9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Известно, что значения выражений $\frac{b}{a}$ и $\frac{b}{c}$ находится в интервале (–0,9; –0,8). В каком интервале лежат значения выражения $\frac{c}{a}$?

Ответ: в интервале $\left(\frac{8}{9};\frac{9}{8}\right)$.

Решение. Запишем заданные условия в виде неравенств: $-0{,}9<\frac{b}{a}<-0{,}8$ и $-0{,}9<\frac{b}{c}<-0{,}8$. Умножив почленно каждое неравенство на –1, получим: $0{,}9>-\frac{b}{a}>0{,}8$ (1) и $0{,}9>-\frac{b}{c}>0{,}8$ (2). В неравенствах (1) и (2) все члены положительны.

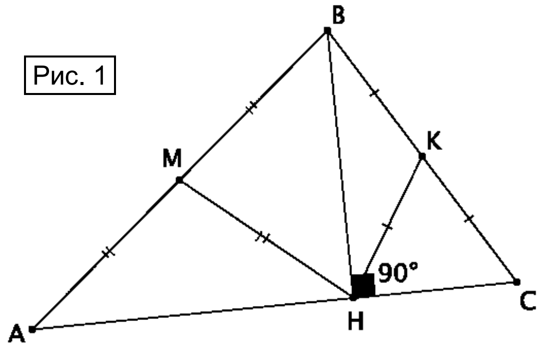
Так как $x > y > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y}>\frac{1}{x}>0$, то $\frac{10}{8}>-\frac{c}{b}>\frac{10}{9}$ (3). Перемножим почленно неравенства (3) и (1): $\frac{10}{8}\cdot\frac{9}{10}>-\frac{c}{b}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)>\frac{10}{9}\cdot\frac{8}{10} \Leftrightarrow \frac{9}{8}>\frac{c}{a}>\frac{8}{9}$.

1.2. Верно ли, что любой треугольник можно разбить на 4 равнобедренных треугольника?

Ответ: верно.

Решение. В любом треугольнике высота, проведенная к наибольшей стороне, лежит внутри треугольника. Рассмотрим треугольник *ABC*, в котором *AC* – наибольшая сторона, и проведем его высоту *BH* (см. рис. 1). Она разбивает исходный треугольник на два прямоугольных треугольника. В этих прямоугольных треугольниках проведем медианы *HM* и *HK* к гипотенузам. Они разобьют каждый прямоугольный треугольник на два равнобедренных треугольника.

Рис. 1



Таким образом, произвольный треугольник *ABC* разобьется на 4 равнобедренных треугольника: *AMH*, *BMH*, *BKH* и *CKH*

1.3. Верно ли, что любое положительное четное число можно представить в виде произведения целых чисел, сумма которых равна нулю?

Ответ: верно.

Решение. Действительно, для любого $k > 0$ выполняется равенство $2k = 2k\cdot(-1)^{2k}$.

Отметим, что для нечетных чисел это не так, в частности, нечетные простые числа представить требуемым образом не удается.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Решите уравнение: $\frac{x^5}{(x-2)^2}+\frac{(x-2)^2}{x}=2x^2$.

Ответ: 1.

Решение. <u>Первый способ</u>. Учитывая, что $x \neq 0$, разделим обе части уравнения на x, и преобразуем: $\frac{x^4}{(x-2)^2}-2x+\frac{(x-2)^2}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{|x-2|}-\frac{|x-2|}{x}\right)^2=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{|x-2|}-\frac{|x-2|}{x}=0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^3-(x-2)^2=0, \\ x\neq 0,\ x\neq 2 \end{cases}$. Так как $x^3-(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x^3-x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4)=0$, то $x = 1$.

Второй способ. Учитывая, что $x \neq 0$, разделим обе части уравнения на x^2: $\frac{x^3}{(x-2)^2}+\frac{(x-2)^2}{x^3}=2$. После замены $\frac{x^3}{(x-2)^2}=y$ получим уравнение $y+\frac{1}{y}=2$, единственным решением которого является y = 1. Тогда $\begin{cases} x^3=(x-2)^2, \\ x \neq 0,\ x \neq 2 \end{cases}$ и дальнейшие выкладки аналогичны приведенным выше.

