10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Составьте четыре различных четырёхзначных числа, образующих арифметическую прогрессию, используя в каждом числе только цифры 0, 1, 2 и 5, взятые по одному разу.

Ответ: 1025, 1520, 2015, 2510.

Указанные числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью 495. Их можно записать и в обратном порядке так, чтобы прогрессия была убывающей.

1.2. Существует ли многогранник, в котором для любых двух вершин найдутся еще две так, чтобы они образовывали квадрат?

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим, например, правильную треугольную призму, у которой боковое ребро равно ребру основания (см. рис. 1а). Она удовлетворяет условию, так как любые две ее вершины лежат в одной грани, которая является квадратом.

Рис. 1а

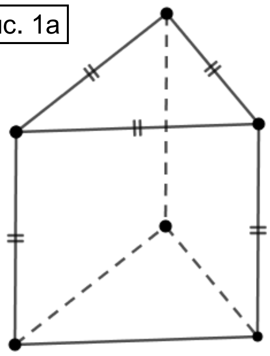
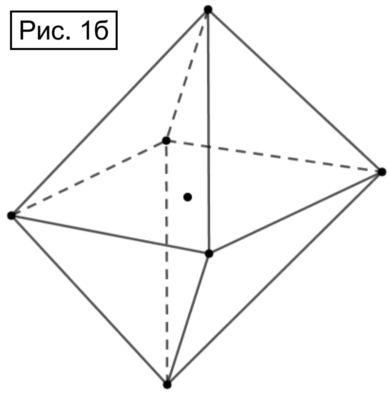


Рис. 1б



Другой возможный пример – правильный октаэдр (см. рис. 1б). Каждая его грань – равносторонний треугольник, а диагональные сечения являются квадратами. Любые две вершины октаэдра принадлежат одному из диагональных сечений.

1.3. Вася сделал домино, в котором на каждой доминошке – от нуля до семи точек в каждой её половине, причём, как и в обычном домино, присутствуют все варианты и никакие два не повторяются. Сколько доминошек в Васином наборе?

Ответ: 36.

Решение. В таком наборе есть 8 доминошек, у которых на каждой половине одинаковое количество точек. Количество остальных доминошек равно количеству способов выбрать из восьми различных чисел два, то есть равно $C_8^2 = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = 28$.

Итого: 8 + 28 = 36.

Отметим, что если помнить количество доминошек в стандартном наборе – 28, то достаточно к этому числу добавить 8 новых доминошек: от 0 – 7 до 7 – 7.

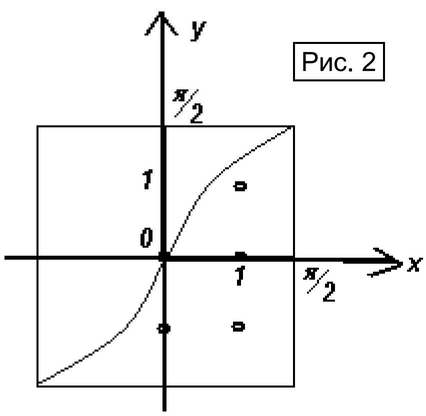
Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Найдите количество точек плоскости, удовлетворяющих условию $\begin{cases} \max(|x|;|y|) \le \frac{\pi}{2}; \\ 2y \le \pi \sin x \end{cases}$ и имеющих целочисленные координаты.

Ответ: пять точек.

Решение. Заметим, что $\max\left(|x|,|y|\right) \le \frac{\pi}{2} \iff \begin{cases} |x| \le \frac{\pi}{2}, \\ |y| \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Рис. 2



Множеством точек координатной плоскости, удовлетворяющих этой системе неравенств является квадрат (см. рис. 2). В этой же системе координат схематически построим график функции $y = \frac{\pi}{2}\sin x$ на

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Построенному квадрату принадлежат девять точек с целочисленными координатами, из которых точка (0; 0) принадлежит построенному графику, точки (1; 0), (0; –1), (1; –1) лежат ниже его, а точки, им симметричные относительно начала координат, – выше графика.

Точка (1; 1) также лежит ниже графика, так как $\frac{\pi}{2}\sin 1 > \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} > \frac{3\cdot 1{,}4}{4} > 1$. Тогда точка (–1; –1), симметричная ей относительно (0; 0), лежит выше графика.

