7 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Вася получил список книг на летние каникулы (12 недель). Он поставил себе цель их прочитать и решил, что каждую неделю он будет читать одно и то же количество книг. Но каждую неделю Вася читал на одну книгу меньше запланированного, поэтому выполнил свой план на 3 недели позже, чем хотел. На сколько недель раньше срока Вася прочитал бы весь список, если бы каждую неделю читал на одну книгу больше, чем планировал?

Ответ: на две недели.

Решение. <u>Первый способ</u> («арифметический»). За 12 недель Вася не успел прочитать 12 книг. Их он прочитает за 3 недели, то есть Вася в реальности читал по 4 книги в неделю, а планировал читать по 5 книг. Следовательно, в списке– 60 книг. Если бы он читал по 6 книг в неделю, то справился бы за 10 недель, то есть на две недели раньше срока.

<u>Второй способ</u> («алгебраический»). Пусть Вася хотел читать по x книг в неделю, тогда в его списке – $12x$ книг. В реальности, он каждую неделю читал $x - 1$ книгу и потратил на это 15 недель, то есть в списке $15(x - 1)$ книг. Таким образом, $12x = 15(x - 1)$, откуда $x = 5$. Значит, в списке – 60 книг. Поэтому если читать по 6 книг в неделю, то хватит $60 : 6 = 10$ недель, то есть Вася прочитал бы весь список на $12 - 10 = 2$ недели раньше окончания каникул.

1.2. Незнайка утверждает, что он может провести на плоскости 4 прямые так, чтобы их суммарное количество точек пересечения равнялось пяти и 5 прямых так, чтобы их суммарное количество точек пересечения равнялось четырем. Прав ли он?

Ответ: Незнайка прав.

Решение. Например, в первом случае см. рис. 1а ($a \parallel b$), а во втором случае – рис. 1б ($a \parallel b \parallel c \parallel d$).

Существуют и другие примеры.

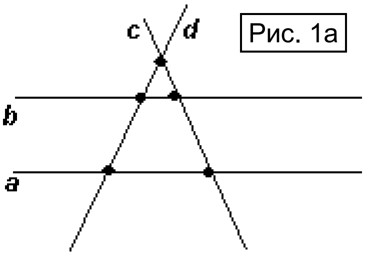


Рис. 1а

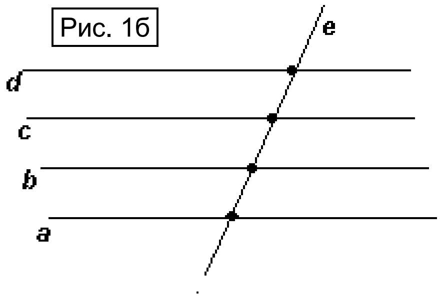


Рис. 1б

1.3. Простым или составным является число $200^2 - 399$? О*твет обоснуйте.*

Ответ: составным.

Решение. Заметим, что $200^2 - 399 = 200^2 - 400 + 1 = 200^2 - 2\cdot200 + 1 = (200 - 1)^2 = 199^2$. Следовательно, это составное число.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Сравните: $\dfrac{\overbrace{77\ldots7}^{99}}{\underbrace{77\ldots7}_{100}}$ и $\dfrac{\overbrace{55\ldots5}^{100}}{\underbrace{55\ldots5}_{101}}$. О*твет обоснуйте.*

Ответ: вторая дробь больше.

Решение. Сократим каждую дробь: $\dfrac{\overbrace{77\ldots7}^{99}}{\underbrace{77\ldots7}_{100}} = \dfrac{\overbrace{11\ldots1}^{99}}{\underbrace{11\ldots1}_{100}}$; $\dfrac{\overbrace{55\ldots5}^{100}}{\underbrace{55\ldots5}_{101}} = \dfrac{\overbrace{11\ldots1}^{100}}{\underbrace{11\ldots1}_{101}}$. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Дополним полученные дроби до единицы: $1 - \dfrac{\overbrace{11\ldots1}^{99}}{\underbrace{11\ldots1}_{100}} = \dfrac{\overbrace{100\ldots0}^{100}}{\underbrace{11\ldots1}_{100}} = \dfrac{\overbrace{100\ldots0}^{101}}{\underbrace{11\ldots10}_{101}}$; $1 - \dfrac{\overbrace{11\ldots1}^{100}}{\underbrace{11\ldots1}_{101}} = \dfrac{\overbrace{100\ldots0}^{101}}{\underbrace{11\ldots1}_{101}}$. У дробей, полученных при дополнении, числители одинаковые, а знаменатель первой дроби меньше, поэтому $\dfrac{\overbrace{100\ldots0}^{101}}{\underbrace{11\ldots10}_{101}} > \dfrac{\overbrace{100\ldots0}^{101}}{\underbrace{11\ldots1}_{101}}$.