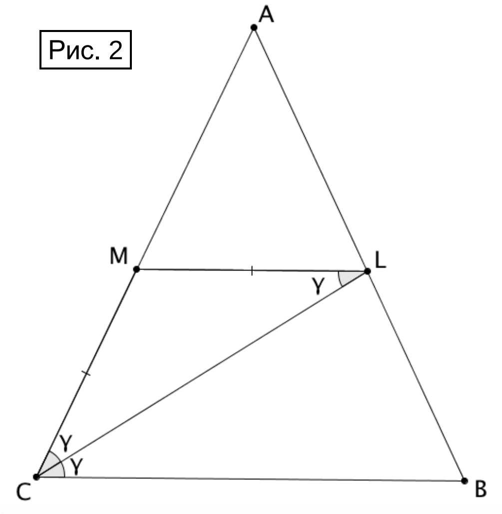
2.2. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *BC* проведена биссектриса *CL*. Докажите, что *CL* < 2*BL*.

Решение. Проведем через точку *L* прямую, параллельную *BC*, *M* – точка пересечения этой прямой со стороной *AC* (см. рис. 2). Пусть $\angle BCL = \angle MCL = \gamma$, тогда $\angle MLC = \angle BCL = \gamma$, так как *LM* || *BC*.

Следовательно, треугольник *MCL* – равнобедренный: *MC* = *ML*. Кроме того, *ÑMLB* – равнобокая трапеция, значит, *BL* = *MC*.

Из треугольника *MCL*: *CL* < *MC* + *ML* = 2*BL*, что и требовалось.

Рис. 2



2.3. Существует ли прямоугольный треугольник, у которого длины двух сторон – целые числа, а длина третьей стороны равна $\sqrt{2016}$?

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим, например, прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{2016}$ и 3. Его гипотенуза равна $\sqrt{\left(\sqrt{2016}\right)^2+3^2}$ = $\sqrt{2025}$ = 45.

Указанный пример – это треугольник с наименьшими сторонами из возможных, но существуют и другие примеры. Приведем еще два: 1) катеты $\sqrt{2016}$ *и 10, гипотенуза 46; 2) катеты* $\sqrt{2016}$ *и 22, гипотенуза 50.*

Отметим, что треугольника с гипотенузой $\sqrt{2016}$*, удовлетворяющего условию задачи, не существует.*

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. По кольцевой дорожке длиной 60 см движутся в обе стороны муравьи со скоростью 1 см/с. Когда два муравья сталкиваются, они мгновенно разворачиваются и движутся с той же скоростью в противоположных направлениях. Оказалось, что за минуту произошло 48 попарных столкновений. Сколько муравьев могло быть на дорожке?

Ответ: 10 или 11 или 14 или 25.

Решение. Заметим, что ситуация не изменится, если считать, что после столкновении муравьи не разворачиваются, а продолжают свое движение, не меняя направления и скорости. Пусть какие-то два муравья столкнулись, тогда через 30 секунд после этого каждый из них проползет половину круга и они столкнутся вновь. Следовательно, у каждой такой пары произойдет ровно 2 столкновения за минуту.

Таким образом, если *x* муравьев ползут в одну сторону, а *y* муравьев – в противоположную, то $2xy = 48 \Leftrightarrow xy = 24$. Следовательно, искомая величина $x + y$ может принимать значения: 1 + 24 = 25, 2 + 12 = 14, 3 + 8 = 11, 4 + 6 = 10.

