11 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Решите уравнение: $2017x^{2017} - 2017 + x = \sqrt[2017]{2018-2017x}$.

Ответ: 1.

Решение. Функция $f(x) = 2017x^{2017} - 2017 + x$ – возрастающая, а функция $g(x) = \sqrt[2017]{2018-2017x}$ – убывающая. Следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. Подстановка показывает, что $f(1) = g(1)$, то есть x = 1 – корень уравнения.

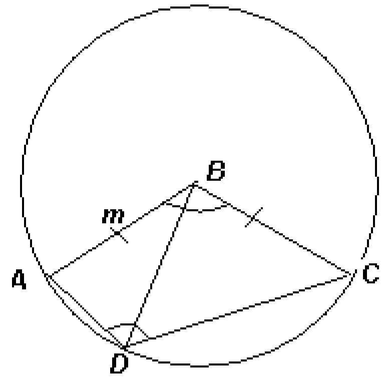
1.2. В четырехугольнике $ABCD$: $AB = BC = m$, $\angle ABC = \angle ADC = 120°$. Найдите BD.

Ответ: $BD = m$.

Решение. Рассмотрим окружность с центром B и радиусом m, которая проходит через точки A и C (см. рис. 1).

Из равенства углов ABC и ADC следует, что точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Кроме того, $\angle ADC = 180° - \frac{1}{2}\angle ABC$, значит, точка D также лежит на этой окружности. Следовательно, $BD = m$.

Рис. 1



1.3. В зале стоят шесть стульев в два ряда – по три стула в каждом, один ряд ровно за другим. В зал пришли шесть человек различного роста. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы каждый человек, сидящий в первом ряду, был ниже человека, сидящего за ним?

Ответ: 90.

Решение. Первый способ. Количество способов рассадить шесть людей на шесть стульев равно 6!. Рассмотрим произвольную рассадку. Если в ней менять местами людей, сидящих друг за другом, то для этого есть 2^3 = 8 различных способов, из которых ровно один удовлетворяет условию. Следовательно, искомых способов: $\frac{6!}{8} = \frac{720}{8}$ = 90.

Второй способ. Пронумеруем людей в порядке возрастания роста и подсчитаем количество рассадок, в которых люди в первом ряду упорядочены по номеру слева направо. Самым левым всегда будет человек с номером 1, за ним во втором ряду может сидеть любой из остальных. Во второй паре в первом ряду сядет человек с наименьшим доступным номером, а за ним может сидеть любой из троих оставшихся. Третья пара получается из оставшихся людей и их можно усадить единственным образом.

Таким образом, получается $5\cdot3$ = 15 упорядоченных рассадок. Каждая из них дает 6 разных рассадок, исходя из симметрии, поэтому общее количество способов требуемой рассадки равно $15\cdot6$ = 90.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Какие значения может принимать выражение $x+y+z$, если $\sin x = \cos y$, $\sin y = \cos z$, $\sin z = \cos x$, $0 \le x, y, z \le \frac{\pi}{2}$?

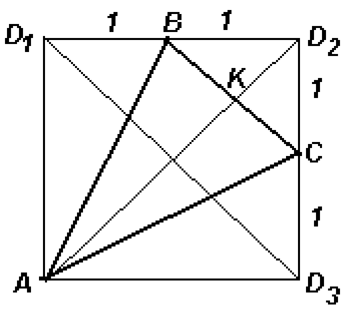
Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

Решение. Запишем данные равенства в другом виде: $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, $\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, $\sin z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Из условия задачи следует, что все выражения под знаком синуса находятся в первой четверти. На отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ функция синус возрастает, следовательно: $x=\frac{\pi}{2}-y$, $y=\frac{\pi}{2}-z$, $z=\frac{\pi}{2}-x$. Сложив эти равенства почленно, получим: $x+y+z=\frac{3\pi}{2}-(x+y+z)$, то есть $x+y+z=\frac{3\pi}{4}$.