Таким образом, требуемым условиям удовлетворяют пять точек: (0; 0), (1; 0), (0; –1), (1; –1) и (1; 1).

При таком способе решения можно не указывать в явном виде координаты точек, лежащих ниже графика. Возможно и другое оформление решения: алгебраически найти девять пар целых чисел, являющихся решением первого неравенства исходной системы, а затем осуществить их отбор непосредственной подстановкой во второе неравенство.

2.2. Внутри квадрата *ABCD* расположен квадрат *KLMN* (*в каждом квадрате вершины указаны в одном и том же порядке – по часовой стрелке*) . Докажите, что середины отрезков *AK*, *BL*, *CM* и *DN* также являются вершинами квадрата.

Решение. Пусть *E, F, G* и *H* – середины отрезков *AK, BL, CM* и *DN* соответственно (см. рис. 3). Докажем, что $\overline{EH}$ получается из $\overline{EF}$ поворотом на 90° по часовой стрелке.

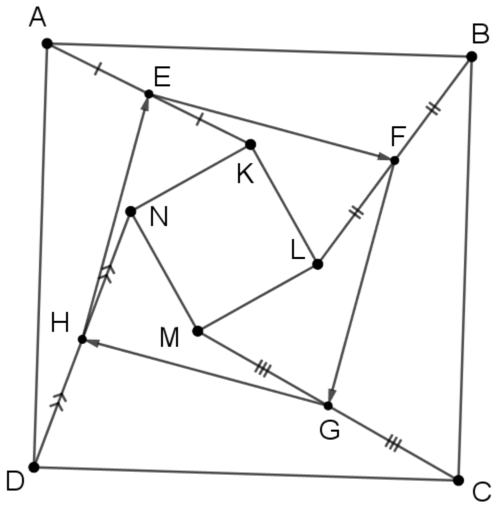


Рис. 3

Действительно, из четырехугольника *ABLK*: $\overline{EF} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{KL}\right)$*. Аналогично, из четырехугольника *ADNK*: $\overline{EH} = \frac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{KN}\right)$. При повороте на 90° по часовой стрелке образом $\overline{AB}$ является $\overline{AD}$, а образом $\overline{KL}$ является $\overline{KN}$, поэтому $\overline{EH}$ – образ $\overline{EF}$. Следовательно, $\overline{EH}\perp\overline{EF}$ и $\left|\overline{EH}\right| = \left|\overline{EF}\right|$. Аналогично, $\overline{FG}\perp\overline{FE}$ и $\left|\overline{FG}\right| = \left|\overline{FE}\right|$. Таким образом, *EFGH* – квадрат.

**Этот факт следует из того, что* $\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF}$ и $\overline{EF} = \overline{EK} + \overline{KL} + \overline{LF}$. *Складывая эти равенства и учитывая, что* $\overline{EA} + \overline{EK} = \overline{0}$ *и* $\overline{BF} + \overline{LF} = \overline{0}$*, получим использованное равенство.*

2.3. Трехзначное число разделили на его сумму цифр. Какой наибольший остаток мог при этом получиться?

Ответ: 24.

Решение. Наибольшая сумма цифр у числа 999. Она равна 27, а 999 делится на 27 без остатка. Существует три трехзначных числа, у которых сумма цифр равна 26: 998, 989, 899, но они не могут при делении на 26 давать остаток 25, так как числа, большие их на 1, не делятся на 26 (*можно в явном виде проверить, что их остатки при делении на 26 равны 10, 1 и 15 соответственно*). Существует шесть чисел с суммой цифр 25: 997, 979, 799, 988, 898, 889, из которых остаток 24 при делении на 25 имеет число 799, так как 800 делится на 25. Этот остаток и является наибольшим.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Решите уравнение: $\sqrt{2x-y-z}$ + $\sqrt{-x^2+4y+2z-8}$ = $\sqrt{\sqrt{yz}-x}$.

Ответ: (2; 2; 2), (4; 4; 4).

Решение. Возможны идейно близкие способы рассуждений, которые различаются только логической последовательностью.