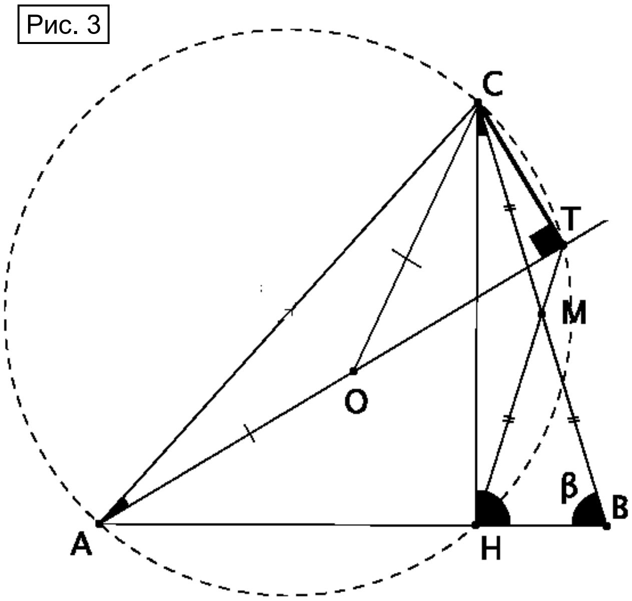
3.2. Пусть CH – высота остроугольного треугольника ABC, O – центр описанной около него окружности. Точка T – проекция вершины C на прямую AO. В каком отношении прямая TH делит сторону BC?

Ответ: 1 : 1.

Решение. Пусть TH и BC пересекаются в точке M, $\angle ABC = \beta$ (см. рис. 3). Тогда $\angle AOC = 2\beta$, значит, $\angle CAT = 90° - \beta$.

Так как $\angle CTA = \angle CHA = 90°$, то четырехугольник $ACTH$ – вписанный. Следовательно, $\angle CHT = \angle CAT = 90° - \beta$, тогда $\angle BHT = \beta$. Таким образом, $HM = BM$, то есть HM – медиана прямоугольного треугольника BHC.

Рис. 3



3.3. Дано 100 целых чисел. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго вычли сумму цифр третьего числа, и так далее, наконец, из 100-го числа вычли сумму цифр первого числа. Могут ли эти разности оказаться соответственно равными 1, 2, … , 100 в каком-то порядке?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Обозначим данные числа через a_1, a_2, a_3, … a_{100}, а соответствующие суммы их цифр через s_1, s_2, s_3, … s_{100}. Тогда после вычитания получим: $a_1 - s_2$, $a_2 - s_3$, $a_3 - s_4$, …, $a_{100} - s_1$. Сложим эти выражения и перегруппируем слагаемые: $(a_1 - s_1) + (a_2 - s_2) + … + (a_{100} - s_{100}) = 1 + 2 +…+ 100 = 5050$. Но любое целое число и сумма его цифр имеют одинаковый остаток от деления на 9, следовательно, выражение в левой части равенства делится на 9, а число 5050 не кратно девяти. Противоречие.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3 - y = 6, \\ y^3 - z = 6, \\ z^3 - x = 6 \end{cases}.$

Ответ: (2; 2; 2).

Решение. <u>Первый способ</u>. Вычтем из первого уравнения второе, а из второго уравнения – третье. Получим следствие данной системы: $\begin{cases} x^3 - y^3 = y - z, \\ y^3 - z^3 = z - x \end{cases}.$

Докажем, что $x = y = z$. Действительно,

1) Если $x \ge y$, то $y \ge z$ (из первого уравнения), тогда $z \ge x$ (из второго уравнения). Следовательно, $x \ge y \ge z \ge x$, откуда $x = y = z$.

2) Если $x \le y$, то $y \le z$ (из первого уравнения), тогда $z \le x$ (из второго уравнения). Следовательно, $x \ge z \ge y \ge x$, откуда $x = y = z$.

Таким образом, все уравнения исходной системы равносильны уравнению $x^3 - x = 6$. Приведем его к виду $x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 0$ и разложим левую часть на множители: $(x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0$, откуда $x = 2$.

Полученное уравнение можно решить иначе: угадать корень $x = 2$, после чего разделить многочлен $x^3 - x - 6$ на $x - 2$ и получить квадратное уравнение, не имеющее корней.

