведем высоту *BH* из вершины тупого угла. Она лежит целиком внутри ромба, так как *AH* < *AB* = *AD*. Отрежем треугольник *ABH* и приложим его к стороне *CD*, совместив *AB* и *CD*, тогда *HBCH*' – прямоугольник (см. рис. 1).

Отметим, что не обязательно проводить высоту из вершины. Достаточно, чтобы проведенная высота лежала внутри ромба. В этом случае, прямоугольник будет складываться из двух прямоугольных трапеций.

Отметим также, что описанный способ разрезания можно обобщить на произвольный параллелограмм.

1.3. Найдите наименьшее простое число, которое можно представить в виде суммы пяти различных простых чисел. Ответ объясните.

Ответ: 43.

Решение. Так как слагаемых должно быть нечетное количество, то каждое из них должно быть нечетным. Рассмотрим сумму пяти наименьших простых нечетных чисел: 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 39. Она является составным числом, поэтому одно из слагаемых надо попробовать заменить на следующее простое число 17. Новая сумма будет наименьшей, если на 17 заменить наибольшее из слагаемых: 3 + 5 + 7 + 11 + 17 = 43 – простое число.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. В корзине лежало не более 70 грибов, среди которых 52% – белые. Если выкинуть 3 самых маленьких гриба, то белых станет половина. Сколько грибов в корзине?

Ответ: 25 грибов.

Решение. Пусть всего в корзине *x* грибов, из которых белых грибов – *y* (*x* и *y* – целые числа). Тогда *y* = 0,52*x*, то есть $y=\frac{13}{25}x$. Следовательно, *x* делится на 25. Кроме того, *x* < 70 è *x* – нечётное (так как *x* – 3 должно делиться на 2). Этим условиям удовлетворяет только *x* = 25, тогда *y* = 13. Белых грибов станет половина, если среди трех выкинутых грибов будет 2 белых.

2.2. Прямая, перпендикулярная гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC*, пересекает прямые *AC* и *BC* в точках *E* и *D* соответственно. Найдите угол между прямыми *AD* и *BE*.

Ответ: 90°.

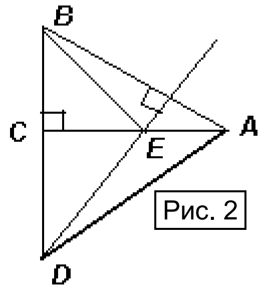


Рис. 2

Решение. Рассмотрим треугольник *ABD* (см. рис. 2). Из условия задачи следует, что прямые *AC* и *DE* содержат его высоты, то есть *E* – точка пересечения высот этого треугольника (*ортоцентр*).

Следовательно, прямая BE содержит третью высоту треугольника, то есть $BE \perp AD$.

2.3. Докажите, что натуральные числа n и n^{2017} оканчиваются на одну и ту же цифру.

Решение. Если число n оканчивается на 0, 1, 5 или 6, то и любая степень этого числа оканчивается на ту же самую цифру.

Если число n оканчивается на 4 или на 9, то последние цифры степеней этого числа чередуются в зависимости от четности показателя степени, то есть образуют цикл длины два (4 – 6 – 4 или 9 – 1 – 9 соответственно).

Аналогично, если число n оканчивается на 2, 3, 7 или 8, то последние цифры степеней этого числа образуют цикл длины четыре (2 – 4 – 8 – 6 – 2, 3 – 9 – 7 – 1 – 3, 7 – 9 – 3 – 1 – 7 или 8 – 4 – 2 – 6 – 8 соответственно).

Так как 2017 – 1 = 2016, а 2016 делится на 4 и на 2, то при любых значениях n число n^{2017} оканчивается на ту же цифру, что и число n.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Решите уравнение: $\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49} = \frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}$.

Ответ: 0; 99; $\frac{49^2+50^2}{99}$.

Решение. Приведем к общему знаменателю выражения в левой и правой частях уравнения. Получим: $\frac{99x-49^2-50^2}{50\cdot 49}=\frac{99x-49^2-50^2}{(x-50)(x-49)}$. Это равенство будет верным при условии, что $x \neq 49$ и $x \neq 50$, если:

1) числители полученных дробей равны нулю, то есть $99x-49^2-50^2=0$. Тогда $x=\frac{49^2+50^2}{99}$;