<u>Первый способ</u>. Выражения, входящие в уравнение, имеют смысл, если выполняются следующие условия: $yz \geq 0$, $\sqrt{yz} \geq x \geq \frac{y+z}{2}$, $4y+2z \geq x^2+8$.

Рассмотрим два случая: 1) $yz = 0 \Leftrightarrow y = 0$ или $z = 0$:

Если $y = 0$, то $2z \geq x^2+8$, то есть $z > 0$. Тогда не выполняется неравенство $\sqrt{yz} \geq \frac{y+z}{2}$.

Если $z = 0$, то $4y \geq x^2+8$, то есть $y > 0$ и опять не выполняется то же самое неравенство.

2) $yz > 0$, тогда $y > 0$ и $z > 0$, так как $4y+2z \geq x^2+8$. Значит, можно использовать неравенство $\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}$. Соотнеся его с неравенством $\sqrt{yz} \geq x \geq \frac{y+z}{2}$ (см. выше), получим: $\frac{y+z}{2} = \sqrt{yz}$, тогда $y = z = x$.

Таким образом, исходное уравнение примет вид: $\sqrt{-x^2+6x-8} = 0$. Его решения: $x = 2$ или $x = 4$. Следовательно, $x = y = z = 2$ или $x = y = z = 4$.

<u>Второй способ</u>. Заметим, что $yz \geq 0$, причем случаи, когда $y \leq 0$, $z \leq 0$ или когда одна из переменных равна нулю, а другая принимает отрицательное значение, невозможны, иначе $-x^2+4y+2z-8$ < 0. Значит, $y \geq 0$ и $z \geq 0$, тогда $\frac{y+z}{2} \leq x \leq \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$,

откуда $\begin{cases} \frac{y+z}{2} = x \\ y = z \geq 0 \end{cases}$. Таким образом, $y = z = x$, что опять приводит к уравнению $\sqrt{-x^2+6x-8} = 0$, решения которого указаны выше.

3.2. На катетах прямоугольного треугольника *ABC* вне его построены квадраты *ACKL* и *BCMN*. Пусть *CE* – высота треугольника, опущенная на гипотенузу *AB*. Докажите, что угол *LEM* – прямой.