Отметим, что из полученных равенств следует, что $x=y=z=\frac{\pi}{4}$.

2.2. Может ли квадрат являться разверткой треугольной пирамиды?

Рис. 2



Ответ: может.

Решение. Рассмотрим квадрат $AD_1D_2D_3$, в котором точки B и C – середины сторон D_1D_2 и D_2D_3 соответственно (см. рис. 2). Тогда, при его сгибании по прямым AB, BC и AC точки D_1, D_2 и D_3 совместятся в одной точке D, образуя пирамиду $ABCD$.

Осталось показать, что пирамида будет «невырожденной», то есть точки A, B, C и D не окажутся в одной плоскости. Для этого достаточно, чтобы выполнялось условие существования трехгранного угла при вершине A, то есть должно выполняться неравенство: $\angle BAC < \angle BAD_1 + \angle CAD_3$ (угол BAC – наибольший из трех углов). В справедливости этого неравенства можно убедиться разными способами.

Первый способ. В треугольнике AD_1D_2: AB – медиана, AD_1 – высота, биссектриса, проведенная из вершины A, лежит между ними, поэтому $\angle BAD_1 > \angle BAD_2$. Аналогично, $\angle CAD_3 > \angle CAD_2$. Сложив почленно эти неравенства, получим требуемое.

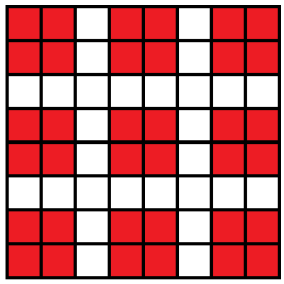
Второй способ. Пусть сторона квадрата равна 2, тогда $\angle BAD_1 = \angle CAD_3 = arctg\frac{1}{2}$. Пусть K – середина BC, тогда $\angle BAC = 2\,arctg\frac{BK}{AK} = 2\,arctg\frac{0{,}25D_1D_3}{0{,}75AD_2} = 2\,arctg\frac{1}{3}$. Так как функция $arctgx$ возрастает на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то требуемое неравенство выполняется.

Также можно было рассуждать в обратном порядке: рассмотреть пирамиду ABCD, у которой основанием является прямоугольный треугольник BCD: BD = CD = 1; BC = $\sqrt{2}$*, а боковые ребра: AB = AC =* $\sqrt{5}$*; AD = 2. Затем объяснить, почему такая пирамида существует и как его разрезать, чтобы получить квадрат.*

Отметим, что других квадратных разверток тетраэдра не существует, но доказать это не просто.

2.3. Из клетчатой доски размером 8×8 выпилили 8 прямоугольников размером 2×1. После этого из оставшейся части требуется выпилить квадрат размером 2×2. Обязательно ли это удастся?

Рис. 3



Ответ: обязательно.

Решение. Первый способ. На рис. 3 – доска размером 8×8, на которой цветом выделены 9 квадратов размером 2×2 так, что никакие два из них нельзя «испортить» одним прямоугольником размером 2×1.. Следовательно, после выпиливания восьми таких прямоугольников, хотя бы один квадрат останется нетронутым и его можно будет выпилить.

Второй способ. Из квадрата размером 8×8 можно вырезать 7×7 = 49 разных квадратов размером 2×2. Один вырезанный прямоугольник 2×1 делает недоступными для последующего вырезания не больше, чем шесть квадратов. Значит, после выпиливания восьми прямоугольников недоступными окажутся не более, чем 8×6 = 48 квадратов. Следовательно, хотя бы один квадрат можно будет выпилить.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Для всех действительных *x* и *y* выполняется равенство $f\left(x^2+y\right)=f(x)+f\left(y^2\right)$. Найдите *f*(–1).

Ответ: *f*(–1) = 0.