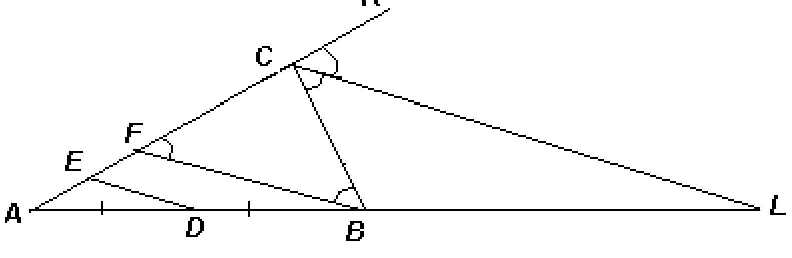
2) равны знаменатели полученных дробей, а числители отличны от нуля, то есть $50\cdot 49=(x-50)(x-49) \Leftrightarrow x^2-99x=0 \Leftrightarrow x=0$ или $x=99$.

Отметим, что $\frac{49^2+50^2}{99}$ = $\frac{4901}{99}$ = *49*$\frac{50}{99}$, *но получать это значение в явном виде необязательно.*

3.2. В треугольнике ABC: AC = 8, BC = 5. Прямая, параллельная биссектрисе внешнего угла C, проходит через середину стороны AB и точку E на стороне AC. Найдите AE.

Ответ: 1,5.

Рис. 3



Решение. Пусть CL – биссектриса внешнего угла C, D – середина AB, K – точка на продолжении стороны AC за точку C (см. рис. 3).

<u>Первый способ</u>. Через вершину B проведем прямую, параллельную CL, F – точка ее пересечения с прямой AC. Тогда треугольник BCF – равнобедренный. Действительно, по свойствам параллельных прямых $\angle CFB = \angle KCL = \angle BCL = \angle CBF$, значит, $CF = CB$.

Так как $AC > BC$, то F лежит на отрезке AC. Кроме того, так как $DE \parallel BF$ и D – середина AB, то $AE = EF$ (по теореме Фалеса).

Таким образом, $AE=\frac{AC-CF}{2}=\frac{AC-BC}{2}$ = 1,5.

<u>Второй способ</u>. По теореме о биссектрисе внешнего угла треугольника $\frac{LA}{LB}=\frac{CA}{CB}=\frac{8}{5}$.

Тогда, по теореме о пропорциональных отрезках, $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AL}=\frac{3}{16}$.

Значит, $AE = \frac{3}{16}AC$ = 1,5.

3.3. Сколько существует восьмизначных чисел, в записи которых цифры идут в порядке убывания?

Ответ: 45.

Решение. Все десять цифр, записанные в порядке убывания, образуют десятизначное число: 9876543210. Любое восьмизначное число, удовлетворяющее условию задачи, получается из этого десятизначного числа вычеркиванием любых двух цифр (без учета порядка вычеркивания). Первую цифру можно вычеркнуть десятью способами, а вторую цифру – девятью способами.

Так как порядок вычеркивания цифр значения не имеет, то общее количество способов вычеркивания двух цифр равно $\frac{10 \cdot 9}{2}$ = 45.

Количество способов выбрать k элементов из множества, в котором n элементов, называется ***количеством сочетаний из n элементов по k****, обозначается C_n^k и вычисляется по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. В нашем случае, искомое число равно $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2}$ = 45.*

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Â выражении 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1 расставили скобки так, что значение выражения оказалось целым числом. Какое наименьшее число могло получиться?

Ответ: 7.

Решение. Для того, чтобы значение выражения было целым, после расстановки скобок и записи полученного выражения в виде обыкновенной дроби число 7 должно оказаться в числителе. Следовательно, значение данного выражения – не меньше, чем 7.

Это достигается, например, так: $10:9:(8:7:(6:(5:4:(3:2:1)))) = \frac{10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} = 7$.

Убедиться в том, что такая расстановка скобок приведет к получению именно этой дроби, значение которой равно 7, можно, например, выполнив действия:

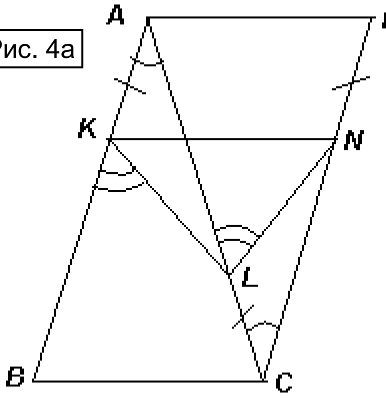
1) 3 : 2 : 1 = $\frac{3}{2 \cdot 1}$; 2) 5 : 4 : $\frac{3}{2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3}$; 3) 6 : $\frac{5 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 1}$; 4) 8 : 7 : $\frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}$;

5) 10 : 9 : $\frac{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(10 \cdot 4) \cdot 7 \cdot (6 \cdot 3)}{(8 \cdot 5) \cdot (9 \cdot 2)}$ = 7.