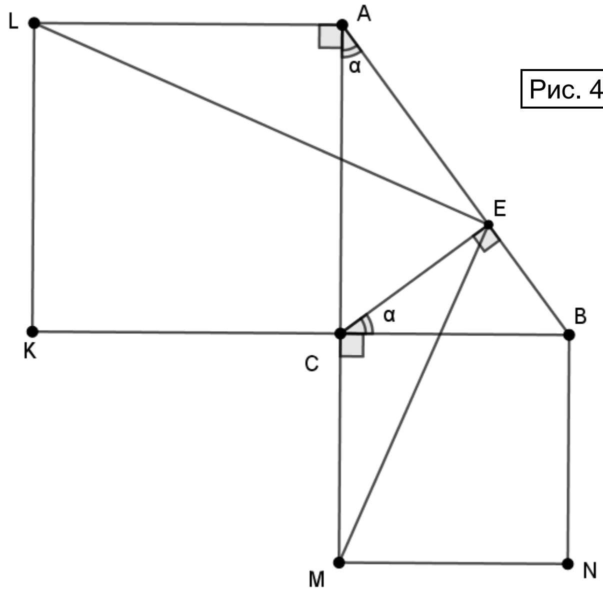


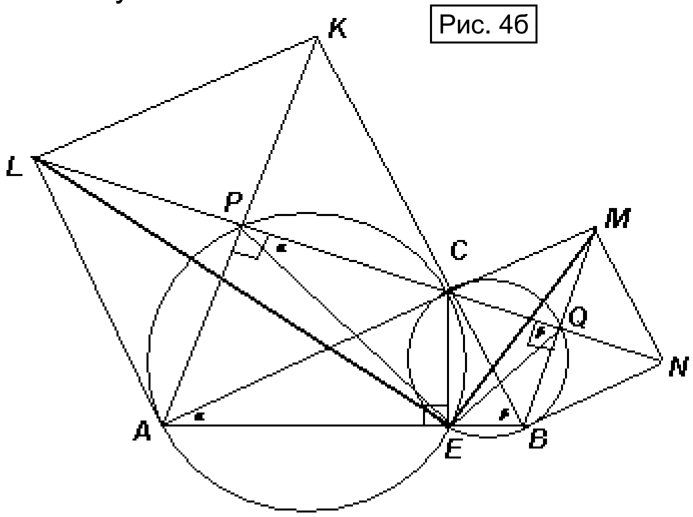
Рис. 4а

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть $\angle CAE$ = $\angle BCE$ = α (см. рис. 4а). Так как прямоугольные треугольники *ACE* и *CBE* подобны, то $\frac{AC}{AE} = \frac{CB}{CE}$. Учитывая, что *AC* = *AL* и *CB* = *CM*, получим: $\frac{AL}{AE} = \frac{CM}{CE}$. Кроме того, $\angle LAE$ = 90° + α = $\angle MCE$, значит, треугольники *LAE* и *MCE* подобны. Следовательно, $\angle LEA$ = $\angle MEC$. Тогда $\angle LEM$ = $\angle LEC$ + $\angle MEC$ = $\angle LEC$ + $\angle LEA$ = 90°, что и требовалось.

По сути, приведенное рассуждение показывает, что треугольник MCE получается из треугольника LAE поворотной гомотетией с центром E, k = tgα и углом 90°.

<u>Второй способ</u>. Пусть *P* и *Q* – центры построенных квадратов (см. рис. 4б). Тогда четырехугольники *AECP* – вписанный, так два его противоположных угла прямые. Кроме того, *AP* = *CP*, поэтому *EP* – биссектриса угла *AEC*. Аналогично, четырехугольник *BECQ* –

вписанный и EQ – биссектриса угла BEC. Следовательно, $\angle PEQ = 90°$. Значит, $\angle LEM = 90°$, если $\angle LEP = \angle MEQ$. Докажем равенство этих углов.



Рассмотрим треугольники LEP и MEQ. Пусть $\angle CAE = \angle CPE = \alpha$, $\angle C\hat{A}E = \angle CQE = \beta = 90° - \alpha$. Тогда $\angle MQE = 90° + \beta = 180° - \alpha = \angle LPE$. Кроме того, катеты треугольника ABC – диаметры построенных окружностей, поэтому $\frac{EQ}{EL} = \frac{BC \cdot \sin\angle ECQ}{AC \cdot \sin\angle ECP} = \frac{BC}{AC} = \frac{MQ}{LP}$ (так как диагонали квадратов пропорциональны их сторонам).

Следовательно, треугольники LEP и MEQ подобны, откуда $\angle LEP = \angle MEQ$, что и требовалось.

3.3. Можно ли покрасить в два цвета боковые рёбра и диагонали основания девятиугольной пирамиды так, чтобы ни один из образовавшихся окрашенных треугольников не был одноцветным? (*Рассматриваются только треугольники, вершины которых совпадают с вершинами пирамиды*.)

Ответ: нельзя.

Решение. Предположим, что можно раскрасить указанным образом, например, в красный и синий цвета. Тогда, по принципу Дирихле, хотя бы пять боковых ребер имеют один и тот же цвет, например, синий. Их концами являются пять вершин девятиугольника. Все отрезки, соединяющие попарно эти пять вершин должны быть либо сторонами основания, либо его диагоналями красного цвета. Заметим, что из любых пяти вершин девятиугольника обязательно найдутся три вершины, никакие две из которых не являются соседними. Тогда эти три вершины попарно соединены диагоналями и эти диагонали красного цвета. то есть образуют красный треугольник. Противоречие.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Решите уравнение: $x^2 + \{x\}x + [x] = 0$, где $[x]$ и $\{x\}$ – целая и дробная части числа x соответственно.

Ответ: 0, –1; $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; $-\frac{3+\sqrt{33}}{4}$.

Решение. Пусть $[x] = a$, $\{x\} = d$, тогда данное уравнение примет вид: $(a+d)^2 + d(a+d) + a = 0 \Leftrightarrow a^2 + (3d+1)a + 2d^2 = 0$.

<u>Первый способ</u>. Так как $0 \le d < 1$, то $0 \le 3d + 1 < 4$. Следовательно, полученное равенство может выполняться только в случае, когда $a \le 0$.