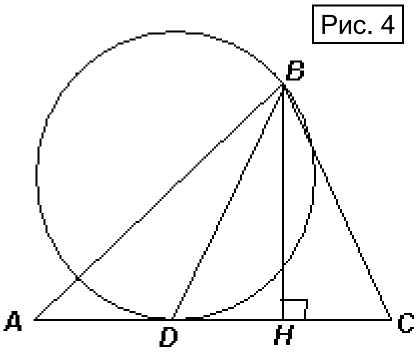
Решение. При *x* = 0, *y* = 0 получим: *f*(0) = *f*(0) + *f*(0), то есть *f*(0) = 0.

При *x* = 0, *y* = –1 получим: *f*(–1) = *f*(0) + *f*(1), то есть *f*(–1) = *f*(1).

При *x* = –1, *y* = –1 получим: *f*(0) = *f*(–1) + *f*(1). Тогда 0 = *f*(–1) + *f*(–1), то есть *f*(–1) = 0.

3.2. Пусть R_1, R_2 и R_3 – радиусы трех окружностей, каждая из которых проходит через вершину треугольника и касается противолежащей стороны. Докажите, что $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\le\frac{2}{r}$, где *r* – радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Рис. 4



Решение. Рассмотрим треугольник *ABC* и одну из указанных окружностей, которая проходит через вершину *B* и касается стороны *AC* в точке *D* (см. рис. 4). Ее диаметр не меньше, чем хорда *BD*, которая, в свою очередь, не меньше, чем высота *BH* треугольника.

Таким образом, $\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R_2}+\frac{1}{2R_3}\le\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$, где h_i – высоты треугольника. Осталось воспользоваться равенством $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$, в справедливости которого легко убедиться, умножив обе части этого равенства на $2S_{ABC}$.

3.3. Докажите, что среднее арифметическое всех делителей натурального числа *n* лежит на отрезке [$\sqrt{n}$; $\frac{n+1}{2}$].

Решение. Для *n* = 1 отрезок «вырождается» в точку, а утверждение, очевидно, верно. Далее рассматриваем *n* > 1. Пусть *k* – количество делителей числа *n*.

Оценка сверху. Количество собственных делителей равно *k* – 2 и каждый из них не превосходит $\frac{n}{2}$. Значит, сумма всех делителей не больше, чем $\frac{n}{2}(k-2)+n+1$ = $\frac{nk}{2}+1$. Следовательно, их среднее арифметическое не превосходит $\frac{n}{2}+\frac{1}{k}$ ≤ $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$ = $\frac{n+1}{2}$.

Оценка снизу. Пусть $d_1\cdot d_2=n$ и $d_1\ne d_2$, тогда из неравенства между средними $d_1+d_2>2\sqrt{d_1\cdot d_2}=2\sqrt{n}$. Если число *n* не является квадратом, то все его делители разбиваются на такие пары. Записав для каждой пары аналогичные неравенства и сложив их, получим: $d_1+d_2+...+d_k>k\sqrt{n}$. Если же *n* – квадрат натурального числа, то к последнему неравенству с обеих сторон добавляется $\sqrt{n}$ и оно остается верным. Таким образом, для всех натуральных *n* выполняется неравенство $\frac{d_1+d_2+...+d_k}{k}\ge\sqrt{n}$.

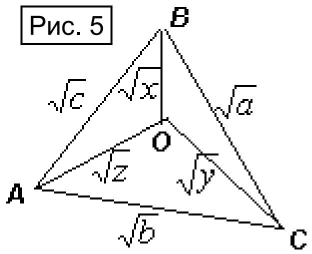
Существуют и другие способы оценки, например, для оценки сверху можно применить метод Штурма.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Известно, что $a = x + y + \sqrt{xy}$; $b = y + z + \sqrt{yz}$; $c = z + x + \sqrt{zx}$, *где* $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Докажите, что $a + b + \sqrt{ab} > c$.