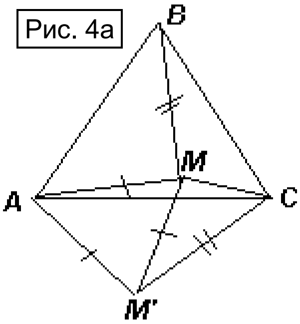
Второй способ. Из второго уравнения системы: $z = y^3 - 6$. Подставив z в третье уравнение, получим: $(y^3 - 6)^3 - x = 6$. Подставив в это уравнение $y = x^3 - 6$ (из первого уравнения системы), получим: $((x^3 - 6)^3 - 6)^3 - 6 = x$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 6$, тогда полученное уравнение примет вид: $f(f(f(x))) = x$. Так как функция $f(x)$ – возрастающая, то это уравнение равносильно уравнению $f(x) = x$.* Тем самым получим уравнение $x^3 - x - 6 = 0$, решение которого рассмотрено выше.

**Доказать, что $f(f(f(x))) = x \Leftrightarrow f(x) = x$, если $f(x)$ – возрастающая функция, можно, например, так. Справа налево справедливость этого утверждения очевидна. Пусть x_0 – корень левого уравнения, но не является корнем правого, то есть $f(x_0) \neq x_0$. Если $f(x_0) > x_0$, то, в силу возрастания функции f, $f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$, значит, и $f(f(f(x_0))) > f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$ – противоречие. Аналогично рассматривается случай, когда $f(x_0) < x_0$.*

4.2. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка M так, что $\angle AMC = 150°$. Докажите, что отрезки AM, BM и CM таковы, что сумма квадратов двух из них равна квадрату третьего.

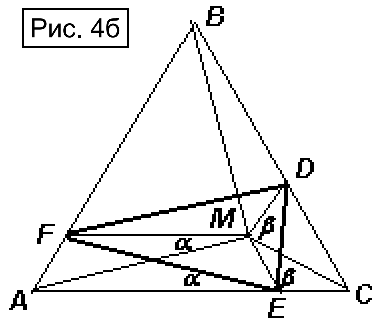
Рис. 4а



Решение. Первый способ. Рассмотрим поворот с центром A на угол 60° по часовой стрелке. Образом точки B будет точка C, а образом точки M – некоторая точка M', тогда $CM' = BM$ (см. рис. 4а). Кроме того, в треугольнике MAM': $AM' = AM$ и $\angle M'AM = 60°$, значит, этот треугольник – равносторонний, то есть $MM' = AM$ и $\angle AMM' = 60°$. Тогда $\angle CMM' = \angle AMC - \angle AMM' = 90°$, то есть треугольник CMM' – прямоугольный.

Следовательно, $BM^2 = CM'^2 = CM^2 + MM'^2 = CM^2 + AM^2$, что и требовалось.

Рис. 4б



Второй способ. Через точку M проведем прямые, параллельные сторонам треугольника, которые пересекут стороны BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно (см. рис. 4б). Тогда $AEMF$, $BFMD$ и $CDME$ – равнобокие трапеции, поэтому $AM = EF$, $BM = FD$ и $CM = DE$. Докажем, что треугольник DEF – прямоугольный.

Действительно, пусть $\angle AEF = \angle AMF = \alpha$, $\angle DEC = \angle DMC = \beta$. Так как $\angle EMD = \angle EMF = 120°$, а $\angle AMC = 150°$, то $\alpha + \beta = 90°$. Значит, $\angle DEF = 90°$.

Таким образом, $FD^2 = DE^2 + EF^2$,то есть $BM^2 = CM^2 + AM^2$, что и требовалось.

4.3. На столе лежит прямоугольный лист бумаги. Саша разрезает его по прямой на две части и кладёт части на стол. Потом он берёт одну из частей, снова режет по прямой на две части и кладёт части обратно на стол. Потом снова берёт со стола и разрезает одну часть, и так далее. Какое наименьшее количество разрезов необходимо сделать Саше, чтобы на столе оказалось, по крайней мере, 252 одиннадцатиугольника?