1) Если $a = 0$, то $d = 0$, то есть $x = 0$ – корень исходного уравнения.

2) Пусть $a < 0$, тогда необходимым условием для выполнения равенства является: $a^2 + (3d+1)a \le 0 \Leftrightarrow a(a+3d+1) \le 0$. В этом случае: $a \ge -(3d+1) > -4$.

Так как a – целое число, то возможны только три значения a: –1; –2; –3.

Если $a = -1$, то $2d^2 - 3d = 0$, то есть $d = 0$. Тогда $x = -1$ – корень исходного уравнения.

Если $a = -2$, то $2d^2 - 6d + 2 = 0 \Leftrightarrow d^2 - 3d + 1 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Так как $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, а $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$, то $x = -2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – корень исходного уравнения.

Если a = –3, то $2d^2 - 9d + 6 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4}$. Так как $\frac{9+\sqrt{33}}{4} > 1$, а $0 < \frac{9-\sqrt{33}}{4} < 1$, то $x = -3 + \frac{9-\sqrt{33}}{4} = -\frac{3+\sqrt{33}}{4}$ – корень исходного уравнения.

Второй способ. Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно *d*: $2d^2 + 3ad + \left(a^2 + a\right) = 0$. Его дискриминант: $D = 9a^2 - 8\left(a^2 + a\right) = a(a-8)$, значит, оно имеет корни, если $\left[\begin{array}{l} a \le 0 \\ a \ge 8 \end{array}\right.$.

Выясним теперь, при каких значениях a хотя бы один из корней лежит в промежутке $[0;1)$. Для этого рассмотрим квадратичную функцию $f(d) = 2d^2 + 3ad + \left(a^2 + a\right)$. Ее график – парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины: $d_0 = -\frac{3a}{4}$. Требуемое условие равносильно тому, что парабола пересекает ось *x* на указанном промежутке. Это возможно в двух случаях: 1) $\begin{cases} f(0) \cdot f(1) \le 0, \\ f(1) \ne 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 0 \le d_0 < 1, \\ f(0) \ge 0, \\ f(1) > 0. \end{cases}$

Учитывая, что $f(0) = a^2 + a$, $f(1) = a^2 + 4a + 2$, получим:

1) $\begin{cases} a(a+1)\left(a - \left(-2-\sqrt{2}\right)\right)\left(a - \left(-2+\sqrt{2}\right)\right) \le 0, \\ a \ne -2 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2-\sqrt{2} < a \le -1 \\ -2+\sqrt{2} < a \le 0 \end{array}\right.$. Так как a – целое число, то оно может принимать одно из четырех значений: 0; –1; –2; –3.

2) $\begin{cases} 0 \le -\frac{3a}{4} < 1, \\ a(a+1) \ge 0 \end{cases}$. Тогда a = 0 или a = –1.

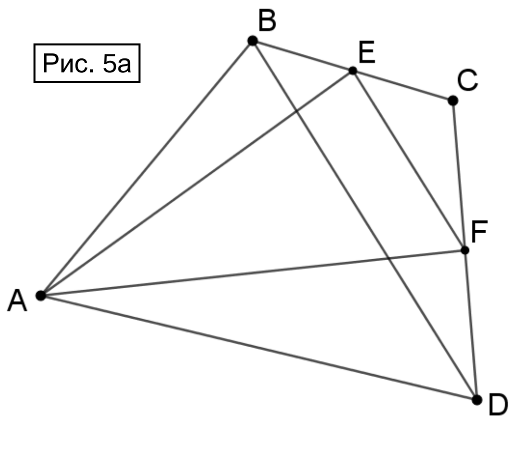
Подставив в квадратное уравнение найденные значения a, получим значения *d*, указанные выше, и придем к такому же ответу в исходном уравнении.

4.2. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* точки *E* и *F* – середины сторон *BC* и *CD* соответственно. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника *ABD*, если площади треугольников *ABE*, *CEF*, *AEF* и *AFD* образуют в некотором порядке четверку последовательных натуральных чисел.

Ответ: 6.