Решение. Отметим на плоскости произвольную точку *O* и отложим отрезки $OA = \sqrt{z}$, $OB = \sqrt{x}$, $OC = \sqrt{y}$, так, чтобы $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$ (см. рис. 5). Тогда, по теореме косинусов, точки *A*, *B* и *C* образуют треугольник со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$, причем точка *O* находится внутри треугольника *ABC*. Значит, каждый угол этого треугольника меньше, чем 120°.

Рис. 5



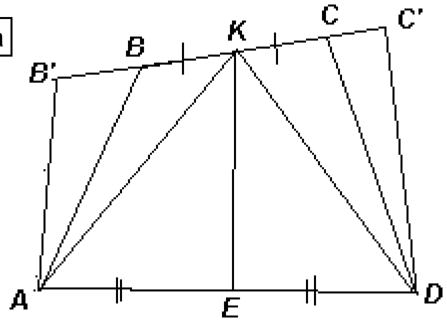
Тогда, учитывая, что функция косинус убывает на $(0;180°)$, получим: $a + b + \sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot(-0{,}5) > \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\cos\angle ACB = \left(\sqrt{c}\right)^2 = c$, что и требовалось.

Отметим, что O – точка Торричелли треугольника ABC.

4.2. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* точка *K* – середина стороны *BC*, а площадь треугольника *AKD* равна половине площади *ABCD*. Найдите длину медианы *KE* треугольника *AKD*, если *AB* = *a*, *CD* = *b*.

Ответ: $KE = \dfrac{a+b}{2}$.

Рис. 6а



Решение. Докажем, что *ABCD* – трапеция с основаниями *AB* и *CD*. Пусть это не так, тогда через точки *A* и *D* проведем прямые, параллельные *KE*, до их пересечения с прямой *BC* в точках *B*' и *C*' соответственно (см. рис. 6а). Тогда *AB*'*C*'*D* – трапеция, а *KE* – ее средняя линия (по теореме Фалеса).

При этом, площадь $S_{AB'C'D} = KE \cdot h$, а $S_{AKD} = S_{AKE} + S_{EKD} = \dfrac{1}{2}KE \cdot h = \dfrac{1}{2}S_{AB'C'D}$, где *h* – высота трапеции (см. рис. 6б). Таким образом, площади *ABCD* и *AB*'*C*'*D* равны. Учитывая, что *K* – общая середина отрезков *BC* и *B*'*C*', получим, что эти четырехугольники совпадают. Значит, $KE = \dfrac{AB+CD}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

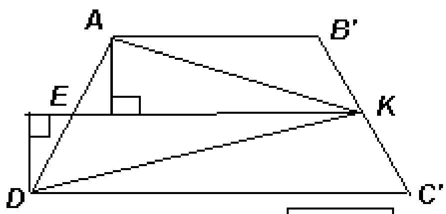


Рис. 6б

4.3. Можно ли на числовой прямой расположить три отрезка чётной длины так, чтобы общие части каждых двух из них были отрезками нечётной длины?

Ответ: нельзя.

Решение. Пусть отрезки расположены согласно условию. Проведем ось так, чтобы концы всех трех отрезков попали на точки с целочисленными координатами. Это возможно. Действительно, если у первого отрезка координата левого конца целая, то и координата правого конца также целая (в противном случае его можно «сдвинуть»). При этом, если хотя бы левый конец второго отрезка имеет дробную координату, то пересечение первых двух отрезков имеет нецелую длину – противоречие. Аналогичное рассуждение показывает, что и концы третьего отрезка – целые числа.