Следовательно, $\dfrac{\overbrace{77\ldots7}^{99}}{\underbrace{77\ldots7}_{100}} < \dfrac{\overbrace{55\ldots5}^{100}}{\underbrace{55\ldots5}_{101}}$.

<u>Второй способ</u>. Разделим числитель и знаменатель каждой из полученных дробей на число, стоящее в ее числителе. Тогда $\dfrac{\overbrace{11\ldots1}^{99}}{\underbrace{11\ldots1}_{100}} = \dfrac{1}{10 + \dfrac{1}{\underbrace{11\ldots1}_{99}}}$; $\dfrac{\overbrace{11\ldots1}^{100}}{\underbrace{11\ldots1}_{101}} = \dfrac{1}{10 + \dfrac{1}{\underbrace{11\ldots1}_{100}}}$. Так как $\dfrac{1}{\underbrace{11\ldots1}_{99}} > \dfrac{1}{\underbrace{11\ldots1}_{100}}$, то $\dfrac{\overbrace{11\ldots1}^{99}}{\underbrace{11\ldots1}_{100}} < \dfrac{\overbrace{11\ldots1}^{100}}{\underbrace{11\ldots1}_{101}}$. Значит, $\dfrac{\overbrace{77\ldots7}^{99}}{\underbrace{77\ldots7}_{100}} < \dfrac{\overbrace{55\ldots5}^{100}}{\underbrace{55\ldots5}_{101}}$.

2.2. Прямоугольник разбили двумя прямыми, параллельными его сторонам, на четыре прямоугольника. Один из них оказался квадратом, а периметры прямоугольников, соседних с ним, равны 20 см и 16 см. Найдите площадь исходного прямоугольника.

Ответ: 80 см^2.

Решение. Введем обозначения так, как показано на рис. 2. Выразим половины периметров прямоугольников, указанных в условии: $a + x = 8$ и $b + x = 10$. Тогда площадь исходного прямоугольника равна $(a + x)(b + x) = 80$ (см^2).

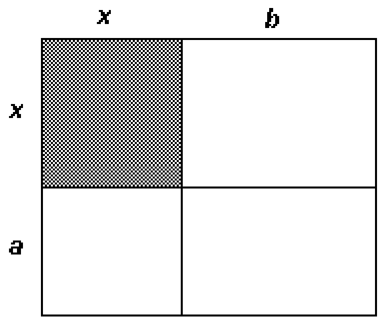


Рис. 2

2.3. В коробке лежат фрукты (не менее пяти). Если вытащить наугад три фрукта, то среди них обязательно найдется яблоко. Если вытащить наугад четыре фрукта, то среди них обязательно найдется груша. Какие фрукты могут быть вытащены и в каком количестве, если взять наугад пять фруктов?

Ответ: три яблока и две груши.

Решение. Из условия задачи следует, что в коробке не яблоками являются не более двух фруктов (иначе можно вытащить 3 фрукта, среди которых не будет яблок). Аналогично, не грушами являются не более трех фруктов (иначе можно вытащить 4 фрукта, среди которых не будет груш). Таким образом, в коробке лежит ровно 5 фруктов: три яблока и две груши. Они все и будут вытащены.

Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

3.1. Можно ли представить число $\left(\frac{17^2+19^2}{2}\right)^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

Ответ: можно.

Решение. Первый способ. Пусть 18 = a. Тогда данное число можно записать и преобразовать так: $\left(\frac{17^2+19^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a-1)^2+(a+1)^2}{2}\right)^2 = (a^2+1)^2 = (a^2-1)^2 + (2a)^2$.

Следовательно, $\left(\frac{17^2+19^2}{2}\right)^2 = (18^2-1)^2 + 36^2$ = $323^2 + 36^2$.