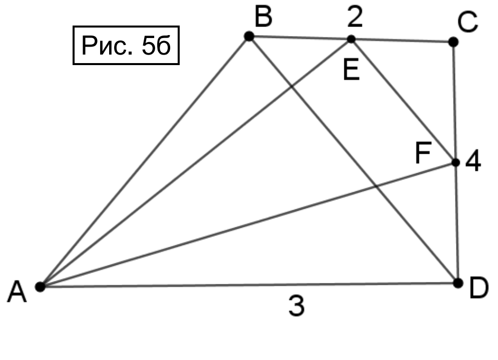
Решение. Пусть указанные натуральные числа – это *n*, *n* + 1, *n* + 2 и *n* + 3, тогда площадь четырехугольника *ABCD* равна 4*n* + 6 (см. рис. 5а). Так как *EF* – средняя линия треугольника *BDC*, то $S_{BDC} = 4S_{CEF} \ge 4n$. Тогда $S_{ABD} = S_{ABCD} - S_{BCD} \le 4n + 6 - 4n = 6$.

Рис. 5а



Покажем, что значение 6 площади треугольника *ABD* достигается. Рассмотрим прямоугольную трапецию *ABCD* с прямым углом *D* и основаниями *AD* = 3 и *BC* = 2 (см. рис. 5б). Пусть *CD* = 4, тогда $S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot CF = 1$, $S_{ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot CD = 2$, $S_{AFD} = \frac{1}{2} AD \cdot DF = 3$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD = 10$, значит, $S_{AEF} = S_{ABCD} - (S_{ABE} + S_{CEF} + S_{AFD}) = 10 - (2 + 1 + 3 = 4$. При этом, $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = 6$.

Рис. 5б



4.3. Пусть a, b и c – натуральные числа, которые попарно взаимно просты. Какие значения может принимать выражение $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число – целое?

Ответ: 8, 9 или 10.

Решение. Если $a = b = c = 1$, то значение выражения равно 8. Пусть не все числа между собой равны, тогда, без ограничения общности можно считать, что $a \le b \le c$. Так как числа a и b взаимно просты с числом c, то и числа $a + c$ и $b + c$ также взаимно просты с числом c. Следовательно, данное выражение может оказаться целым числом только в случае, когда $a + b$ делится на c. Но $a + b < 2c$, значит, $a + b = c$.

Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Аналогично, так как $a + c$ взаимно просто с a и $b + c$ взаимно просто с b, то $a + c = 2a + b$ делится на a и $b + c = 2b + a$ делится на b. Следовательно, либо $a = b = 1$, либо a и b – различные делители числа 2, то есть $a = 1$, $b = 2$. В первом случае $c = 2$, тогда значение исходного выражения равно 9. Во втором случае $c = 3$, тогда значение исходного выражения равно 10.

<u>Второй способ</u>. $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{(2b+a)(2a+b)}{ab} = \frac{5ab+2a^2+2b^2}{ab} = 5 + 2(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})$. Для того, чтобы полученное число было целым, сумма взаимно обратных чисел, стоящих в скобках, должна быть либо целой, либо полуцелой. Учитывая, что числа a и b взаимно просты, первое возможно только при $a = b = 1$, а второе – при $a = 1$, $b = 2$. В первом случае значение исходного выражения равно 9, а во втором случае оно равно 10.

В заключительной фазе решения можно действовать и по-другому: $\frac{5ab+2a^2+2b^2}{ab} = \frac{ab+2(a+b)^2}{ab} = 1+\frac{2c^2}{ab}$. *Тогда число* $\frac{2c^2}{ab}$ *должно быть целым, значит, учитывая взаимную простоту чисел a и b с числом c, число* $\frac{2}{ab}$ *должно быть целым. Отсюда получим: a = b = 1, c = 2 или a = 1, b = 2, c = 3, что приводит к тем же значениям исходного выражения.*