Из условия задачи следует, что у каких-то двух отрезков координаты концов будут иметь одинаковую чётность, тогда их пересечение – отрезок чётной длины. Полученное противоречие показывает невозможность требуемого расположения.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

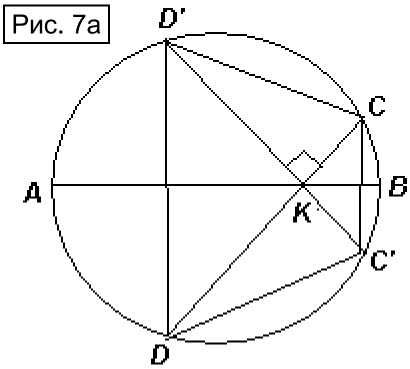
5.1. Число p — корень кубического уравнения $x^3 + x - 3 = 0$. Придумайте кубическое уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого будет число p^2.

Ответ: $x^3 + 2x^2 + x - 9 = 0$.

Решение. Из условия задачи следует, что $p^3 + p = 3$, тогда $\left(p^3 + p\right)^2 = 9$ $\Leftrightarrow$ $p^6 + 2p^4 + p^2 - 9 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left(p^2\right)^3 + 2\left(p^2\right)^2 + p^2 - 9 = 0$. Таким образом, p^2 является корнем уравнения $x^3 + 2x^2 + x - 9 = 0$.

5.2. Через произвольную точку K диаметра AB окружности проведена хорда CD, которая образует с AB угол 45°. Докажите, что величина $KC^2 + KD^2$ не зависит от выбора точки K.

Рис. 7а



Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть отрезок $C'D'$ симметричен хорде CD относительно прямой AB. Тогда $CC'DD'$ – равнобокая трапеция, вписанная в данную окружность, диагонали которой взаимно перпендикулярны (см. рис. 7а). По свойству вписанного четырехугольника с перпендикулярными диагоналями: $CD^2 + C'D'^2 = 4R^2$, где R – радиус окружности. Так как $CD' = C'D$, то $KC^2 + KD^2 = KC^2 + KD'^2 = CD'^2 = 2R^2$, то есть эта величина не зависит от выбора точки K.

<u>Второй способ</u>. Пусть OH – перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду CD, длина которого равна h (см. рис.7б). Тогда треугольник OKH – прямоугольный и равнобедренный, поэтому $HK = OH = h$ Так как $HC^2 = HD^2 = R^2 - h^2$, где R – радиус окружности, то $KC^2 + KD^2 = (HC - HK)^2 + (HD + HK)^2 = 2HC^2 + 2HK^2 = 2(R^2 - h^2) + 2h^2 = 2R^2$, то есть эта величина зависит только от размера окружности.

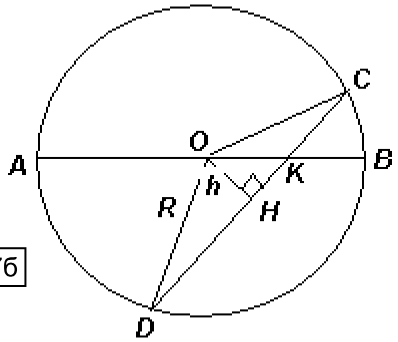


Рис. 7б

5.3. Известно, что в десятичной записи числа 2^{29} все цифры различны. Есть ли среди них цифра 0?

Ответ: есть.

Решение. Заметим, что $2^{29} < 2^{30} = (2^{10})^3 = (1024)^3 < 2\cdot 10^9$. Следовательно, в десятичной записи числа 2^{29} не больше, чем 10 цифр.

С другой стороны, $2^{29} = (2^{10})^2\cdot 2^9 = (1024)^2\cdot 512 > 5\cdot 10^8$, поэтому в десятичной записи числа 2^{29} не меньше, чем 9 цифр.

Если цифр – 10 и они различные, то среди них есть ноль. Если же цифр – 9 и среди них нет нуля, то сумма цифр в десятичной записи этого числа: 1 + 2 + … + 9 = 45, откуда следует, что 2^{29} делится на 3, что невозможно. Полученное противоречие показывает наличие нуля.

Можно также непосредственным вычислением получить, что 2^{29} = 536870912 и убедиться, что в десятичной записи этого числа 9 различных цифр, среди которых есть 0.