Второй способ. $\left(\frac{17^2+19^2}{2}\right)^2$ = $\left(\frac{289+361}{2}\right)^2$ = $325^2 = (13\cdot25)^2 = 13^2\cdot25^2 = 169\cdot25^2 = (144 + 25)\cdot25^2 = (12^2 + 5^2)\cdot25^2 = 12^2\cdot25^2 + 5^2\cdot25^2 = 300^2 + 125^2$.

Получив, что данное число равно $13^2\cdot25^2$, *можно продолжить иначе:* $\left(\frac{17^2+19^2}{2}\right)^2$ = $13^2\cdot25^2 = 13^2(20^2 + 15^2) = 13^2\cdot20^2 + 13^2\cdot15^2 = 260^2 + 195^2$.

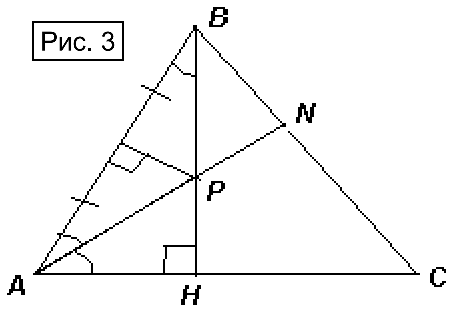
Третий способ. Так как 17^2 оканчивается цифрой 9, а 19^2 оканчивается цифрой 1, то число в скобках оканчивается цифрой 5. Значит, данное выражение имеет вид $(5k)^2$, где k – некоторое натуральное число. Тогда положительный ответ на вопрос задачи следует из равенства: $(5k)^2 = (4k)^2 + (3k)^2$.

3.2. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AN, высота BH и прямая, перпендикулярная стороне AB и проходящая через ее середину, пересекаются в одной точке. Найдите угол BAC.

Ответ: 60°.

Решение. Пусть P – точка пересечения AN и BH (см. рис. 3). Так как серединный перпендикуляр к стороне AB проходит через точку P, то $PA = PB$, то есть треугольник APB – равнобедренный. Следовательно, $\angle ABP = \angle BAP = \angle PAH$, так как AP – биссектриса угла BAH. Кроме того, $\angle AHB = 90°$, значит, сумма этих трех равных углов равна 90°, то есть каждый из них равен 30°. Тогда $\angle BAC = 60°$.

Рис. 3



3.3. Существует ли четырёхзначное число, сумма цифр которого в 25 раз меньше их произведения?

Ответ: не существует.

Решение. Предположим, что такое число существует. Тогда из условия задачи следует, что произведение его цифр делится на 25, поэтому среди его цифр должны быть две пятерки (нулей быть не может, иначе произведение цифр было бы равно нулю). Пусть a и b – две другие его цифры, тогда сумма цифр этого числа равна 10 + a + b, а произведение цифр равно 25ab.

Составим уравнение: 25(10 + a + b) = 25ab. Оно равносильно уравнению 10 + a + b = ab, которое можно привести к виду: $ab - a - b + 1 = 11$. Тогда левую часть полученного уравнения можно разложить на множители способом группировки. В результате этого получим: $(a - 1)(b - 1) = 11$. Так как 11 – простое число, то один из множителей равен 1, а другой равен 11. Но a и b – цифры, поэтому ни одна из них не равна 12. Противоречие.

Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

4.1. При каких значениях a и b графики функций $y = |ax + b|$ и $y = |ax| + b$ не имеют общих точек?

Ответ: при $a = 0$, $b < 0$.

Решение. <u>Первый способ</u>. Заметим, что при $b = 0$ графики совпадают. Если $a \neq 0$, то возможны два случая расположения графика функции $y = |ax + b|$ (см. рис. 4 а, б).

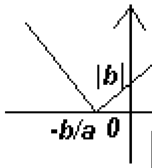


Рис. 4а

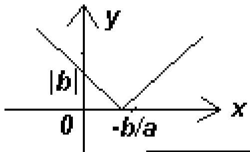


Рис. 4б

Рис. 4а соответствует случаю когда a и b одного знака, а рис. 4б – случаю, когда они разных знаков.

Для графика $y = |ax| + b$ также возможны два случая расположения в зависимости от знака числа b (см. рис. 4 в, г).