4.2. На боковых сторонах *AB* и *AC* равнобедренного треугольника *ABC* отметили точки *K* и *L* соответственно так, что *AK* = *CL* и ∠*ALK* + ∠*LKB* = 60°. Докажите, что *KL* = *BC*.

Решение. <u>Первый способ</u>. Достроим данный треугольник до параллелограмма *ABCD* и проведем отрезок *KN*, параллельный *BC* (см. рис. 4а). Тогда *CN* = *CD* – *DN* = *AB* – *AK* = *BC* – *CL* = *AL*. Учитывая, что ∠*NCL* = ∠*LAK*, ïîëó÷èì: Δ*NCL* = Δ*LAK* (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, *NL* = *LK*. Кроме того, ∠*NLA* = ∠*LKB*, так как это соответствующие внешние углы в равных треугольниках.

Рис. 4а



Тогда ∠*NLK* = ∠*ALK* + ∠*NLA* = ∠*ALK* + ∠*LKB* = 60°, то есть треугольник *KLN* – равносторонний. Значит, *KL* = *KN* = *BC*, что и требовалось.

<u>Второй способ</u>. Через точки *K* и *L* проведем прямые, параллельные *BC*, которые пересекут *AC* и *AB* в точках *M* и *N* соответственно (см. рис. 4б). Тогда *KMLN* – равнобокая трапеция, значит, *MN* = *KL* и ∠*MNK* = ∠*MLK*. Пусть *P* –

точка пересечения диагоналей трапеции, тогда $\angle NPL = \angle PNK + \angle NKP = \angle ALK + \angle LKB = 60°$.

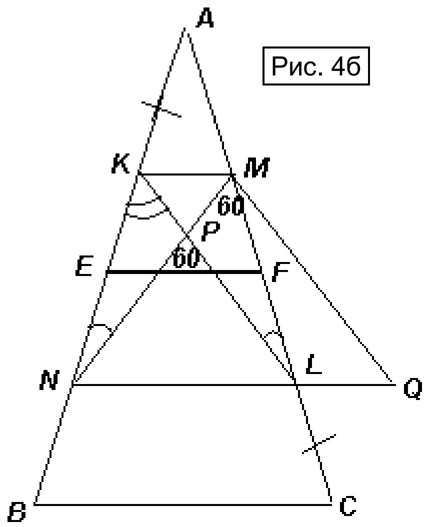


Рис. 4б

Через точку M проведем прямую, параллельную KL, до пересечения с прямой NL в точке Q. Тогда в треугольнике MNQ: $MN = MQ$ и $\angle QMN = 60°$, значит, этот треугольник равносторонний. Тогда $MQ = NQ$, поэтому $KL = NL + LQ = NL + KM$.

Осталось доказать, что $NL + KM = BC$. Для этого можно провести среднюю линию EF треугольника ABC, которая будет и средней линией трапеции $KMLN$ (так как $AM = AK = CL = BN$). Тогда $NL + KM = 2EF = BC$, что и требовалось.

В заключительной фазе решения можно вместо использования средней линии доказывать, что BNQC – параллелограмм.

4.3. Некоторые клетки белого прямоугольника размером 3×7 произвольным образом покрасили в черный цвет. Докажите, что обязательно найдутся четыре клетки одного цвета, центры которых являются вершинами некоторого прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам исходного прямоугольника.

Решение. Предположим, что таких четырех клеток нет. Расположим данный прямоугольник так, чтобы у него было 7 строк и 3 столбца. Рассмотрим первые два его столбца. В образованном ими прямоугольнике две клетки одного цвета могут встретиться не более, чем в одной строчке, то есть не более, чем в одной строчке, – две белые клетки и не более, чем в одной строчке – две черные (в противном случае найдется прямоугольник, указанный в условии). Значит, не менее, чем в пяти его строчках, расположены клетки разного цвета. Тогда, не менее, чем в трех строчках (из этих пяти) черная и белая клетки будут располагаться в одинаковом порядке, например, слева – черная, справа – белая.

Рассмотрим три такие строчки и третий столбец. В третьем столбце в рассмотренных строчках есть хотя бы две клетки одного цвета. Если они черные, то искомый прямоугольник образуют их центры и центры черных клеток первого столбца, а если они белые, то искомый прямоугольник образуют их центры вместе с центрами белых клеток второго столбца.