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

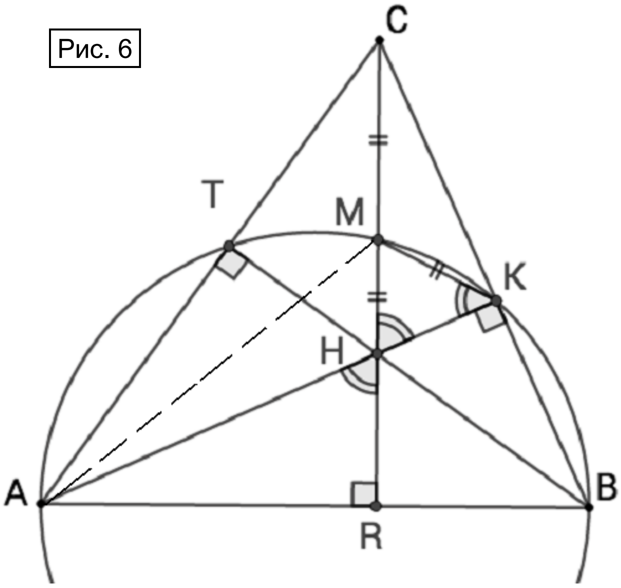
5.1. При делении многочлена $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - b$ на $x - a$ получается остаток 2. Найдите наименьшее возможное значение b.

Ответ: –6.

Решение. По теореме Безу: $P(a) = a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 4a - b = 2$. Тогда $b = a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 4a - 2 = (a^4 + a^2 + 4 + 2a^3 - 4a^2 - 4a) - 6 = (a^2 + a - 2)^2 - 6 \ge -6$. Значение –6 достигается, например, при $a = 1$.

Решение может быть оформлено и без ссылки на теорему Безу: из условия задачи следует, что P(x) – 2 делится на x – a, то есть a является корнем многочлена P(x) – 2.

5.2. Существует ли такой остроугольный треугольник *ABC*, что окружность с диаметром *AB* проходит через середину отрезка *CH* (*H* – точка пересечения высот треугольника *ABC*)?



Ответ: не существует.

Решение. Предположим, что такой треугольник существует. Пусть *AK* и *BT* – его высоты (так как треугольник *ABC* – не прямоугольный, то точки *K* и *T* – различные), *M* – середина *CH*. Тогда окружность с диметром *AB* проходит через точки *K*, *M* и *T* (см. рис. 6).

Первый способ. Заметим, что через точки *K*, *M* и *T* проходит также окружность девяти точек треугольника *ABC*. Три различные точки определяют не более одной окружности, но совпадать эти окружности не могут, так как окружность девяти точек не проходит через вершины треугольника. Противоречие.

Второй способ. Пусть *CR* – третья высота треугольника *ABC*. Так как *KM* – медиана прямоугольного треугольника *HKC*, то *KM* = *MH* = *MC*, значит, $\angle MKH = \angle MHK = \angle AHR = \beta$. Тогда $\angle HAR = 90° - \beta$, значит, $\angle MKB + \angle MAB = 90° + \beta + 90° - \beta + \angle MAK = 180° + \angle MAK > 180°$. Это противоречит тому, что *AMKB* – вписанный четырехугольник.

Отметим, что не существует и тупоугольного треугольника, удовлетворяющего условию. Для доказательства достаточно рассмотреть на том же чертеже тупоугольный треугольник AHB, в котором C – ортоцентр. Кроме того, рассуждения, приведенные во втором способе решения, показывают, что точка M лежит вне окружности с диаметром AB.

Рассматривать прямоугольный треугольник не имеет смысла, так как в нем ортоцентр совпадает с вершиной.

5.3. Известно, что для некоторого натурального *n* оба числа *n* – 1 и *n* + 1 являются простыми. Можно ли числа от 1 до *n* выстроить в строку так, чтобы сумма любых двух стоящих рядом чисел являлась простым числом?

Ответ: можно.

Решение. Расставим числа так: *n*, 1, *n* – 2, 3, *n* – 4, … , 2, *n* – 1, то есть на нечетных местах – четные числа в порядке убывания, а на четных местах – нечетные числа в порядке возрастания. Тогда суммы двух стоящих рядом чисел будут попеременно равны простым числам *n* + 1 и *n* – 1.

Другой возможный способ расстановки симметричен указанному: n – 1, 2, n – 3, 4, ..., 1, n Так как мы можем использовать только простоту чисел n – 1 и n + 1, то число n должно быть крайним, значит, других способов требуемой расстановки не существует.