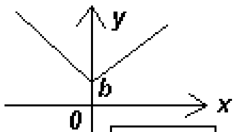


Рис. 4в

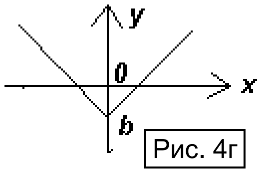


Рис. 4г

Мысленно совмещая графики указанных функций (или построив их в одной системе координат), несложно убедиться, что во всех случаях при одних и тех же значениях a и b они имеют общий луч, то есть бесконечное множество общих точек.

Следовательно, условие задачи может выполняться только в случае, когда $a = 0$. Тогда формулы, задающие данные функции, примут вид: $y = |b|$ и $y = b$. Графики таких функций не имеют общих точек, если $|b| \neq b$, то есть при $b < 0$.

<u>Второй способ</u>. Заметим, что при любых значениях a и b график функции $y = |ax| + b$ проходит через точку $B(0; b)$. Подставив ее координаты в уравнение $y = |ax + b|$, получим: $|b| = b \Leftrightarrow b \geq 0$. Следовательно, условие задачи может выполняться только в случае, когда $b < 0$.

В свою очередь, при $a \neq 0$ график функции $y = |ax + b|$ проходит через точку $A(-\frac{b}{a}; 0)$. Подставив ее координаты в уравнение $y = |ax| + b$, получим: $|b| + b = 0 \Leftrightarrow |b| = -b \Leftrightarrow b \leq 0$. Значит, в этом случае графики также имеют общую точку.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $a = 0$, $b < 0$. Тогда формулы, задающие данные функции, примут вид: $y = |b|$ и $y = b$ соответственно и не будут иметь общих точек при $b < 0$.

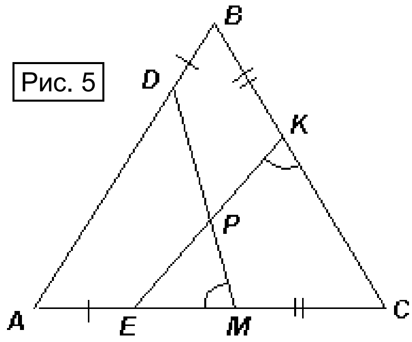
Отметим, что рассмотренные точки выбраны не случайно: каждая из них является точкой пересечения соответствующего графика с одной из осей координат.

4.2. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки D и K соответственно, а на стороне AC отмечены точки E и M так, что $DA + AE = KC + CM = AB$. Отрезки DM и KE пересекаются. Найдите угол между ними.

Ответ: 60°.

Решение. Рассмотрим треугольники ADM и CEK (см. рис. 5): $DA = AB - AE = AC - AE = CE$; $AM = AC - CM = AB - CM = KC$; $\angle DAM = 60° = \angle ECK$. Следовательно, эти треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $\angle AMD = \angle CKE$.

Рис. 5



Пусть прямые DM и KE пересекаются в точке P. Из треугольника PEM: $\angle MPE = 180° - (\angle PEM + \angle PME) = 180° - (\angle KEC + \angle CKE) = \angle KCE = 60°$.

4.3. Есть 2018 гирек массами 1 г, 2 г, …, 2018 г. Заяц положил на одну чашу весов две гирьки. Волк хотел двумя другими гирьками на другой чаше их уравновесить, но не смог. Какие гирьки мог взять Заяц? *Перечислите все варианты и обоснуйте*.

Ответ: (1 г; 2 г); (1 г; 3 г); (2016 г; 2018 г); (2017 г; 2018 г).

Решение. 1) Объясним, почему Волк не сумеет уравновесить указанные наборы. В парах гирь (1 г; 2 г) и (1 г; 3 г) сумма масс меньше, чем сумма масс любых двух гирь оставшегося набора, а в парах (2016 г; 2018 г) и (2017 г; 2018 г), наоборот, сумма масс гирь больше, чем сумма масс любых двух гирь из оставшегося набора.

2) Покажем, как Волк сможет уравновесить любую другую пару гирь. Пусть Заяц выбрал гири массами m и n, причем $n > m$. Тогда, если $n - m > 2$, то их уравновесят гири с массами $m + 1$ и $n - 1$ (такие гири обязательно найдутся в оставшемся наборе).

Если же $n - m = 1$ или $n - m = 2$, то их уравновесят гири с массами $m - 1$ и $n + 1$. Такие гири найдутся в оставшемся наборе, если $m \neq 1$ и $n \neq 2018$, а именно эти случаи и указаны в ответе.