Ответ: 2015.

Решение. Заметим, что после одного разреза общее количество вершин увеличивается на две (если разрез проходит через две вершины), на три (если разрез проходит через вершину и точку внутри стороны) или на четыре (если разрез проходит через внутренние точки двух сторон). Пусть было сделано k разрезов, после чего получилось $k + 1$ частей, в которых суммарно не более, чем $4k + 4$ вершин.

Предположим, что среди полученных частей ровно 252 одиннадцатиугольника. Каждый из оставшихся кусков будет иметь не менее трех вершин, а всего вершин будет, не меньше, чем $252 \cdot 11 + (k + 1 - 252) \cdot 3 = 2772 + 3k - 753 = 3k + 2019 \leq 4k + 4$. Следовательно, $k \geq 2015$.

Покажем, что 2015 разрезов достаточно. Например, сначала разрежем исходный прямоугольник на 252 прямоугольника (251 разрез). Теперь, чтобы получить 252 одиннадцатиугольника, достаточно от каждого прямоугольника 7 раз отрезать по треугольнику, увеличивая каждый раз количество вершин на одну. Для этого потребуется еще $7 \cdot 252 = 1764$ разреза. Всего получим $251 + 1764 = 2015$ разрезов.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. График линейной функции $y = kx + k + 1$, где $k > 0$, пересекает оси координат в точках A и B. Какова наименьшая возможная площадь треугольника ABO (O – начало координат)?

Ответ: 2.

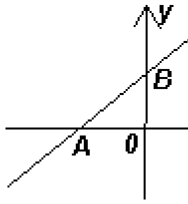


Рис. 5

Решение. Схематически изобразим график данной функции (см. рис. 5). Абсцисса точки A пересечения с осью OX: $0 = kx + k + 1$; $x = -\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Ордината точки B пересечения с осью OY: $y = k \cdot 0 + k + 1$; $y = k + 1$. Следовательно, $S_{ABO} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2}(k+1)\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + k + \frac{1}{k}\right)$. Так как наименьшее значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$, то и наименьшее значение S_{ABO} достигается при $k = 1$.

Таким образом, наименьшая возможная площадь треугольника ABO равна 2.

5.2. Две окружности касаются друг друга в точке C и прямой l в точках A и B. Прямая BC пересекает вторую окружность в точке D. Докажите, что угол BAD – прямой.

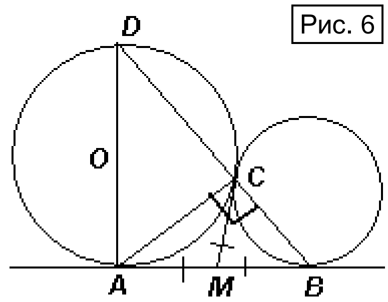


Рис. 6

Решение. Проведем общую внутреннюю касательную к данным окружностям, которая проходит через точку C. Пусть она пересекает прямую AB в точке M (см. рис. 6).

Так как касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, то $MA = MC = MB$. Из этого равенства следует, что треугольник ABC – прямоугольный, $\angle ACB = 90°$. Тогда смежный с ним угол ACD – также прямой, значит, AD – диаметр окружности. Следовательно, $DA \perp AB$.

5.3. Дано 10 натуральных чисел. Из десяти всевозможных сумм по 9 чисел всего 9 различных: 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95. Найдите исходные числа.

Ответ: 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 14.

Решение. Рассмотрим сумму десяти возможных сумм по 9 чисел. Так как каждое из исходных чисел входит в эту сумму 9 раз, то она делится на 9. Сумма девяти сумм, заданных в условии, равна 813, то есть имеет остаток 3 при делении на 9. Следовательно неизвестная сумма должна давать остаток 6 при делении на 9. Из девяти заданных сумм этому условию удовлетворяет только 87, значит, сумма десяти исходных чисел равна $(813 + 87) : 9 = 100$. Вычитая из числа 100 заданные суммы и учитывая, что 87 повторится дважды, получим ответ.